ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1970

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 15 nr kol. 285

RYSZARD BARTŁOMIEJCZYK

O PEWNYCH WZORACH DLA PRZYBLIŻONEGO ROZWIĄZYWANIA UKŁADU RÓWNAŃ (2 x 2) DAJĄCYCH ZBIEŻNOŚĆ RZĘDU 3

Celem niniejszego artykułu jest formalne wyprowadzenie wzorów bez dyskusji warunków zbieżności. Z podanego wyprowadzenia wynika, że są to w pewnym sensie najprostsze wzory dające zbieżność rzędu 3. W szczególności wynika, że wzory Wychandu podane w [1] nie dają zbieżności rzędu 3.

Rozpatrzmy układ równań nieliniowych

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 0 \\ g(x,y) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie $f(x,y)$ i $g(x,y)$ są funkcjami rzeczywistymi.
Załóżmy, że funkcje $f(x,y)$ i $g(x,y)$ są klasy $C^{(3)}$ w pewnym obszarze wypukłym i domkniętym Ω, w którym układ (1) posiada dokładnie jedno rozwiązanie (ξ, η) zawarte wewnątrz tego obszaru.
Przedstawmy układ (1) w następującej postaci iteracyjnej

$$\begin{aligned} x &= x + \varphi_{11}(x,y)\, f(x,y) + \varphi_{12}(x,y)\, g(x,y) \\ x &= x + \varphi_{21}(x,y)\, f(x,y) + \varphi_{22}(x,y)\, g(x,y), \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie $\varphi_{ik}(x,y)$ $(i,k = 1,2)$ są różne od zera w obszarze Ω i są klasy $C^{(3)}$ w tym obszarze oraz $\varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}\varphi_{21} \neq 0$ w Ω.

Ciąg iteracji określony przez układ (2) posiada wtedy i tylko wtedy zbieżność rzędu co najmniej 3, jeżeli rozwinięcia według wzoru Taylora w otoczeniu (ξ,η) funkcji stojących po prawej stronie w układzie (2) posiadają pierwsze i drugie różniczki równe 0.

Zerowanie się różniczek 1 i 2 rzędu dla pierwszej z funkcji układu (2) prowadzi do następującego układu równań

$$\begin{aligned}
&\varphi_{11} f'_x + \varphi_{12} g'_x = -1\\
&\varphi_{11} f'_y + \varphi_{12} g'_y = 0\\
&\varphi_{11} f''_{xx} + 2\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial x} f'_x + \varphi_{12} g''_{xx} + 2\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x} g'_x = 0\\
&\varphi_{11} f''_{xy} + \frac{\partial\varphi_{11}}{\partial x} f'_y + \frac{\partial\varphi_{11}}{\partial y} f'_x + \varphi_{12} g''_{xy} + \frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x} g'_y + \frac{\partial\varphi_{12}}{\partial y} g'_x = 0 \qquad (3)\\
&\varphi_{11} f''_{yy} + 2\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial y} f'_y + \varphi_{12} g''_{yy} + 2\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial y} g'_y = 0,
\end{aligned}$$

gdzie funkcje φ_{11}, φ_{12}, f,g oraz ich pochodne dane są w punkcie (ξ,η).

Niech $(x_0,y_0)\in\Omega$ będzie przybliżonym rozwiązaniem układu (1). Rozwiązanie układu (1) można przedstawić w postaci

$$(\xi,\eta) = (x_0+\alpha,\ y_0+\beta),$$

gdzie (α,β) jest błędem przybliżenia (x_0, y_0).

Na podstawie pierwszego z równań (2) można napisać

$$\xi = x_0 + \alpha + \varphi_{11}(x_0+\alpha,\ y_0+\beta)\cdot f(x_0+\alpha,\ y_0+\beta) +$$

$$+ \varphi_{12}(x_0+\alpha,\ y_0+\beta)\cdot g(x_0+\alpha,\ y_0+\beta).$$

Rozwijając $\varphi_{11}(x_0+\alpha, y_0+\beta)$, $\varphi_{12}(x_0+\alpha, y_0+\beta)$ według wzoru Taylora 2-go rzędu w otoczeniu (x_0, y_0) oraz uwzględniając, że

$$d^2\varphi_{11}\cdot f(x_0+\alpha, y_0+\beta) = 0, \quad d^2\varphi_{12}\cdot g(x_0+\alpha, y_0+\beta) = 0$$

otrzymujemy

$$\tilde{\xi} = x_0+\alpha+\left(\varphi_{11}+\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial x}\alpha+\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial y}\beta\right)\cdot f(x_0+\alpha, y_0+\beta)+$$

$$+\left(\varphi_{12}+\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x}\alpha+\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial y}\beta\right)\cdot g(x_0+\alpha, y_0+\beta). \qquad (4)$$

Ostatnią równość przekształcamy rozwijając $f(x_0+\alpha, y_0+\beta)$, $g(x_0+\alpha, y_0+\beta)$ według wzoru Taylora rzędu 3 w otoczeniu (x_0, y_0). Grupując w tej równości czynniki według potęg α i β otrzymujemy

$$\tilde{\xi} = x_0+\varphi_{11}f+\varphi_{12}g+\alpha\left(\varphi_{11}f'_x+\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial x}f+\varphi_{12}g'_x+\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x}g+1\right)+$$

$$+\beta\left(\varphi_{11}f'_y+\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial y}f+\varphi_{12}g'_y+\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial y}g\right)+$$

$$+\alpha^2\left(\frac{1}{2}\varphi_{11}f''_{xx}+\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial x}f'_x+\frac{1}{2}\varphi_{12}g''_{xx}+\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x}g'_x\right)+ \qquad (5)$$

$$+\alpha\beta\left(\varphi_{11}f''_{xx}+\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial x}f'_y+\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial y}f'_x+\varphi_{12}g''_{xx}+\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x}g'_y+\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial y}g'_x\right)+$$

$$+\beta^2\left(\frac{1}{2}\varphi_{11}f''_{yy}+\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial y}f'_y+\frac{1}{2}\varphi_{12}g''_{yy}+\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial y}g'_y\right)+\ldots$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Stąd wynika, że jeżeli $\varphi_{11}(x,y)$, $\varphi_{12}(x,y)$ dla każdego $(x,y)\in\Omega$ spełniają układ równań

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{11} f'_x + \frac{\partial\varphi_{11}}{\partial x} f + \varphi_{12} g'_x + \frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x} g = -1\\
&\varphi_{11} f'_y + \frac{\partial\varphi_{11}}{\partial y} f + \varphi_{12} g'_y + \frac{\partial\varphi_{12}}{\partial y} g = 0\\
&\varphi_{11} f''_{xx} + 2\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial x} f'_x + \varphi_{12} g''_{xx} + 2\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x} g'_x = 0\\
&\varphi_{11} f''_{xy} + \frac{\partial\varphi_{11}}{\partial x} f'_y + \frac{\partial\varphi_{11}}{\partial y} f'_x + \varphi_{12} g''_{xy} + \frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x} g'_y + \frac{\partial\varphi_{12}}{\partial y} g'_x = 0\\
&\varphi_{11} f''_{yy} + 2\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial y} f'_y + \varphi_{12} g''_{yy} + 2\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial y} g'_y = 0
\end{aligned}
\tag{6}
$$

to ciąg iteracji określony układem (2) daje zbieżność rzędu 3. Układ (6) po podstawieniu w miejsce (x,y) punktu (ξ,η) przechodzi w układ (3).

Z układu (6) otrzymujemy związek między φ_{11} i φ_{12} w następujący sposób: przenosimy 4 kolumnę układu (6) na prawą stronę, obliczamy φ_{11} ze wzorów Cramera, wyznacznik stojący w liczniku przedstawiamy w postaci sumy wyznaczników, obniżamy stopień pierwszego z tych wyznaczników a z drugiego wyłączamy φ_{12}. Stąd otrzymujemy równość

$$
\varphi_{11}\cdot\begin{vmatrix} f'_x, & f, & 0, & g, & 0\\ f'_y, & 0, & f, & 0, & g\\ f''_{xx}, & 2f'_x, & 0, & 2g'_x, & 0\\ f''_{xy}, & f'_y, & f'_x, & g'_y, & g'_x\\ f''_{yy}, & 0, & 2f'_y, & 0, & 2g'_y \end{vmatrix} + \varphi_{12}\cdot\begin{vmatrix} g'_x, & g, & 0, & f, & 0\\ g'_y, & 0, & g, & 0, & f\\ g''_{xx}, & 2g'_x, & 0, & 2f'_x, & 0\\ g''_{xy}, & g'_y, & g'_x, & f'_y, & f'_x\\ g''_{yy}, & 0, & 2g'_y, & 0, & 2f'_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0, & f, & 0, & g\\ 2f'_x, & 0, & 2g'_x, & 0\\ f'_y, & f'_x, & g'_y, & g'_x\\ 0, & 2f'_y, & 0, & 2g'_y \end{vmatrix} = 0
$$

Wyznacznik we wzorze (7) przy funkcji φ_{11} jest równy

$$2f''_{xx}(gf'_y-fg'_y)^2+4f''_{xy}(gf'_y-fg'_y)(fg'_x-gf'_x)+2f''_{yy}(fg'_x-gf'_x)^2-$$

$$-4f(f'_x g'_y-f'_y g'_x)^2=$$

$$=-4(f'_x g'_y-f'_y g'_x)^2\left[f-\frac{1}{2}(f''_{xx}\Delta x^2+2f''_{xy}\Delta x\Delta y+f''_{yy}\Delta y^2)\right],$$

gdzie

$$\Delta x=\frac{g f'_y-f g'_y}{f'_x g'_y-f'_y g'_x},\quad \Delta y=\frac{fg'_x-gf'_x}{f'_x g'_y-f'_y g'_x}. \tag{8}$$

Wyrażenia (8) są symetryczne ze względu na f, g i stanowią rozwiązanie układu równań

$$\begin{aligned} f'_x\Delta x+f'_y\Delta y+f&=0\\ g'_x\Delta x+g'_y\Delta y+g&=0. \end{aligned} \tag{9}$$

Wprowadzamy oznaczenie

$$d^2f=f''_{xx}\Delta x^2+2f''_{xy}\Delta x\Delta y+f''_{yy}\Delta y^2. \tag{10}$$

Przy oznaczeniach (8) i (10) wyznacznik we wzorze (7) przy funkcji φ_{11} jest równy

$$-4(f'_x g'_y-f'_y g'_x)^2\left(f-\frac{1}{2}d^2f\right).$$

Z symetrii wzoru (7) wynika, że współczynnik przy φ_{12} jest równy

$$-4(f'_x g'_y-f'_y g'_x)^2\left(g-\frac{1}{2}d^2g\right).$$

Wyraz wolny we wzorze (7) jest równy

$$4\,(f'_x\,g'_y - f'_y\,g'_x)^2 \cdot \Delta x.$$

Wstawiając obliczone wyznaczniki do wzoru (7) otrzymujemy

$$\varphi_{11}\cdot\left(f - \frac{1}{2}\,d^2 f\right) + \varphi_{12}\cdot\left(g - \frac{1}{2}\,d^2 g\right) = \Delta x. \tag{11}$$

Analogiczne rozumowanie przeprowadzone dla drugiego równania układu (2) prowadzi do warunku

$$\varphi_{21}\cdot\left(f - \frac{1}{2}\,d^2 f\right) + \varphi_{22}\cdot\left(g - \frac{1}{2}\,d^2 g\right) = \Delta y. \tag{12}$$

Jeżeli funkcje $\varphi_{ik}(i,k = 1,2)$ spełniają w obszarze Ω tożsamościowo równania (11), (12) to ciąg iteracji określony układem (2) posiada zbieżność rzędu 3.

Niech (x_o, y_o) będzie przybliżeniem początkowym, następne przybliżenie (x_1, y_1) na podstawie (2) jest równe

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_{11}, & \varphi_{12} \\ \varphi_{21}, & \varphi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \tag{13}$$

gdzie

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11}, & \varphi_{12} \\ \varphi_{21}, & \varphi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f - \frac{1}{2}\,d^2 f \\ g - \frac{1}{2}\,d^2 g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}, \tag{14}$$

przy oznaczeniach (8) i (10); wartość funkcji f i g oraz ich pochodnych obliczamy w punkcie (x_o, y_o).

Z (13) i (14) wynika

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 - x_o \\ y_1 - y_o \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$\begin{pmatrix} f - \frac{1}{2} d^2 f \\ g - \frac{1}{2} d^2 g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Podstawiając

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11}, & \varphi_{12} \\ \varphi_{21}, & \varphi_{22} \end{pmatrix}^{-1} = - \begin{pmatrix} f'_x + m_{11}, & f'_y + m_{12} \\ g'_x + m_{21}, & g'_y + m_{22} \end{pmatrix}$$

oraz wykorzystując (9) otrzymujemy z (15) i (16)

$$\begin{aligned} (f'_x + m_{11})(x_1 - x_o) + (f'_y + m_{12})(y_1 - y_o) + f = 0 \\ (g'_x + m_{21})(x_1 - x_o) + (g'_y + m_{22})(y_1 - y_o) + g = 0 \end{aligned}, \tag{17}$$

gdzie

$$\begin{aligned} m_{11} \Delta x + m_{12} \Delta y &= \frac{1}{2} d^2 f \\ m_{21} \Delta x + m_{22} \Delta y &= \frac{1}{2} d^2 g . \end{aligned} \tag{18}$$

Wzory (17) różnią się od metody Newtona (wzory (9)) poprawkami $m_{ik}(i,k = 1,2)$ dodanymi do odpowiednich pochodnych, przy czym poprawki te spełniają warunki (18).

Łatwo zauważyć, że dla

$$m_{11} = \frac{1}{2}(f''_{xx}\Delta x + f''_{xy}\Delta y) \qquad m_{12} = \frac{1}{2}(f''_{xy}\Delta x + f''_{yy}\Delta y)$$
$$m_{11} = \frac{1}{2}(g''_{xx}\Delta x + g''_{xy}\Delta y) \qquad m_{22} = \frac{1}{2}(g''_{xy}\Delta x + g''_{yy}\Delta y) \tag{19}$$

spełnione są warunki (18) oraz warunki symetryczności układu (17) podobnie jak dla metody Newtona.

Możemy więc wychodząc od przybliżenia (x_0, y_0) obliczyć następne przybliżenie (x_1, y_1) z układu równań

$$\left[f'_x + \frac{1}{2}(f''_{xx}\Delta x + f_{xy}\Delta y)\right](x_1 - x_0) + \left[f'_y + \frac{1}{2}(f''_{xy}\Delta x + f''_{yy}\Delta y)\right](y_1 - y_0) + f = 0$$
$$\left[g'_x + \frac{1}{2}(g''_{xx}\Delta x + g''_{xy}\Delta y)\right](x_1 - x_0) + \left[g'_y + \frac{1}{2}(g''_{xy}\Delta x + g''_{yy}\Delta y)\right](y_1 - y_0) + g = 0, \tag{20}$$

gdzie Δx i Δy wyznaczamy z układu (9) przy czym wartości funkcji f i g oraz pochodnych obliczamy w punkcie (x_0, y_0).

Załóżmy dodatkowo, że macierze

$$\begin{pmatrix} f'_x + m_{11}, & f'_y + m_{12} \\ g'_x + m_{21}, & g'_y + m_{22} \end{pmatrix}^{-1}, \qquad \begin{pmatrix} f'_x, & f'_y \\ g'_x, & g'_y \end{pmatrix}^{-1}$$

(gdzie m_{ik} dane są wzorami (19)) są określone i ograniczone w obszarze Ω.

Układ (6) posiada przy tych założeniach jednoznacznie określone i ograniczone rozwiązanie dla każdego $(x,y) \in \Omega$.

Stąd na podstawie (4), (5) wynika istnienie takiej stałej M, że

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 - \xi \\ y_1 - \eta \end{pmatrix} \right\| < M \left\| \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right\|^3$$

Ostatnia nierówność oznacza, że wychodząc od przybliżenia (x_0, y_0) dostatecznie bliskiego pierwiastka (ξ, η) można zbudować stosując wielokrotnie wzory (20) ciąg przybliżeń zbieżny do pierwiastka układu (1), przy czym rząd zbieżności tego ciągu jest równy 3.

Wychandu w pracy [1] podał modyfikację metody Newtona, która w przypadku dwu równań o dwóch niewiadomych polega na wprowadzeniu do układu (17) następujących poprawek

$$m_{11}^* = -f\frac{f''_{xx}}{2f'_x} \qquad m_{12}^* = -f\frac{f''_{yy}}{2f'_y}$$

$$m_{21}^* = -g\frac{g''_{xx}}{2g'_x} \qquad m_{22}^* = -g\frac{g''_{yy}}{2g'_y}.$$

Tak wprowadzonym do układu (17) poprawkom odpowiada układ iteracyjny (2) w którym

$$\varphi_{11}^* = -\frac{g'_y - g\dfrac{g''_{yy}}{2g'_y}}{U}, \qquad \varphi_{12}^* = \frac{f'_y - f\dfrac{f''_{yy}}{2f'_y}}{U},$$

gdzie

$$U = \begin{vmatrix} f'_x - f\dfrac{f''_{xx}}{2f'_x}, & f'_y - f\dfrac{f''_{yy}}{2f'_y} \\ g'_x - g\dfrac{g''_{xx}}{2g'_x}, & g'_y - g\dfrac{g''_{yy}}{2g'_y} \end{vmatrix}.$$

Wstawiając do dwóch pierwszych równań układu (6) φ^*_{11}, φ^*_{12} otrzymujemy

$$\frac{\partial \varphi^*_{11}}{\partial x} f + \frac{\partial \varphi^*_{12}}{\partial x} g = -1 + \frac{f'_x \left(g'_y - g \frac{g''_{yy}}{2g'_y}\right) - g'_x\left(f'_y - f \frac{f''_{yy}}{2f'_y}\right)}{U}$$

$$\frac{\partial \varphi^*_{11}}{\partial y} f + \frac{\partial \varphi^*_{12}}{\partial y} g = \frac{f'_y\left(g'_y - g \frac{g''_{yy}}{2g'_y}\right) - g'_y\left(f'_y - f \frac{f''_{yy}}{2f'_y}\right)}{U}.$$

Różniczkując ostatnie tożsamości ze względu na x i y oraz podstawiając $x = \xi$, $y = \eta$ mamy

$$\frac{\partial \varphi^*_{11}}{\partial x} f'_x + \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial x} g'_x = \frac{f''_{xx} g'_y - f'_y g''_{xx}}{2(f'_x g'_y - f'_y g'_x)},$$

$$\frac{\partial \varphi^*_{11}}{\partial x} f'_y + \frac{\partial \varphi^*_{12}}{\partial x} g'_y = \frac{\frac{1}{2} g'_x f''_{yy} - \frac{1}{2} f'_x g''_{yy} + g'_y f'_y \left(\frac{f''_{xx}}{2f'_x} - \frac{g''_{xx}}{2g'_x}\right)}{f'_x g'_y - f'_y g'_x},$$

$$\frac{\partial \varphi^*_{11}}{\partial y} f'_x + \frac{\partial \varphi^*_{12}}{\partial y} g'_x = \frac{f'_x g'_y \frac{f''_{yy}}{2f'_y} - f'_y g'_x \frac{g''_{yy}}{2g'_y}}{f'_x g'_y - f'_y g'_x},$$

$$\frac{\partial \varphi^*_{11}}{\partial y} f'_y + \frac{\partial \varphi^*_{12}}{\partial y} g'_y = \frac{g'_y f''_{yy} - f'_y g''_{yy}}{2(f'_x g'_y - f'_y g'_x)}.$$

Wstawiamy otrzymane wyniki do układu (3). Wszystkie równania układu (3) z wyjątkiem 4 są spełnione.

Oznacza to, że przy rozwinięciu prawych stron układu iteracyjnego (2) według wzoru Taylora zeruje się pierwsza różniczka, a w drugiej różniczce jest różna od zera tylko pochodna mieszana.

Ponieważ tak wprowadzone poprawki nie spełniają równań (3) więc modyfikacja ta nie daje zbieżności rzędu 3.

Przykład. Rozwiązać układ

$$x^2y^2 - 2x^3 - 5y^3 + 10 = 0$$

$$x^4 - 8y + 1 = 0.$$

Rozpoczynając od przybliżenia (-2,2) otrzymujemy stosując wzory (8)

$$x = 0{,}0258 \qquad y = 0{,}0221.$$

Następnie stosując wzory (17) mamy

$$(-40 + 0{,}236)\,(x_1 + 2) + (-44 - 0{,}781)\,(y_1 - 2) + 2 = 0$$

$$(-32 + 0{,}6192)\,(x_1 + 2) + (-8)\,(y_1 - 2) + 1 = 0.$$

Stąd po rozwiązaniu

$$x_1 = -1{,}9735364... \qquad y_1 = 2{,}0211542...$$

(dokładne wartości: x=-1,9735205... y = 2,0211670...).

Wychandu stosując swą metodę otrzymuje po pierwszym kroku przybliżenie

$$x_1 = -1{,}97342 \qquad y_1 = 2{,}02121.$$

LITERATURA

[1] Zaguskin W.L. - Przegląd metod numerycznych rozwiązywania równań, Warszawa 1965 PAN.

О НЕКОТОРЫХ ФОРМУЛАХ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ (2x2) ДАЮЩИХ СХОДСТВО 3-ГО ПОРЯДКА

Р е з ю м е

В статье выведены формулы приближенного решения системы уравнений, дающих сходство 3-го порядка, без дискуссии условий сходства. Если (x_0, y_0) будет приближенным решением системы (1) тогда следуещее приближение (x_1, y_1) находим из системы уравнений (20), где Δx, Δy, исполняют систему (9), причем значение функций f и $\bar{g}$ как и производных ее находим в точке (x_0, y_0).

ON SOME FORMULAS FOR APPROXIMATE SOLUTION OF SYSTEM OF EQUATIONS (2x2) WITH CONVERGENCE 3rd DEGREE

S u m m a r y

The paper contains deduction of formulas for approximate solution of the system of equations with convergence 3rd degree, without the discussion of conditions of convergence. If (x_0, y_0) is the approximate solution of the system (1) then the next approximation (x_1, y_1) we calculate from the system (20) where Δx, Δy satisfy the system of equations (9). The values of functions f, g and their derivatives are calculated in the point (x_0, y_0).