

STANISŁAW OCHOŃSKI

ROZWINIĘCIE LINII PRZEKROJU  
POBOCZNICY OSTROSŁUPA I GRANIASTOSŁUPA

W pracy tej podamy "płaską" konstrukcję rozwinięcia linii przekroju pobocznicy ostrosłupa i graniastosłupa, płaszczyzną określoną trójką niewspółliniowych punktów leżących na ścianach wielościanu.

Ponadto zakładamy, że znane jest rozwinięcie ostrosłupa (graniastosłupa) wraz z naniesioną na nie trójką punktów płaszczyzny tnącej, którą sporządzono na podstawie jego rzutów bądź niezbędnych informacji określających w sposób jednoznaczny zarówno wielościan jak również położenie trójki punktów płaszczyzny przekroju.

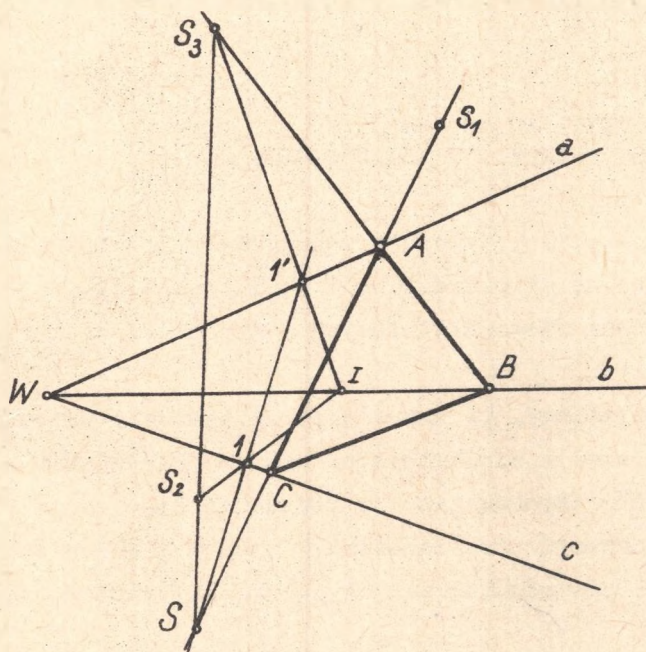
Zadanie to rozwiążemy w oparciu o znaną konstrukcję trójboku, którego wierzchołki  $A, B, C$  leżą na trzech różnych współpłaszczyznowych półprostych  $a, b, c$  o wspólnym początku  $W$ , a którego boki przechodzą przez trzy niewspółliniowe punkty  $S_1, S_2, S_3$  (1).

W celu wyznaczenia takiego trójkąta przeprowadzmy następującą konstrukcję:

Dwa spośród trzech danych punktów  $S_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) np.  $S_2$  i  $S_3$  przyjmijmy za wierzchołki dwóch perspektywicznych pęków prostych o osi perspektywiczności  $b$  (rys. 1).

Pęki te wycinają odpowiednio na pozostałych dwóch półprostych  $a$  i  $c$  perspektywiczne szeregi punktów o środku perspektywiczności  $S$  współliniowym z punktami  $S_2$  i  $S_3$ .

Punktem zjednoczonym rozważanych szeregów punktów na prostych  $a$  i  $c$  jest punkt  $W$ .



Rys. 1

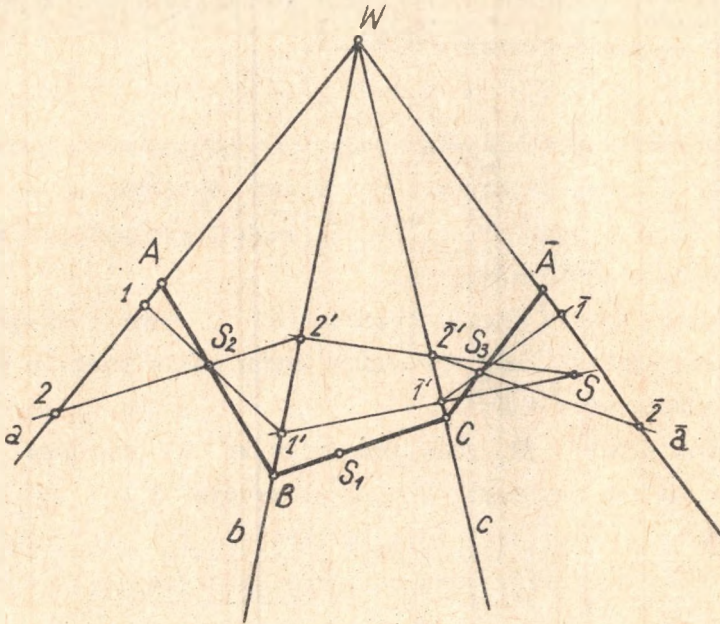
Jeżeli  $a \bar{\wedge} S_2 \frac{b}{\wedge} S_3 \bar{\wedge} c$ , to  $a \bar{\wedge} c$ .

Położenie środka perspektywiczności  $S$  szeregów  $a$  i  $c$  na prostej  $S_2 S_3$  określa dowolna para odpowiadających sobie promieni pęków  $S_2$  i  $S_3$ .

Prosta  $SS_1$  (promień pędu  $S$ ) przecina proste  $a$  i  $c$  w takich punktach  $A$  i  $C$  (parze homologicznych elementów tych szeregów), że promienie  $S_3A$  i  $S_2C$  przecinają się w punkcie  $B$  leżącym na prostej  $b$ . Tak skonstruowany trójbok  $ABC$  spełnia warunki zadania.

Założmy teraz, że znamy siatkę trójściennego ostrosłupa lub graniastosłupa, a na niej trójkę niewspółliniowych punktów płaszczyzny siecznej będących w położeniu ogólnym<sup>x)</sup>.

Konstrukcja rozwinięcia linii płaskiego przekroju wielościanu sprowadza się tutaj do wykreślenia takiej linii łamanej o wierzchołkach  $A, B, C$  i  $\bar{A}$  leżących odpowiednio na czterech różnych półprostych  $a, b, c$  i  $\bar{a}$  o wspólnym początku  $W$ , przechodzącej przez punkty  $S_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) by odcinki  $WA$  i  $W\bar{A}$  były przystające (rys. 2).



Rys. 2

W celu wykreślenia tej linii łamanej będącej rozwinięciem linii płaskiego przekroju pobocznicy ostrosłupa (graniastosłupa

<sup>x)</sup> Jeżeli dwa spośród danej trójki punktów  $S_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) leżą na jednej ścianie lub jeden z nich na krawędzi ostrosłupa (graniastosłupa), to rozwiązanie tego zadania jest trywialne (nie przedstawia żadnego problemu).

pa) przeprowadźmy następujące rozumowanie, które jak łatwo zauważyć będzie bardzo podobne do rozumowania przeprowadzonego powyżej.

Rozważmy dwa przystające i perspektywiczne szeregi punktów na prostych  $a$  i  $\bar{a}$  (wieloscian rozcięto wzdłuż krawędzi  $a$ ).

Z kolei szereg punktów  $a(1, 2, \dots)$  rzućmy z punktu  $S_2$ , a szereg punktów  $\bar{a}(\bar{1}, \bar{2}, \dots)$  z punktu  $S_3$ .

Otrzymane w ten sposób dwa pęki prostych o wierzchołkach  $S_2$  i  $S_3$  wycinają odpowiednio na prostych  $b$  i  $c$  dwa szeregi punktów, których rzutowość z łatwością stwierdzamy z utworzonego łańcucha perspektywicznych utworów.

Jeżeli  $b \bar{\bar{\lambda}} S_2 \bar{\bar{\lambda}} a \overset{O_\infty}{\bar{\lambda}} \bar{a} \bar{\bar{\lambda}} S_3 \bar{\bar{\lambda}} c$ , to  $b \bar{\bar{\lambda}} c$ .

A ponieważ punktem zjednoczonym tak otrzymanych szeregów jest punkt  $W$  (odpowiadający wierzchołkowi ostrosłupa) - szeregi punktów na prostych  $b$  i  $c$  są szeregami perspektywicznymi o środku perspektywności  $S$ .

Położenie środka perspektywności  $S$  tych szeregów wyznaczają dwie dowolne pary odpowiadających sobie punktów przystających szeregów  $a$  i  $\bar{a}$ .

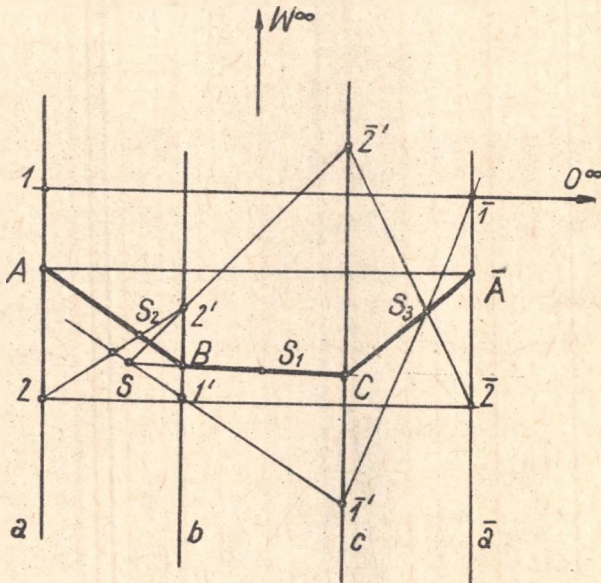
A zatem prosta  $SS_1$  jako promień pęku  $S$  przecina proste  $b$  i  $c$  w takich punktach  $B$  i  $C$ , że proste  $S_2B$  i  $S_3C$  przecinają z kolei proste  $a$  i  $\bar{a}$  w punktach  $A$  i  $\bar{A}$  będących parą homologicznych punktów przystających szeregów punktów na prostych  $a$  i  $\bar{a}$ .

A więc odcinki  $WA$  i  $W\bar{A}$  są przystające co między innymi należało spełnić.

W ten sposób skonstruowana linia łamana  $ABC\bar{A}$  spełnia warunki zadania, a tym samym jest rozwinięciem linii przekroju pobocznic tryjściennego ostrosłupa (graniastostłupa) płaszczyzną określoną trójką niewspółk liniowych punktów  $S_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

W przypadku graniastosłupa środek perspektywiczności dwóch przystających szeregów punktów na prostych  $a$  i  $\bar{a}$  ( $a \parallel \bar{a}$ ) należy przyjąć jako punkt niewłaściwy prostej prostopadłej do krawędzi bocznych graniastosłupa.

Rysunek 3 jest ilustracją konstrukcji rozwinięcia linii płaskiego przekroju pobocznicy trójsięnnego graniastosłupa.



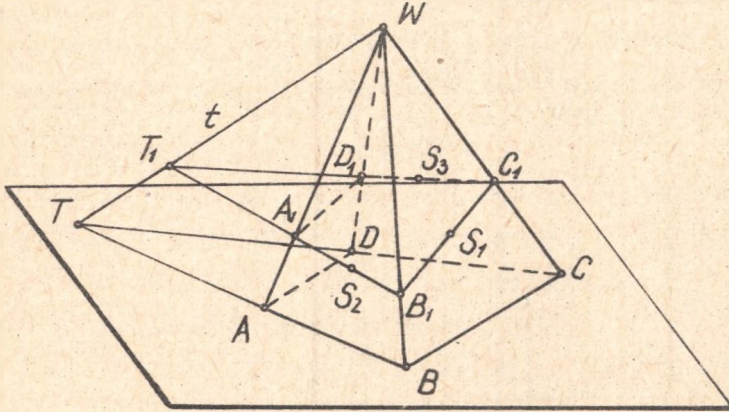
Rys. 3

Z kolei podamy konstrukcję rozwinięcia linii płaskiego przekroju pobocznicy czworosięnnego ostrosłupa i graniastosłupa.

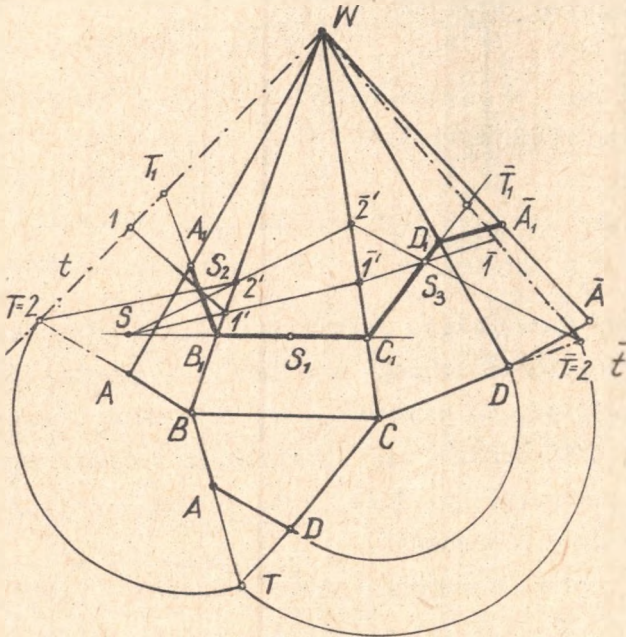
Nietrudno zauważyć, że czworosięenny ostrosłup (graniastosłup)  $ABCDW$  zastąpić można w tej konstrukcji trójsięnnym ostrosłupem (graniastosłupem) np.  $TBCW$  (rys. 4) nie deformując dwusięnnych kątów tego pierwszego.

Znając pełną siatkę czworosięnnego ostrosłupa  $ABCDW$  jesteśmy w stanie wykreślić rozwinięcie trójsięnnego ostrosłupa  $TBCW$  (rys. 5). Następnie wyznaczamy linię łamaną  $T_1B_1C_1\bar{T}_1$  będącą

rozwinieciem linii płaskiego przekroju pobocznic tryjścienne-  
go ostroskupa TBCW płaszczyzną określoną trójką niewspółli-  
niowych punktów  $S_1, S_2$  i  $S_3$ . Krawędzie WA i WD czworoscienne-



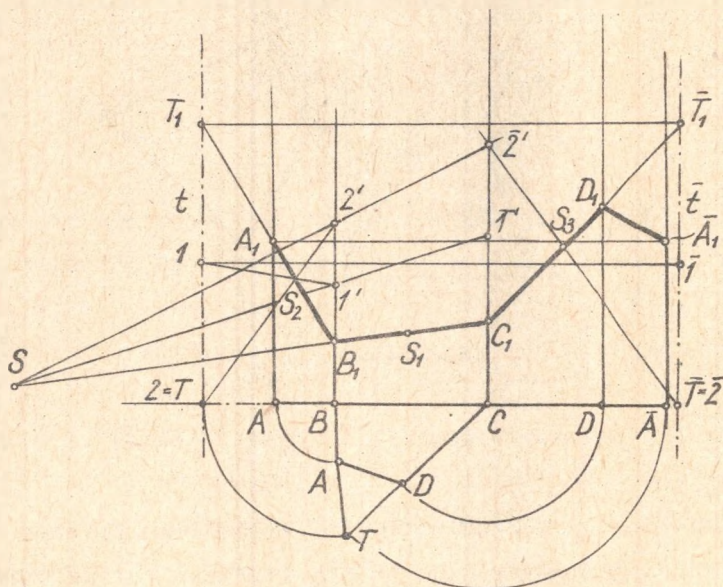
Rys. 4



Rys. 5

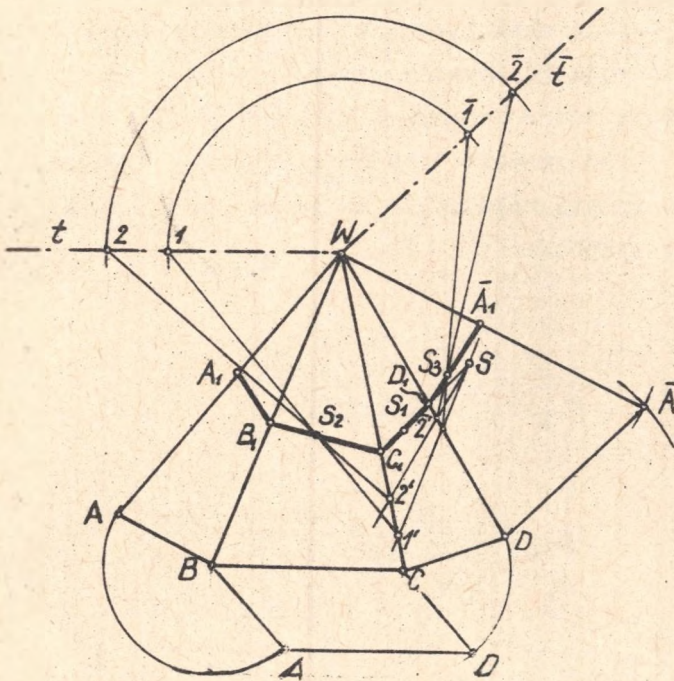
go ostroskupa  $ABCDW$  leżą odpowiednio na ścianach  $WBT$  i  $WCT$  zastępczego, trójściennego ostroskupa  $TBCW$ , a zatem boki  $T_1 B_1$  i  $\bar{T}_1 C_1$  uprzednio skonstruowanej linii łamanej  $T_1 B_1 C_1 \bar{T}_1$  przecinają rozważane krawędzie w punktach  $A_1$  i  $D_1$  będących dalszymi wierzchołkami szukanej linii płaskiego przekroju czworościennego ostroskupa. Piąty wierzchołek  $\bar{A}_1$  tej linii łamanej  $A_1 B_1 C_1 D_1 \bar{A}_1$  wyznaczamy z warunku przystawiania odcinków  $WA_1$  i  $W\bar{A}_1$ .

Na rys. 6 podano analogiczną konstrukcję rozwinięcia linii płaskiego przekroju pobocznicy czworościennego graniastoskupa. Jeżeli podstawą czworościennego ostroskupa jest równoległobok, to prosta  $t$  jako trzecia krawędź zastępczego trójściennego ostroskupa jest prostą równoległą do jednej pary boków równoległych tego równoległoboku (rys. 7).



Rys. 6

W przypadku gdy czworosieczny graniastosłup jest równoległoszczianem, lub prostopadłoszczianem prosta  $t$  jako krawędź dwóch przeciwległych ścian tego wielościanu jest prostą niewłaściwą. Z łatwością stwierdzamy, że w tym przypadku te dwa perspektywiczne i przystające szeregi  $t$  i  $\bar{t}$  jednoczą się w jeden niewłaściwy szereg punktów, którego podstawą jest prosta niewłaściwa płaszczyzny rysunku.



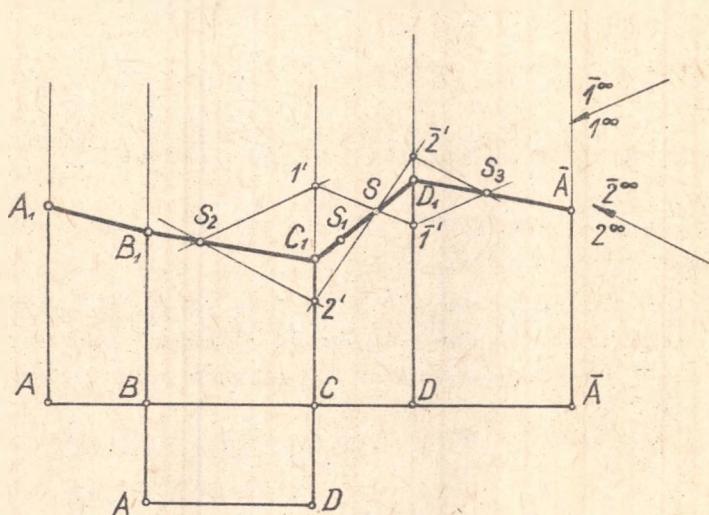
Rys. 7

A zatem w konstrukcji rozwinięcia linii płaskiego przekroju pomocniczy takiego graniastosłupa należy rozważyć niewłaściwy szereg punktów na prostej  $t^{\infty}$ , a następnie utworzyć dwa perspektywiczne pęki prostych o wierzchołkach  $S_2$  i  $S_3$  i osi perspek-



tywiczności  $t^\infty$ . Dalszy przebieg konstrukcji jest taki sam jak w przypadku czworościennego graniastosłupa.

Rysunek 8 jest ilustracją konstrukcji rozwinięcia linii płaskiego przekroju pobocznicy prostopadkościanu.



Rys. 8

Na końcu zwróćmy uwagę na możliwość wyznaczenia linii płaskiego przekroju pobocznicy wielościennego ostrosłupa lub graniastosłupa.

W przypadku gdy ilość ścian bocznych ostrosłupa (graniastosłupa) jest większa od 4, w celu znalezienia linii łamanej spełniającej warunki tematu, należy omówioną konstrukcję powtórzyć kilkakrotnie w zależności od ilości ścian bocznych wielościanu i rozmieszczenia na nich zadanej trójki punktów określającej płaszczyznę sieczną.

## LITERATURA

- [1] Kaczmarek J. - Stożkowe określone punktami i involucjami punktów, Zeszyty Naukowe "Geometria Wykreślna" nr 6, W-wa-Poznań 1969.

## РАЗВЕРТКА ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПРИЗМЫ И ПИРАМИДЫ

## Р е з ю м е

В работе рассмотрено конструкцию развертки линии пересечения плоскостей призмы и пирамиды. Задача решена для заданных на развертке боковых граней пирамиды и призмы трех точек линии сечения.

## DEVELOPMENT OF THE PYRAMIDS AND PRISMS PLANE SECTIONS

## S u m m a r y

In the paper the author gives a construction of the development of the pyramids and prisms plane sections.

The author solves the problem having three given points of the section on the development of a pyramid or of a prism.