ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1970

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 15 Nr kol. 285

SZCZEPAN BORKOWSKI

NUMERYCZNE ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA NAPRĘŻEŃ CIEPLNYCH
(Komunikat)

1. Wstęp

W niniejszym komunikacie przedstawiamy problematykę odnoszącą się do przybliżonego rozwiązywania zagadnień brzegowych, tzw. teorii naprężeń cieplnych (niesprzężone pola przemieszczeń i temperatur). Zagadnienia te, w swoim aspekcie matematycznym, będą przedmiotem szczegółowych badań pewnej podgrupy zespołu. Przegląd publikacji odnoszących się do analizy pól termicznych i przemieszczeniowych, a dotyczących zagadnień termosprężystych przedstawiono w pracy [1]. W przygotowaniu do druku znajduje się analogiczna praca przeglądowa, która omawiać będzie publikacje jakie ukazały się do roku 1970. Zaznaczamy, że sformułowane poniżej zadanie nie było przedmiotem rozważań pracy [2].

2. Sformułowanie zadania

Należy wyznaczyć funkcję wektorową $u(x,t) = (u(x,y,z,t), v(x,y,z,t), W(x,y,z,t))$ spełniającą w obszarze V (ośrodek sprężysty) następujący układ równań teorii naprężeń cieplnych

$$\sum_{\substack{i,j,k \\ (i+j+k=2)}} B_{ijk}\, u_{x^i y^j z^k}(x,t) = \varphi(x,t) \tag{2.1}$$

oraz warunki brzegowe, postaci

$$\sum_{\substack{i,j,k \\ (i+j+k=1)}} C_{ijk}\, u_{x^i y^j z^k}(x,t)\Big|_{x\in\partial v_1} = f,$$

$$u(x,t)\Big|_{x\in\partial v_2} = \varphi, \qquad \text{gdzie } \partial v_1 \cup \partial v_2 = \partial v. \tag{2.2}$$

Funkcja wektorowa $\varphi(x,t)$ jest znana; możemy ją otrzymać rozwiązując problem początkowo-brzegowy dla równania przewodnictwa ciepła Fouriera. Z uwagi na obszerne omówienie literaturowe tego problemu, ta część obliczeń nie będzie tutaj rozpatrywana. Występujący w zadaniu (2.1), (2.2) symbol t. (czas),odgrywa rolę parametru, gdyż w omawianej tutaj teorii nie uwzględnia się wpływów dynamicznych wywołanych polem temperatur. W równaniach (2.1), (2.2) wprowadzono następujące macierze

$$B_{200}=\mathrm{diag}(\lambda+2\mu,\mu,\mu),\ B_{020}=\mathrm{diag}(\mu,\lambda+2\mu,\mu),\ B_{002}=\mathrm{diag}(\mu,\mu,\lambda+2\mu),$$

$$B_{110}=\begin{bmatrix} d_{12}=d_{21}=\lambda+\mu \\ \text{pozost. } d_{ij}=0 \end{bmatrix},\ B_{101}=\begin{bmatrix} d_{13}=d_{31}=\lambda+\mu \\ \text{pozost. } d_{ij}=0 \end{bmatrix},\ B_{011}=\begin{bmatrix} d_{23}=d_{32}=\lambda+\mu \\ \text{pozost. } d_{ij}=0 \end{bmatrix}$$

$$C_{100} = \begin{bmatrix} (\lambda+2\mu)n_1 & \mu n_2 & \mu n_3 \\ \lambda n_2 & \mu n_2 & 0 \\ \lambda n_3 & 0 & \mu n_1 \end{bmatrix},\ C_{010} = \begin{bmatrix} \mu n_2 & n_1 & 0 \\ \mu n_1 & (\lambda+2\mu)n_2 & \mu n_3 \\ 0 & \lambda n_3 & \mu n_2 \end{bmatrix},$$

$$C_{001} = \begin{bmatrix} \mu n_3 & 0 & \mu n_1 \\ 0 & \mu n_3 & \mu n_2 \\ \mu n_2 & \mu n_2 & (\lambda+2\mu)n_3 \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Występujący w (2.3) symbol E oznacza macierz diagonalną. Funkcje wektorowe $\mathbf{f}, \Psi$ (rów.(2.2)) są znane. Symbole $n_i (i=1,2,3)$ przedstawiają cosinusy kierunkowe normalnej do powierzchni brzegowej ośrodka. Wielkości λ, μ są stałymi. Zakładać będziemy, że problem (2.1), (2.2) posiada jednoznaczne rozwiązanie.

3. Zastosowanie metody różnic skończonych

Przeprowadzając dyskretyzację obszaru i określając funkcje zmiennej dyskretnej dla węzłów wewnętrznych i brzegowych, możemy [3], [4], korzystając ze wzoru Taylora dla funkcji wielu zmiennych, napisać zamiast (2.1) i $(2.2)_1$, kolejno

$$u_{x^{i}y^{i}z^{k}}(x_p,t) = \Bigg|_{x_p \in V_h} \sum_{\substack{j_k=p_k-\alpha_k \\ (k=1,2,3)}}^{p_k+\alpha_k} \frac{1}{h_1^{i_1} h_2^{i_2} h_3^{i_3}} b^{i_1 i_2 i_3}_{j_1 j_2 j_3}(x_p,t) u_{j_1 j_2 j_3} + \varepsilon, \tag{3.1}$$

$$u_{x^{i}y^{j}z^{k}}(x_p,t)\Bigg|_{x_p \in \partial V_{1h}} = \sum_{\substack{j_k=q_k-\beta_k \\ (k=1,2,3)}}^{q_k+\beta_k} \frac{1}{h_1^{i_1} h_2^{i_2} h_3^{i_3}} c^{i_1 i_2 i_3}_{j_1 j_2 j_3}(x_p,t) u_{j_1 j_2 j_3} + \tilde{\varepsilon}.$$

Podstawiając (3.1) odpowiednio do (2.1) i (2.2) i stosując sposób podany w [2], [4], uzyskujemy równanie algebraiczne metody różnic skończonych

$$Au = F(x_p,t) + \hat{\varepsilon}, \tag{3.2}$$

które łącznie z $(2.2)_1$ określają wartości funkcji na dyskretnym zbiorze punktów ośrodka, który poddany jest działaniu stacjonarnego pola temperatur. Zamiast równania (3.2) stosować będziemy równanie przybliżone

$$A\,\tilde{u} = F\,(x_{p,t}), \tag{3.3}$$

z którego możemy, korzystając z techniki cyfrowej, wyznaczyć poszukiwane wartości przybliżone $\tilde{u}$. Odejmując od siebie (3.2) i (3.3) uzyskujemy $A(u-\tilde{u})=\hat{\varepsilon}$ lub $(u-\tilde{u}) = A^{-1}\hat{\varepsilon}$, skąd możemy uzyskać oszacowanie

$$\|u - \tilde{u}\| = \|A^{-1}\hat{\varepsilon}\| < \delta. \tag{3.4}$$

LITERATURA

[1] Borkowski S. - Przegląd prac dotyczących naprężeń termicznych w ciałach stałych (lata 1965-1967), Mech. Teor.Stos., 2,7(1969), 107-153.

[2] Borkowski S. - Numeryczne rozwiązanie równań termosprężystości, Rozpr. Inż., 1,18(1970), w druku.

[3] Collatz L. - Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych, Warszawa 1960.

[4] Szamański W.J. - Metody czislennego reszenija krajewych zadacz, na ECWM, cz. 1, Kijew 1963.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕРМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ

Р е з ю м е

В работе дается матричное представление краевых статических задач термических напряжений. Наконец к так представленным краевым задачам применются метод конечных разностей, доказывая, что этот метод может быть представлен одним матричным уравнением (3.3).

NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF THERMAL STRESSES

S u m m a r y

In this paper is given the matrix representation for boundary problems of the static equations of thermoelasticity. Finally, to the boundary problems so conceived is applied the method of finite differences, proving that it can be described by a single matrix equation (3.3).