ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1970

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 15 nr kol. 285

MARIAN PALEJ

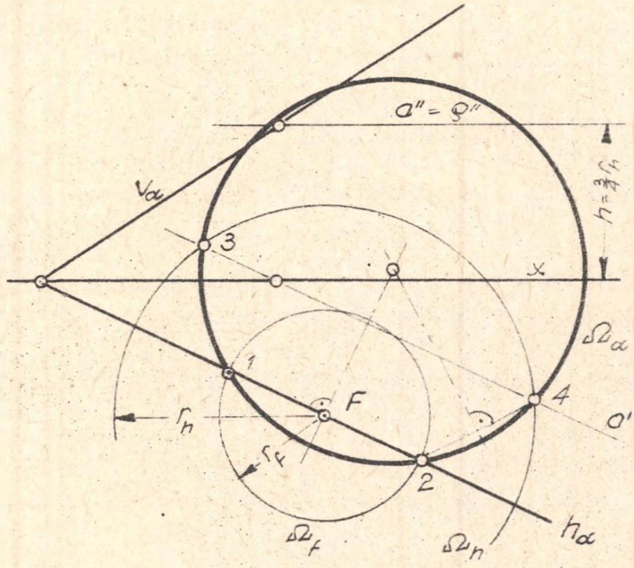
O PEWNYM SPOSOBIE WYZNACZANIA RZECZYWISTEJ WIELKOŚCI KĄTA DWUŚCIENNEGO ORAZ KONSTRUKCJI OBROTU PŁASZCZYZNY W ODWZOROWANIU MONGE'A

Przyjmijmy, że dane są dwie płaszczyzny $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$ i $\beta(h_\beta, v_\beta)$ w dowolnym położeniu. Rozpatrzmy dwa zagadnienia:

1) konstrukcję rzeczywistej wielkości kąta utworzonego przez te płaszczyzny,
2) odwzorowanie jednej z tych płaszczyzn po obrocie dokoła krawędzi $k = \alpha\beta$ o zadany kąt φ.

Obydwa zadania występują często w geometrii wykreślnej, przy czym klasyczny sposób ich rozwiązania polega, ogólnie biorąc, na kładzie lub transformacji płaszczyzny prostopadłej do krawędzi k. W niniejszym artykule rozpatrzono inną metodę rozwiązania powyższych zadań, opartą o odwzorowanie wiernokątne, w szczególności o odwzorowanie uzyskane za pośrednictwem paraboloidy obrotowej. Przypomnijmy dowiedzioną (1) własność paraboloidy obrotowej:
"okręgi stanowiące rzut prostokątny na rzutnię prostopadłą do osi paraboloidy obrotowej dwu stożkowych przekroju tej paraboloidy dowolnymi płaszczyznami α i β przechodzącymi przez jej ognisko przecinają się pod kątem równym rzeczywistej wielkości miary kąta dwuściennego utworzonego przez te płaszczyzny".

Rozważmy (rys. 1) dowolną płaszczyznę $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$ i wprowadźmy taką dowolną paraboloidę obrotową Π, której ognisko F znajduje się na płaszczyźnie α. Dla uproszczenia przyjmijmy oś paraboloidy prostopadle do rzutni poziomej, a ognisko F na śladzie h_α . Pomyślaną tak paraboloidę określą jednoznacznie: okrąg przekroju rzutnią poziomą, który w dalszym ciągu nazywać będziemy okręgiem ogniskowym - Ω_f oraz drugi jeszcze



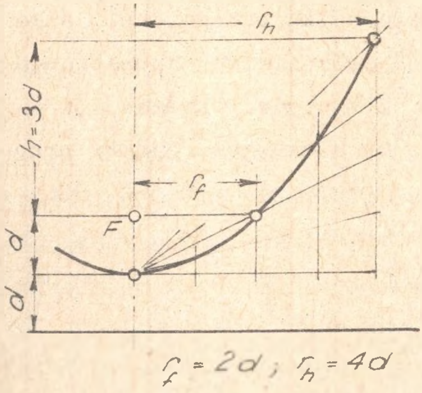
Rys. 1

okrąg Ω_h przekroju tej powierzchni płaszczyzną poziomą przechodzącą na pewnej wysokości h. Z własności paraboli wynika, że dla przyjętego dowolnie promienia r_f okręgu ogniskowego Ω_f wielkość promienia r_h okręgu Ω_h jest ściśle związana z wielkością h i na odwrót. Dla uproszczenia dalszych rozważań rozpatrzmy taki okrąg Ω_h, którego promień r_h spełnia warunek $r_h = 2\ r_f$.

Nie trudno ustalić (rys. 2), że wówczas:

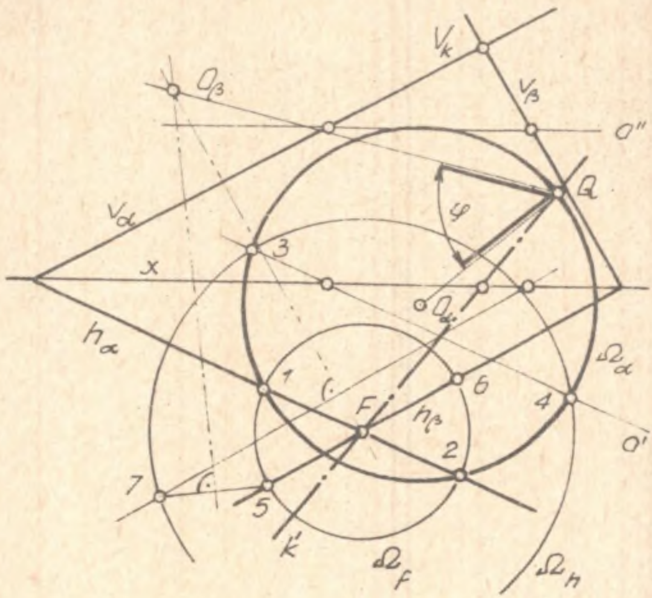
$$h = 3/4\ r_h$$

Przy powyższych założeniach można już w sposób prosty wyznaczyć okrąg Ω_α uzyskany z rzutu prostokątnego na π_1 stożkowej przekroju paraboloidy Π płaszczyzną α. Wystarczy bowiem zauważyć, że ustalają go punkty 1,2 przecięcia okręgu ogniskowego śladem h_α oraz punkty 3, 4 przecięcia okręgu Ω_h rzutem a' prostej $a = \varrho\alpha$. W celu uproszczenia dalszych sformułowań okrąg ϱ_α nazywać będziemy śladem paraboloidalnym płaszczyzny α.



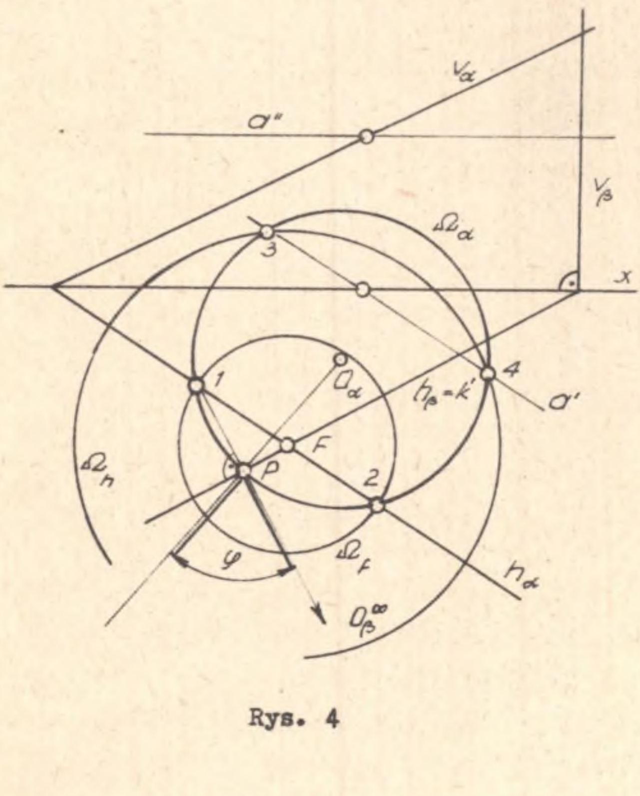
Rys. 2

Przejdźmy z kolei do rozwiązania zadania 1. Dane są dowolne dwie płaszczyzny $\alpha(h_\alpha, V_\alpha)$ i $\beta(h_\beta, V_\beta)$ (rys. 3). Należy wyznaczyć rzeczywistą wielkość kąta $\sphericalangle\varphi = \sphericalangle\alpha\beta$



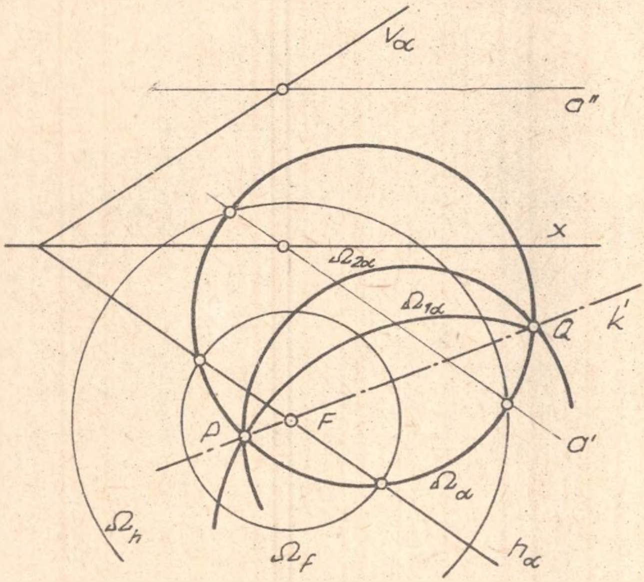
Rys. 3

Zauważmy, że w świetle cytowanej własności paraboloidy obrotowej zadanie rozwiązuje konstrukcja śladów paraboloidalnych obydwu płaszczyzn. Ponieważ jednak szukany kąt φ jest równy kątowi, pod którym przecinają się okręgi Ω_α i Ω_β - konstrukcję uprościć można do wyznaczenia jednego tylko okręgu, np. śladu Ω_α i środka drugiego okręgu - Ω_β. W celu bowiem skonstruowania kąta φ wystarczy znać środki O_α i O_β obydwu okręgów Ω_α i Ω_β oraz jeden z punktów przecięcia się tych okręgów. Punkty przecięcia okręgów Ω_α i Ω_β leżą jednak na krawędzi k (będąc jednocześnie punktami przebicia paraboloidy Π prostą k), a więc mogą być ustalone przez narysowanie jednego tylko z tych okręgów. Konstrukcję opartą o powyższe wyjaśnienia przedstawiono na rys. 3. Środek O_β wyznaczono za pomocą symetralnych odcinków $\overline{56}$ i $\overline{57}$, a rzeczywistą wielkość kąta φ wyraża kąt O_α Q O_β



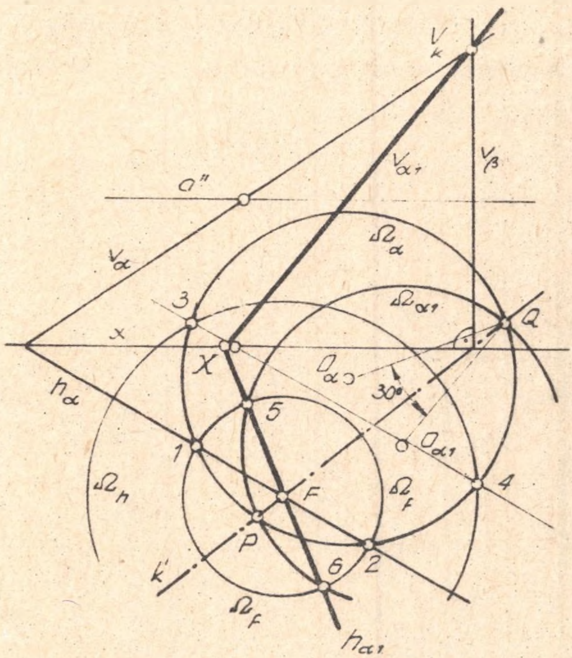
Rys. 4

Rysunek 4 ilustruje rozwiązanie zadania 1. w przypadku,gdy jedna z płaszczyzn jest rzutująca. Jest widoczne, że szczególne przyjęcie jednej z płaszczyzn upraszcza konstrukcję.
Zauważmy jeszcze, że dla określonego położenia płaszczyzny α mogą nie istnieć rzeczywiste punkty przecięcia śladu paraboloidalnego Ω_α z prostą a'. Zachodzi to wówczas, kiedy płaszczyzna α przecina paraboloidę w krzywej, której wszystkie punkty leżą po jednej stronie płaszczyzny okręgu Ω_h. Należy wówczas w miejsce okręgu Ω_h rozpatrzyć inny okrąg leżący na paraboloidzie Π o odpowiednio mniejszym promieniu i wysokości.



Rys. 5

Jako drugie z kolei zadanie rozpatrzmy obrót dowolnej płaszczyzny α dokoła krawędzi $k = \alpha\beta$ o kąt 30°. Zauważmy na wstępie, że ślady paraboloidalne płaszczyzny obracającej się dokoła prostej k będą okręgami przechodzącymi przez punkty przecięcia okręgów Ω_α i Ω_β z zadania pierwszego. Pęk takich okręgów (rys. 5) przedstawia różne położenia płaszczyzny α (lub β) obracającej się dookoła prostej k. Ponieważ interesuje nas położenie płaszczyzny α uzyskane w wyniku obrotu dokoła $k = \alpha\beta$ o kąt 30°, paraboloidalny ślad tej płaszczyzny, na zasadzie wspomnianej własności paraboloidy obrotowej winien tworzyć z okręgiem Ω_{α} kąt 30°. Ślad taki przedstawia na rys. 6 okrąg opisany symbolem $\Omega_{\alpha 1}$. Konstrukcja okręgu $\Omega_{\alpha 1}$ wynika z zachowania warunku aby promień przynależny do punktu Q tworzył z przynależnym do tego samego punktu promieniem okręgu Ω_{α} zadany kąt 30°.



Rys. 6

Dysponując śladem paraboloidalnym $\Omega_{\alpha 1}$ obróconej płaszczyzny α możemy natychmiast wskazać jej ślady: poziomy i pionowy. Ślad poziomy przechodzić musi przez punkty przecięcia śladu paboloidalnego z okręgiem ogniskowym Ω_f, natomiast ślad piono-

wy zgodnie z warunkiem przynależności płaszczyzny α do prostej k ustalony jest punktami V_k oraz $x = h\alpha_1 x$.
Konstrukcję sprawdza współliniowość punktów 5,6 i F.

LITERATURA

[1] Palej M. - O pewnym przypadku wiernokątnego odwzorowania płaszczyzn - Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria Matematyka-Fizyka z. nr 10 - Gliwice, 1966.

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИСТИННОЙ ВЕЛИЧИНЫ УГЛА МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ И КОНСТРУКЦИИ ВРАЩЕНИЯ ПЛОСКОСТИ В МЕТОДЕ МОНЖА

Р е з ю м е

В работе рассмотрено определение истинной величины угла между плоскостями и конструкцию вращения плоскости. Конструкция основана на некоторых особенностях параболоида вращения.

A METHOD USED FOR DETERMINING OF THE DIHEDRAL ANGLE AND FOR THE REVOLUTION OF THE PLANE IN MONGES PROJECTIONS

S u m m a r y

In the paper the author discusses a method of the dihedral angle determining and of the revolution of the plane on the basis of paraboloids of revolution properties.