ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1970

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 15 nr kol. 285

STANISŁAW OCHOŃSKI, MARIAN PALEJ

KONSTRUKCJA KRZYWEJ STOPNIA DRUGIEGO OKREŚLONEJ TRZEMA PUNKTAMI I OGNISKIEM

Uwzględniając zasadniczą własność ogniska krzywej stopnia drugiego jako środka inwolucyjnego cyklicznego pęku prostych sprzężonych względem tej krzywej przewidzieć można, że zagadnienie konstrukcji stożkowej o danym ognisku, przechodzącej przez 3 dane punkty posiadać będzie 4 lub 0 rzeczywistych rozwiązań.

Jest to bowiem przykład określenia krzywej stopnia drugiego trzema punktami i dwiema stycznymi (te ostatnie stanowią w tym przypadku proste izotropowe jako proste podwójne pęku cyklicznego [1].

Zasadę konstrukcji wygodnie jest wyprowadzić z następującego dowodu znanego twierdzenia:

Spodek wysokości stożka obrotowego (rys. 1) jest ogniskiem prostokątnego rzutu na płaszczyznę podstawy dowolnego niezdegenerowanego przekroju tego stożka.

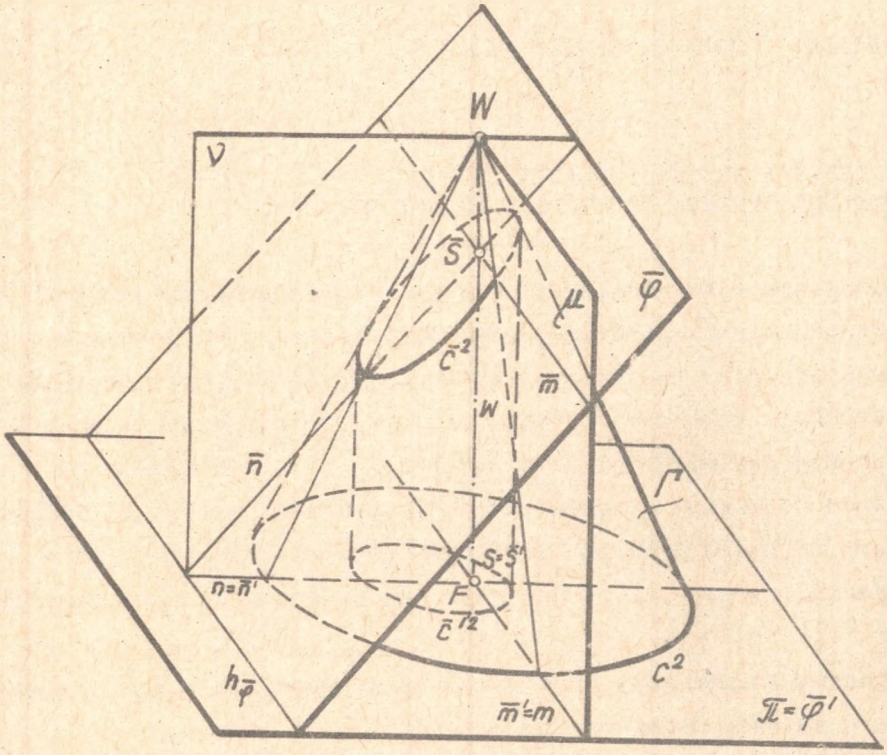
W dowodzie rozważmy cykliczny pęk płaszczyzn $\mu, \nu \ldots$ o osi, w, zjednoczonej z osią dowolnego stożka obrotowego Γ (rys. 1).

Nietrudno zauważyć, że pęk w $(\mu, \nu \ldots)$ będący inwolucyjnym pękiem płaszczyzn sprzężonych względem stożka Γ można otrzymać przez rzut z wierzchołka W inwolucyjnego pęku średnic sprzężonych S(m,n...) podstawy c^2 stożka Γ.

Zachodzi więc:

$$w(\mu, \nu \ldots) \overset{W}{\barwedge} S(m,n\ldots)$$

Wprowadźmy dowolną płaszczyznę $\bar{\varphi}$ tnącą stożek Γ w stożkowej $\bar{c}^2$, a pęk $w(\mu, \nu \ldots)$ w pęku prostych $\bar{S}(\bar{m}, \bar{n} \ldots)$.



Rys. 1

Jest oczywiste, że pęk $\bar{S}(\bar{m}, \bar{n} \ldots)$ będzie inwolucyjnym pękiem prostych sprzężonych względem stożkowej $\bar{c}^2$ gdyż:

$$\bar{S}(\bar{m}, \bar{n} \ldots) \overset{W}{\barwedge} w(\mu, \nu \ldots) \overset{W}{\barwedge} S(m, n \ldots)$$

przy jednocznesnej perspektywiczności o środku W stożkowych c^2 i $\bar{c}^2$.

Dokonując rzutu prostokątnego pęku $\bar{S}(\bar{m}, \bar{n} \ldots)$ oraz stożkowej $\bar{c}^2$ na płaszczyznę podstawy stożka otrzymujemy pęk $\bar{S}'(\bar{m}', \bar{n}' \ldots)$ =

$\equiv$ S(m,n...) oraz stożkową $\bar{c}'^2$, przy czym wobec zachowania perspektywiczności z środkiem rzutu prostokątnego N^{∞} układów $\bar{\varphi}$ i $\bar{\varphi}'$ pęk S(m,n,...) stanowić będzie cykliczny pęk prostych sprzężonych względem stożkowej $\bar{c}'^2$, czyli punkt S będzie ogniskiem krzywej $\bar{c}'^2$ co było do udowodnienia.

W dalszym ciągu zauważmy na rys. 1,, że krzywe c^2 i $\bar{c}'^2$ pozostają w związku kolineacji środkowej, którego osią jest prosta $h\bar{\varphi}$, a środkiem rzut wierzchołka W - punkt F.

Związek ten może stanowić podstawę konstrukcji krzywej $\bar{c}'^2$ wówczas gdy znana jest krzywa c^2 - podstawa stożka Γ.

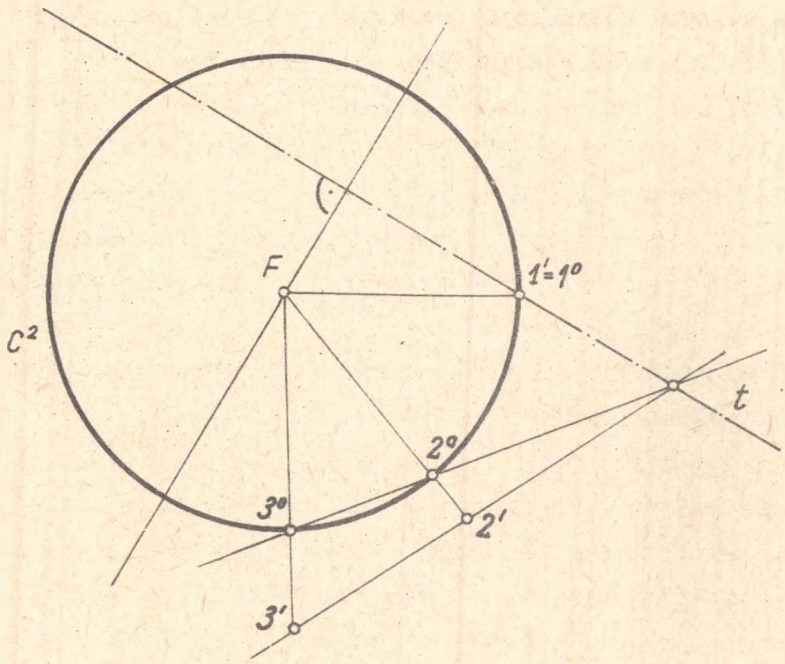
Ponieważ jednak jako krzywą c^2 możemy przyjąć dowolny okrąg[x)] o środku F, sposób skonstruowania stożkowej o ognisku F, przynależnej do trzech danych punktów 1′, 2′, 3′ przedstawia się następująco: (rys. 2)

1. Wyznacza się okrąg c^2 o środku F przechodzący przez jeden z danych punktów np. punkt 1′.
2. Trójce punktów 1′,2′, 3′ przyporządkowuje się, traktując punkt F jako środek kolineacji, trójkę punktów okręgu $1^o, 2^o, 3^o$. W konstrukcji tej z par punktów przecięcia okręgu promieniami kolineacji wybiera się po jednym dowolnie. Tą drogą otrzymuje się jedno rozwiązanie - dalsze rozwiązania powstaną przy innym wyborze punktów z poszczególnych par.
3. Konstruuje się oś kolineacji t, przy pomocy której oraz środka kolineacji F wyznacza się dowolnie wiele punktów krzywej c'^2 jako punktów odpowiadających poszczególnym punktom okręgu c^2.

---

x) Krzywą tą może być ogólniej dowolna stożkowa o ognisku F. Ze względów praktycznych wygodniej jest rozważyć okrąg. Zgodnie z rys. 1 dowolne przyjęcie promienia w okręgu c^2 determinuje jedynie położenie płaszczyzny π, a w ślad za tym położenie prostej $h\bar{\varphi}$ nie naruszając jednak omówionych wyżej związków.

Warto przy tym zaznaczyć, że dzięki własnościom okręgu - oś t będzie kierunkiem symetrii prostokątnej stożkowej c'^2. W rezultacie znana jest bezpośrednio prosta, na której leży drugie ognisko tej stożkowej. Jest nią prosta przynależna do F i prostopadła do t[x].



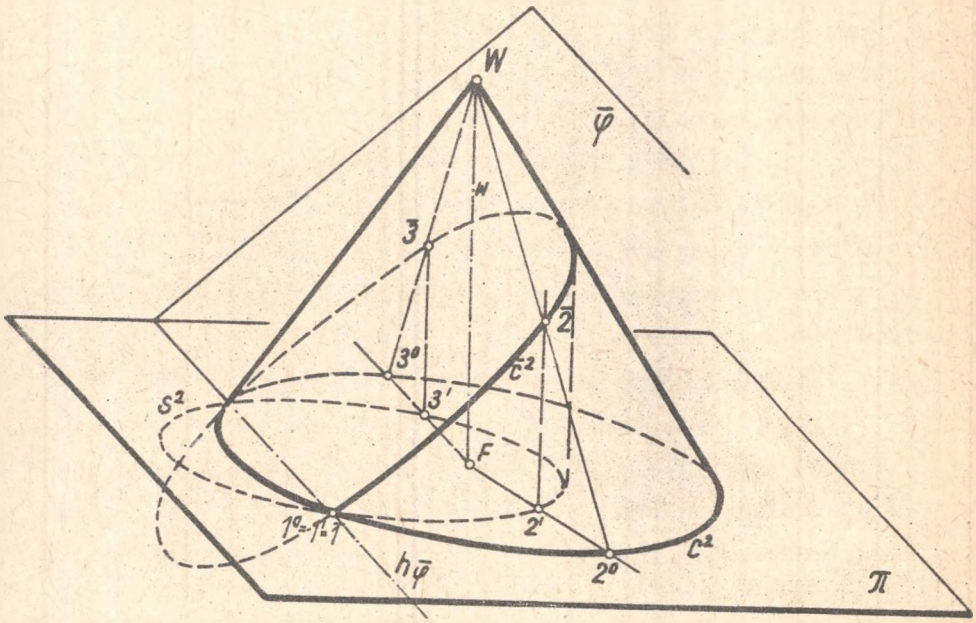
Rys. 2

Rozpatrzmy z kolei ilość rzeczywistych rozwiązań omawianego zagadnienia w poszczególnych przypadkach. W tym celu przeprowadźmy następujące rozumowanie:

---

x) Z rozważań powyższych wynika, że dla danego ogniska F krzywej stopnia drugiego i znanego kierunku osi do określenia tej krzywej wystarczy podać dwa jej punkty - wówczas bowiem można natychmiast wyznaczyć oś kolineacji wiążącej tę krzywą z dowolnym współogniskowym okręgiem.
Podobnie jak w rozpatrywanym ogólnym przypadku wystąpić tu mogą 4 rozwiązania.

Niech dana będzie niewspółliniowa trójka punktów $1'$, $2'$, $3'$ (rys. 3) i ognisko F krzywej stopnia drugiego. Obierzmy dowolny okrąg c^2 o środku F, dla uproszczenia przynależny do jednego z powyższych punktów np. $c^2 \in 1'$. Utwórzmy obrotową powierzchnię stożkową Γ o kierującej w postaci okręgu c^2 i wierzchołku W przyjętym na dowolnej wysokości. Dokonajmy rzutu równoległego w kierunku $w = FW$ na powierzchnię stożkową Γ punktów $1'$, $2'$, $3'$.



Rys. 3

Spośród tak uzyskanych par punktów $1,\bar{1}$, $2,\bar{2}$, $3,\bar{3}$ wybieramy punkty np. $\bar{1},\bar{2},\bar{3}$ i rozważamy określoną przez nie płaszczyznę $\bar{\varphi}$. Można udowodnić, że krzywa $\bar{c}^2$, w której płaszczyzna $\bar{\varphi}$ przecina powierzchnię Γ stanowi rzut na tę powierzchnię w kierunku w krzywej wyjściowej s^2 tj. tej, którą określa ognisko F i trójka punktów $1'$, $2'$, $3'$.

Wystarczy w tym celu przeprowadzić następujące rozumowanie:
Powierzchnią rzutującą krzywą s^2 w kierunku w jest powierzchnia walcowa Ψ o tworzących równoległych do w.
Kierujące powierzchni Ψ i Γ są zgodnie z założeniem konstrukcji współogniskowe (środek okręgu c^2 jest ogniskiem krzywej s^2).
Rozważmy pęk płaszczyzn o osi w sprzężonych względem powierzchni stożka Γ. Jest oczywiste, że pęk ten będzie również pękiem płaszczyzn sprzężonych względem powierzchni walcowej Ψ, gdyż pęk ten i powierzchnia Ψ powstały z rzutu równoległego w kierunku osi w zarówno stożkowej s^2 jak i sprzężonych względem niej prostych pęku średnic sprzężonych F(m,n...).
Mamy więc do czynienia z dwiema powierzchniami stopnia drugiego które posiadają wspólny, cykliczny pęk płaszczyzn sprzężonych. Jest oczywiste, że zjednoczone płaszczyzny tego pęku są płaszczyznami stycznymi do obydwu powierzchni Γ i Ψ.
Wnosimy więc, że istnieją dwie różne, wspólnie styczne do powierzchni Ψ i Γ płaszczyzny, a co za tym idzie, że powierzchnie Ψ i Γ przenikają się w zdegenerowanej do dwóch stożkowych krzywej stopnia czwartego.
Udowodniliśmy więc, że rzutem w kierunku w na powierzchnię Γ stożkowej s^2 mogą być tylko dwie stożkowe.
Jeżeli dla jednej z nich ustalimy 3 punkty jak wyżej $\bar{1},\bar{2},\bar{3}$) - stożkowa taka musi być identyczna z stożkową przekroju powierzchni Γ płaszczyzną $\bar{\varphi} = \bar{1}\,\bar{2}\,\bar{3}$, gdyż w tej samej płaszczyźnie może leżeć tylko jedna stożkowa przekroju danej powierzchni stopnia drugiego.
Dowiedliśmy w ten sposób, że krzywą $\bar{c}^2$ można traktować jako rzut w kierunku w na powierzchnię Γ współogniskowej z okręgiem c^2 stożkowej s^2.

Ponieważ dla krzywej s^2 przyjęto dowolnie trójkę punktów, z rozważań powyższych wynika twierdzenie:

Dla dowolnie przyjętej stożkowej s^2 współogniskowej i współpłaszczyznowej z podstawą stożka obrotowego istnieje taka stożkowa $\bar{c}^2$ leżąca na tym stożku, której rzutem normalnym na płaszczyznę podstawy jest s^2.

Łatwo przy tym zauważyć, że jeżeli s^2 jest krzywą niezdegenerowaną, istnieć będą dwie stożkowe $\bar{c}^2$ symetrycznie położone względem płaszczyzny przechodzącej przez wierzchołek stożka prostopadle do jego osi. Rozumowanie powyższe przeprowadzono dla dowolnie wybranych 3 spośród 6 punktów przebicia powierzchni Γ prostymi rzutującymi punkty $1'$, $2'$, $3'$ stożkowej s^2.

Jeżeli uwzględnimy, że ilość różnych trójek utworzonych z 6 elementów wynosi 8, dochodzimy do możliwości otrzymana w ogólnym przypadku ośmiu stożkowych leżących na powierzchni Γ, takich których rzuty przechodzą przez trójkę zadanych punktów $1'$, $2'$, $3'$ i posiadają wspólne ognisko F w środku podstawy stożka Γ.

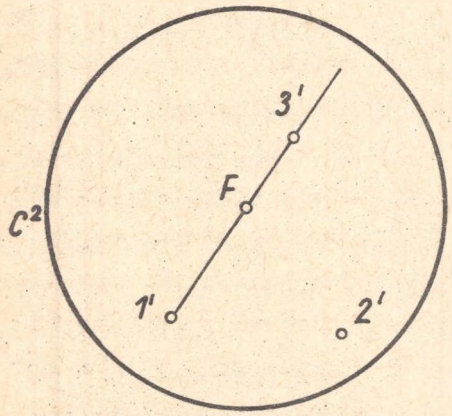
Ponieważ na skutek symetrii odpowiednie pary stożkowych wyznaczają te same rzuty otrzymujemy, że różnych rzutów będzie ogólnie licząc 4, to znaczy istnieć będą cztery różne stożkowe ookreślone ogniskiem i trójką punktów.

Przeprowadźmy analizę przypadków szczególnych.

a) Dwa dane punkty są współliniowe z ogniskiem - trzeci dowolny (rys. 4).

Z rozważania takiego przypadku wynika, że jedynie płaszczyzny 123 i $1\bar{2}3$ przecinają powierzchnię stożkową w stożkowych niezdegenerowanych, a zatem jedynie dwie stożkowe niezdegenerowane można skonstruować tak aby przechodziły przez punkty $1'$, $2'$, $3'$, a punkt F był dla nich ogniskiem.

Przyjmując, że dla stożkowej zdegenerowanej do postaci dwóch prostych każdą prostą przechodzącą przez punkt przecięcia uważać będziemy za styczną do tej stożkowej [1] podać można jako dalsze rozwiązanie parę prostych $2'F$ i $1'3'$. Zgodnie z powyższym określeniem bowiem można rozumieć, że para prostych izotropowych jest parą prostych stycznych do stożkowej zdegenerowanej, którą tworzą proste $2'F$ i $1'3'$ przynależne do zadanych trzech punktów.



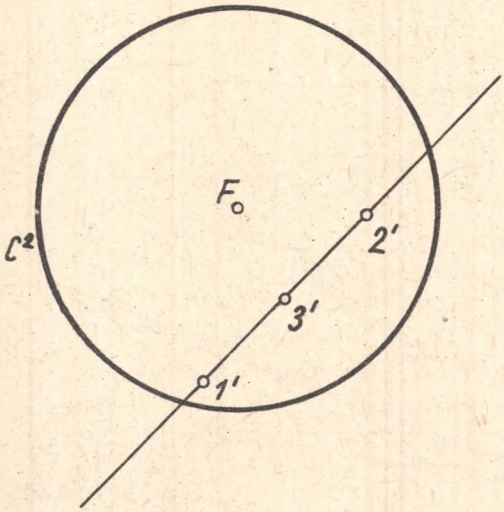
Rys. 4

Wniosek powyższy wiąże się z interpretacją przestrzenną rozważanej konstrukcji ponieważ w przypadku gdy punkty $1'3'$, F są współliniowe, płaszczyzny $\bar{1}\,2\,3$ i $1\,2\,\bar{3}$ przecinają powierzchnię stożkową Γ w tworzących. Należy jednak podkreślić, że przeprowadzone wyżej rozumowanie nie da się tutaj powtórzyć w sensie dosłownym gdyż nie istnieje kolineacja przekształcająca stożkową zdegenerowaną na niezdegenerowaną.

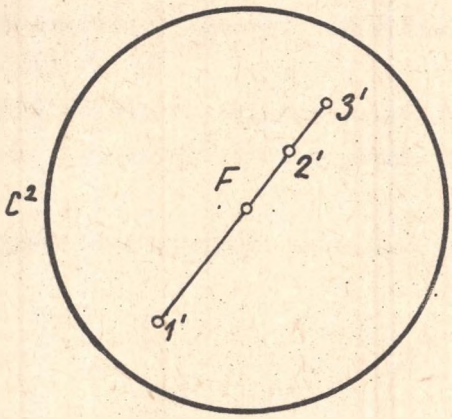
b) Trzy dane punkty $1'$, $2'$, $3'$ są współliniowe (rys. 5),

Rozważana stożkowa jest wówczas zdegenerowana, przy czym stanowi ją jedna tylko prosta $1'$, $2'$, $3'$ [2].
Tylko w takim przypadku można zgodnie z definicją ogniska uważać parę prostych izotropowych o wierzchołku F za parę prostych stycznych do stożkowej zdegenerowanej przynależnej do $1'$, $2'$, $3'$. Podobnie jak w przypadku a) można też widzieć pewną analogię w interpretacji przestrzennej (przez zrzutowanie na po-

wierzchnię Γ punktów $1'$, $2'$, $3'$ otrzymujemy dokładnie jedną hiperbolę) z uwzględnieniem jednak poruszonych wyżej zastrzeżeń.



Rys. 5



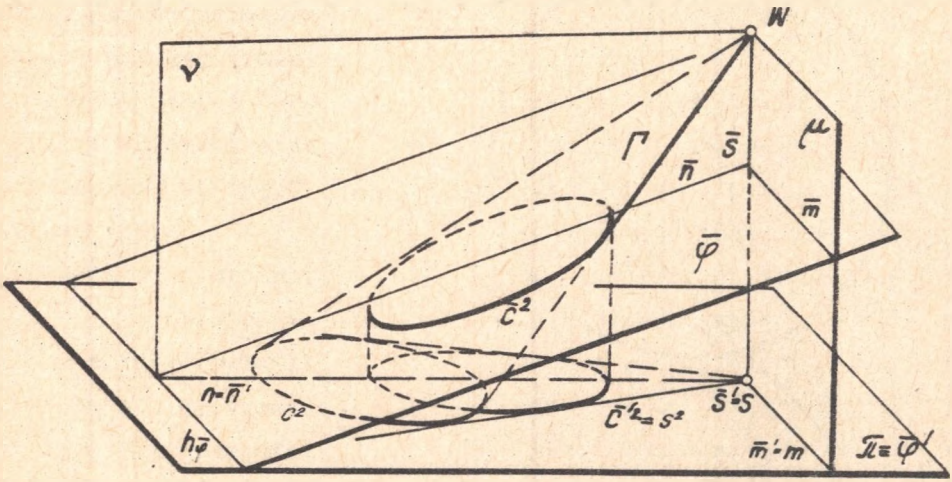
Rys. 6

Wyczerpując wszystkie przypadki stożkowych zdegenerowanych należałoby jeszcze wspomnieć o tak obranych założeniach, w których trójka danych punktów $1'$, $2'$, $3'$ jest współliniowa z punktem F. (rys. 6).

Założenie takie nie precyzuje stożkowej jednoznacznie gdyż jak wynika to z uwag powyższych nie tylko sama prosta $1'$, $2'$, $3'$, F, ale i każda inna prosta przynależna do F wraz z prostą $1'$, $2'$ $3'$, F przedstawiać mogą taką zdegenerowaną stożkową, która spełnia warunki konstrukcji.

Na końcu zwróćmy uwagę na możliwość zastosowania analogicznych rozważań w przypadku

gdy stożkowa określona jest trójką dowolnych punktów i dowolnym pękiem prostych sprzężonych.
Przykład taki przedstawiono na rys. 7.



Rys. 7

Jako utwór pomocniczy warto rozważyć w tym przypadku stożek nieobrotowy o podstawie w postaci koła i spodku wysokości zjednoczonym z środkiem pęku.
Konstrukcję realizuje się przez wykorzystanie związku kolineacji środkowej łączącej szukaną krzywą z kołem podstawy stożka Γ.
Środkiem tej kolineacji jest środek pęku prostych sprzężonych.

LITERATURA

[1] Plamitzer A. - Elementy geometrii rzutowej, Lwów 1927.

[2] Otto E. - Geometria wykreślna - Warszawa 1954.

КОНСТРУКЦИЯ КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ОПРЕДЕЛЕННОЙ
3-мя ТОЧКАМИ И ФОКУСОМ

Р е з ю м е

В работе представлено практическую конструкцию кривой второго порядка заданной 3-мя точками и фокусом. Конструкция основана на некоторых свойствах конуса вращения.

CONSTRUCTION OF A SECOND ORDER CURVE
DEFINED BY THREE POINTS AND THE FOCUS

S u m m a r y

On the basis of a right circular cones property is a practical construction of a conic definded by three points and focus discussed.