ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1970

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 15 Nr kol. 285

JERZY LEŚ
Katedra Geometrii Wykreślnej

WARUNKI PRZYNALEŻNOŚCI DZIEWIĘCIU PUNKTÓW DO KWADRYKI

W artykule rozwiązano zagadnienie dotyczące ustalenia warunków koniecznych i wystarczających dla jednoznacznego skonstruowania kwadryki wyznaczonej przez dziewięć punktów przestrzeni P^3.

1.1. Warunek nie przynależności 9 punktów do krzywej przestrzennej rzędu 4 gatunku I

Dwie różne powierzchnie stopnia 2 mają wspólną krzywą k^4 przestrzenną rzędu 4 gatunku I. Krzywa ta jest podstawową pęku powierzchni. Przez każdy punkt przestrzeni nie leżący na krzywej k^4 przechodzi jedna powierzchnia tego pęku. Krzywa skośna rzędu 4 gat. I może degenerować się do:

1 - krzywej skośnej rzędu 3 i jej dwusiecznej;

2 - dwóch stożkowych położonych w przestrzeni w ten sposób, że mają dwa punkty wspólne;

3 - stożkowej i 2 prostych;

4 - czterech prostych.

Z powyższego wynika, że dziewięć punktów danych dowolnie w przestrzeni nie może leżeć na krzywej skośnej rzędu 4 gat. I niezdegenerowanej lub zdgenerowanej. Przed przystąpieniem do konstrukcji kwadryki musimy sprawdzić czy powyższe nie zachodzi.

Przypadek 1. Dla krzywej przestrzennej rzędu 4 gat. I niezdegenerowanej.

Niech dane będą punkty $A_1 \ldots A_9$. Przez dowolną szóstkę punktów np. $A_1 \ldots A_6$ poprowadźmy krzywą skośną rzędu 3, a przez punkt A_7 dwusieczną tej krzywej. Uzyskaliśmy w ten sposób zdegenerowaną krzywą skośną rzędu 4 gat. I, która np. z punktem A_8 określa jednoznacznie kwadrykę skośną.
Kwadrykę tę skonstruujemy w sposób następujący: przez punkt A_8 prowadzimy drugą dwusieczną tej krzywej skośnej rzędu 3, a następnie przez punkty A_1, A_2 i A_3 proste przecinające skonstruowane dwusieczne. Jeśli przez inną szóstkę punktów np. A_1, A_2, A_3, A_4, A_7, A_8 poprowadzimy drugą krzywą skośną rzędu 3 a przez punkty A_5 i A_6 dwie jej dwusieczne, po czym przez punkty A_4, A_7 i A_8 proste przecinające te dwusieczne to otrzymamy drugą kwadrykę skośną.

Przez dziewiąty punkt A_9 poprowadźmy dowolną płaszczyznę która przetnie obydwie kwadryki w stożkowych.
Jeżeli stożkowe te posiadają wspólny punkt A_9 to dziewiątka rozważanych punktów $A_1, \ldots A_9$ leży na krzywej skośnej rzędu 4 gat. I przez którą przechodzi cały pęk powierzchni.
Jeżeli natomiast powyższe nie zachodzi wówczas przez rozważaną dziewiątkę punktów przechodzi jedna i tylko jedna powierzchnia stopnia 2.

Przypadek 2. Dla krzywej przestrzennej rzędu 4 kat. I zdegenerowanej.

W przypadku tym rozważymy:

a) warunek nie przynależności 8 punktów spośród danych dziewięciu do krzywej skośnej rzędu 3,

b) warunek nie przynależności pięciu punktów spośród danych dziewięciu do płaszczyzny α i dalszych czterech do płaszczyzny β.

c) warunek nieprzynależności sześciu punktów spośród danych dziewięciu do płaszczyzny,

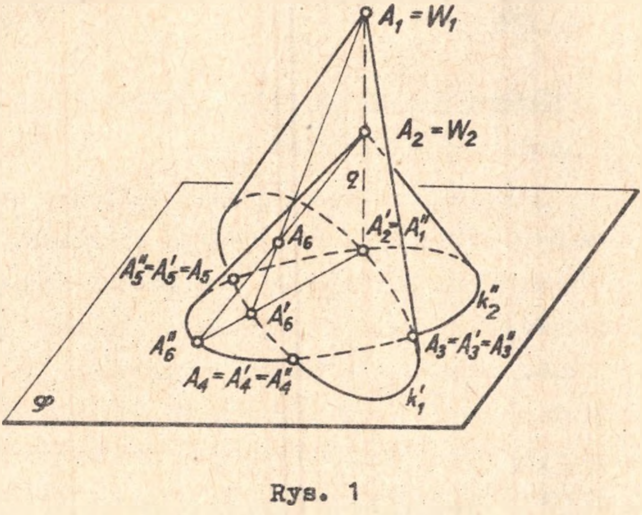
d) warunek nieprzynależności czterech punktów do prostej.

ad a)

Niech dane będą punkty $A_1 \ldots A_9$, ustalmy zestawy po osiem punktów spośród danych dziewięciu wg wzoru

$$\frac{9!}{8!(9-8)!} \qquad (1)$$

a następnie zbadajmy, każdy z nich pod kątem nieprzynależności do krzywej skośnej rzędu 3 w oparciu o konstrukcję:
Dwa dowolne punkty np. A_1 i A_2 obierzmy za wierzchołki powierzchni stożkowych Φ^2 i Ψ^2 a następnie przez punkty te i np. punkty A_3, A_4, A_5, A_6 poprowadźmy tworzące tych powierzchni (rys. 1).



Rys. 1

Z kolei przetnijmy obie te powierzchnie płaszczyzną $\varphi = A_3, A_4, A_5$ i wyznaczmy ich stożkowe przekroju.

Z rysunku odczytamy, że stożkowe te posiadają cztery punkty wspólne, a mianowicie A_3, A_4, A_5 i $A'_2 = A''_1$; a zatem przez punkt A'_6 przechodzi jedna stożkowa k'_1 a przez punkt A''_6 druga stożkowa k'_2. Linią przenikania tych dwóch powierzchni stożkowych jest krzywa rzędu 4 gat. I degenerująca się do krzywej skośnej rzędu 3 i jej dwusiecznej $q = A_1A_2$.

W celu sprawdzenia czy punkt A_7 leży na tej krzywej, a tym samym i na obu powierzchniach wystarczy rozważyć płaszczyznę $\varphi = A_7q$, która przecina powierzchnie stożkowe odpowiednio w tworzących t' i q oraz t'' i q. W przypadku przynależności punktu A_7 do krzywej rzędu 3 punkt przecięcia się tworzących t' i t'' zjednoczy się z punktem A_7. Podobnie przeprowadzimy konstrukcję w odniesieniu do punktu A_8.

Ad b) c) i d)

Wypadki te, jako elementarne do sprawdzenia, pozostawiamy bez bliższego omówienia.

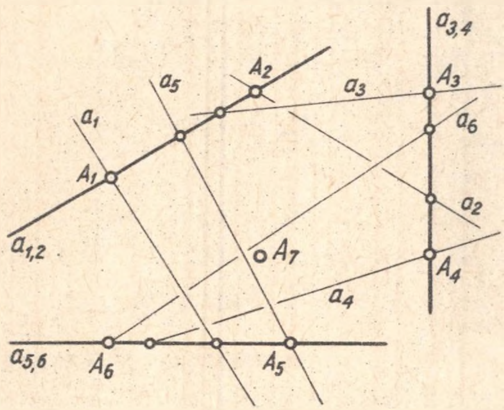
1.2. Warunek nieprzynależności ośmiu punktów spośród dziewięciu do ósemki stowarzyszonych

Dwie krzywe przestrzenne rzędu 4 gat. I leżące na jednej i tej samej kwadryce przecinają się w ośmiu punktach. Osiem punktów, które są punktami przecięcia powierzchni stopnia 2 z krzywą przestrzenną rzędu 4 gat. I na powierzchni tej nieleżącej, względnie punktami przecięcia trzech powierzchni stopnia 2 nieprzynależnych do jednego pęku powierzchni, tworzy grupę tzw. punktów stowarzyszonych.

Osiem punktów stowarzyszonych ma tę własność, że przez sześć spośród ośmiu przechodzi krzywa skośna rzędu 3, a dalsze dwa leżą na dwusiecznej tej krzywej.

Jeżeli mamy dziewięć punktów dowolnie położonych w przestrzeni, to ustalmy zestawy po osiem punktów spośród tej dziewiątki, których ilość wyliczymy ze wzoru (1).
Następnie badamy każdą ósemkę punktów czy stanowi "grupę stowarzyszoną" w oparciu o następującą konstrukcję.
Weźmy pod uwagę siedem punktów $A_1, A_2 \dots A_7$ spośród badanej ósemki. Dowolne pary punktów połączmy prostymi w ten sposób, aby proste te były skośnymi i oznaczmy je:

$$A_1A_2 = a_{1,2}, \quad A_3A_4 = a_{3,4}, \quad A_5A_6 = a_{5,6} \quad \text{(rys.2)}$$



Rys. 2

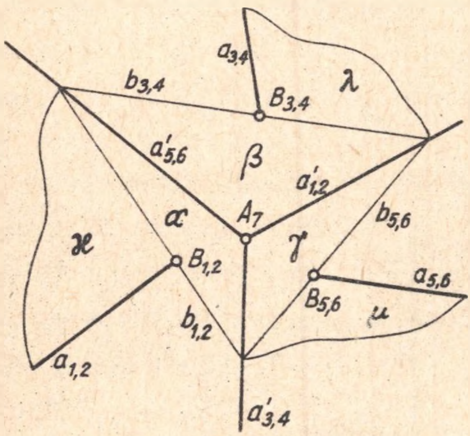
Przez punkt A_1 poprowadźmy dowolną prostą a_1 przecinającą prostą $a_{5,6}$ przez punkt A_2 prostą a_2 przecinającą prostą $a_{3,4}$, przez punkt A_3 prostą a_3 przecinającą prostą $a_{1,2}$ przez punkt A_4 prostą a_4 przecinającą prostą $a_{5,6}$, przez punkt A_5. Prostą a_5 przecinającą prostą $a_{1,2}$ przez punkt A_6 prostą a_6 przecinającą prostą $a_{3,4}$. Następnie przez punkt A_7 poprowadźmy proste: $a'_{1,2}$ - przecinającą a_1 i a_2, $a'_{3,4}$ przecinającą proste a_3 i a_4, $a'_{5,6}$ - przecinającą proste a_5 i a_6. Otrzymany tą drogą trójścian, którego wierzchołkiem jest punkt A_7, a krawędziami proste $a'_{1,2}$, $a'_{3,4}$; $a'_{5,6}$ (rys. 3).

Oznaczmy płaszczyzny

$$\alpha = a'_{3,4},\ a'_{5,6};$$

$$\beta = a'_{1,2},\ a'_{5,6},$$

$$\gamma = a'_{1,2},\ a'_{3,4},$$



Rys. 3

a następnie wyznaczmy punkty przebicia odpowiednich prostych z tymi płaszczyznami a mianowicie:

$$B_{1,2} = \alpha a_{1,2};$$

$$B_{3,4} = \beta a_{3,4};$$

$$B_{5,6} = \gamma a_{5,6}.$$

Punkty $B_{1,2}, B_{3,4}, B_{5,6}$ wyznaczają płaszczyznę φ, która przecina płaszczyzny trójścianu odpowiednio w prostych $b_{1,2}, b_{3,4}; b_{5,6}$.

Rozważmy płaszczyzny $\varkappa = a_{1,2}, b_{1,2}$, $\lambda = a_{3,4}\ b_{3,4}$; $\mu = a_{5,6}, b_{5,6}$, które przecinają się w jednym punkcie.
Jeżeli punkt ten zjednoczy się z punktem A_8, wówczas rozważana ósemka punktów stanowi grupę ośmiu punktów stowarzyszonych, przez które jak wiadomo przechodzi nieskończenie wiele krzywych skośnych rzędu 4 gat. I.

LITERATURA

[1] Coxeter H.S.M. - Wstęp do geometrii dawnej i nowej. W-wa, 1967, PWN.

[2] Reye T. - Die Geometrie der Lage, Stuttgart, 1907.

[3] Vojtech J. - Geometria Projektivni, Praha, 1932.

УСЛОВИЯ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ДЕВЯТИ ТОЧЕК ДЛЯ КВАДРИКИ

Р е з ю м е

В работе автор подаёт условия необходимые и достаточные для принадлежности девяти точек к квадрике, как и анализ условий для однозначного построения этой квадрики.

CONDITIONS OF THE AFFILIATION OF NINE POINTS
TO A PLANE OF THE SECOND ORDER

S u m m a r y

In the paper the author gives the conditions that are necessary and sufficient for the affiliation of nine points to a plane of the second order, analyzing these conditions for the unequivocal construction of such a plane.