ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1970

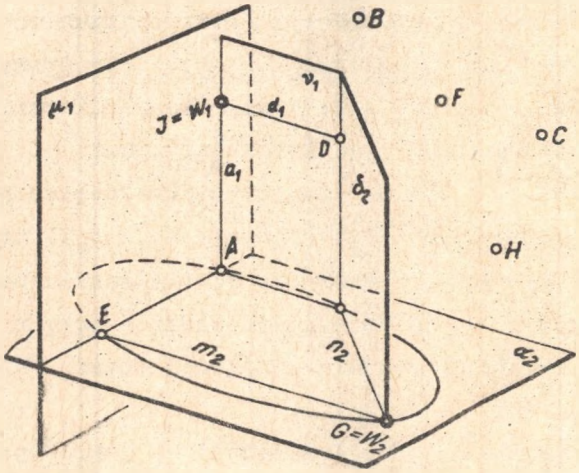
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 15 Nr kol. 285

JERZY LEŚ
Katedra Geometrii Wykreślnej

KONSTRUKCJA KWADRYKI DLA DANYCH DZIEWIĘCIU JEJ PUNKTÓW

W artykule podano konstrukcję kwadryki dla danych dziewięciu jej punktów w oparciu o korelacyjne wiązki, gdyż jak wiadomo utworem dwóch korelacyjnych wiązek (W_1) i (W_2) o różnych wierzchołkach W_1 i W_2 jest kwadryka[1].

Niechaj dane będą punkty: A,B,C,D,E,F,G,H,I, (rys. 1), które nie przynależą do krzywej przestrzennej rzędu 4 gat. I, jak również żadna ósemka nie przynależy do ósemki stowarzyszonych,



Rys. 1

a następnie żadna ósemka nie przynależy do krzywej przestrzennej rzędu 3, żadna piątka do płaszczyzny α i jednocześnie dalsze cztery do płaszczyzny β, żadna szóstka do płaszczyzny i żadna czwórka do prostej.

Za wierzchołki korelacyjnych wiązek przyjmijmy dwa dowolne punkty $I = W_1$, $G = W_2$ spośród tej dziewiątki. Niech prostej $m_2 = W_2E$ przyporządkowana będzie płaszczyzna $\mu_1 = W_1AE$, wówczas prostej $a_1 = W_1A$ przynależnej do płaszczyzny μ_1 przyporządkowana będzie płaszczyzna $\alpha_2 = W_2AE$. Prostą a_1 i płaszczyznę α_2 uważać będziemy za elementy homologiczne wiązek (W_1) i (W_2).

W identyczny sposób powiążemy następne punkty a mianowicie: prostej $h_2 = W_2H$ przyporządkowana jest płaszczyzna $\eta_1 = W_1BH$, prostej $b_1 = W_1B$ przynależnej do płaszczyzny η_1 przyporządkowana jest płaszczyzna $\beta_2 = W_2BH$, prostej $f_2 = W_2F$ przyporządkowana jest płaszczyzna $\varphi_1 = W_1CF$, prostej $c_1 = W_1C$ przynależnej do płaszczyzny φ_1 przyporządkowana jest płaszczyzna $\gamma_2 = W_2CF$.

Zauważmy, że dla konstrukcji wyżej wymienionych homologicznych elementów a_1 i α_2, b_1 i β_2, c_1 i γ_2 wykorzystaliśmy osiem punktów. Brakującą parę elementów a mianowicie α_1 i δ_2 skonstruujemy wykorzystując dziewiąty punkt D.

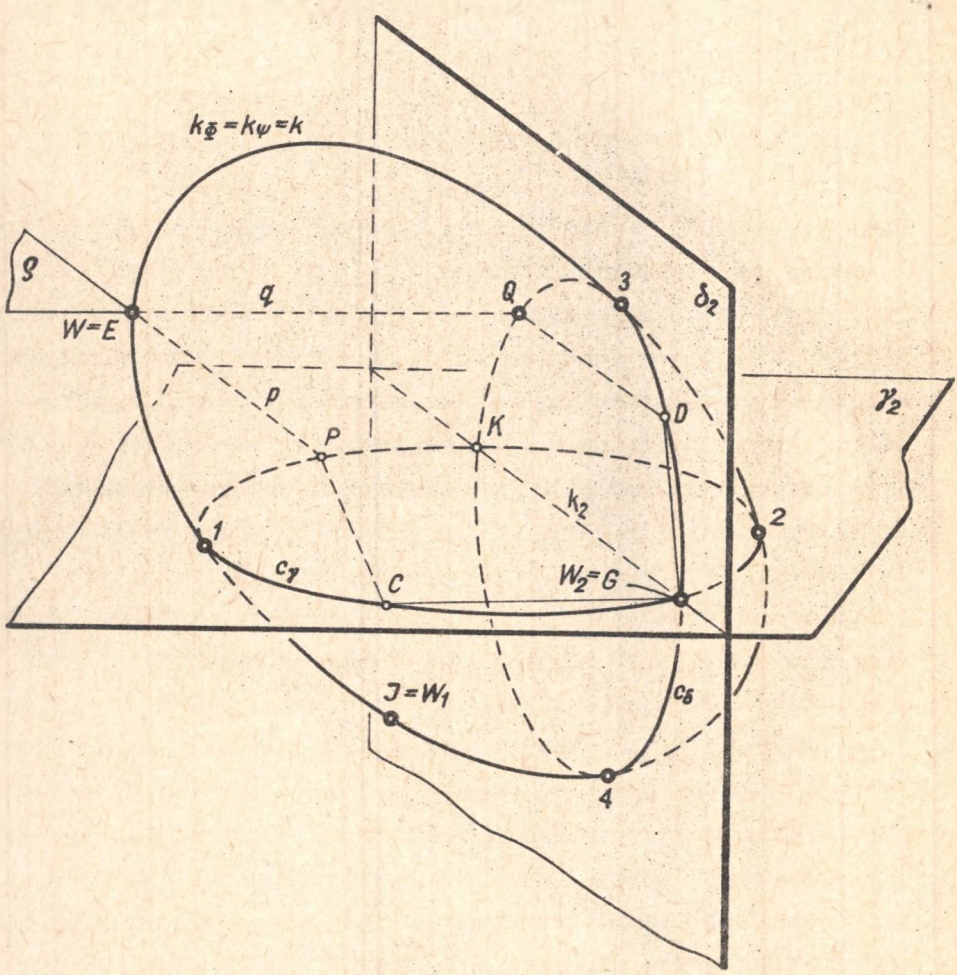
Płaszczyznie $\nu_1 = a_1D$ przyporządkowana jest prosta n_2 przynależna do płaszczyzny α_2. Prostej $d_1 = W_1D$ przynależnej do płaszczyzny ν_1 przyporządkowana jest płaszczyzna $\delta_2 = n_2D$.

Wykazaliśmy, że dla dziewięciu punktów danych dowolnie w przestrzeni ustalona została korelacja wiązek (W_1) i (W_2), których utworem jest kwadryka.

Z kolei wykażemy, że wierzchołki W_1 i W_2 tych wiązek nie są wcale punktami charakterystycznymi kwadryki Φ^2.

Weźmy pod uwagę dowolny punkt $W = E$ tej kwadryki i ustanówmy pomiędzy wiązkami (W_2) i (W) taką korelację aby utworem

tych wiązek była ta sama kwadryka Φ^2 (rys. 2). Dwie dowolne płaszczyzny γ_2 i δ_2 wiązki (W_2), które nie przechodzą przez punkty W i W_1 przetną daną kwadrykę w dwóch stożkowych c_γ i c_δ.



Rys. 2

Stożkowe te przechodzą przez punkty W_2 i K, gdzie $K = k_2 \cdot \mathcal{H}_1$ jest punktem przecięcia prostej $k_2 = \gamma_2 \delta_2$ homologiczną płaszczyzną $\mathcal{H}_1 = c_1 d_1$. Płaszczyzna ϱ przechodząca przez prostą WK,

a nie przechodząca przez punkty W_1 i W_2 przecina stożkowe c_γ i c_δ odpowiednio w punktach P i Q. Punkty K,C... stożkowej c_γ rzucone z punktów W_2 i P i z prostej p = WP oraz punkty K,D... stożkowej c_δ rzucone z punktów W_2 i Q i z prostej q= = WQ tworzą rzutowe pęki:

$$W_2(k_2, W_2C\ldots) \barwedge P(PK, PC\ \ldots) \barwedge p(\varrho\ ,\ pC\ldots)$$

$$W_2(k_2 . W_2D\ldots) \barwedge Q(QK, QD\ \ldots) \barwedge q(\varrho\ ,\ qD\ldots)$$

Prostej $k_2 = \gamma_2\ \delta_2$ wiązki (W_2) przyporządkowana jest płaszczyzna $\varrho = pq$ wiązki (W).

Dwie pary rzutowych pęków:

$$W_2(k_2, W_2C\ldots) \barwedge p(\varrho, pC\ldots) \text{ i } W_2(k_2D\ldots) \barwedge q\ (\varrho,\ q\ D\ \ldots)$$

wyznaczają jedną i tylko jedną korelację pomiędzy wiązkami (W) i (W_2), których utworem jest kwadryka ψ^2 przechodząca przez stożkowe c_γ i c_δ.

Wykażemy, że kwadryki Φ^2 i ψ^2 przechodzące przez stożkowe c_γ i c_δ oraz przez punkt W - są identyczne.

Dowolna płaszczyzna φ przechodząca przez punkty W_1 i W przecina kwadryki Φ^2 i ψ^2 w tej samej stożkowej $k_\Phi = k_\psi = k$, gdyż stożkowe te mają wspólny punkt W i cztery dalsze 1 i 2 oraz 3 i 4 leżące odpowiednio na stożkowych c_γ i c_δ, zatem punkt W_1 kwadryki Φ^2 leży na kwadryce ψ^2.

Niechaj będzie dana wspólna stożkowa obu kwadryk przechodząca przez punkty W_1 i W a nie przechodząca przez punkt W_2 oraz dowolny punkt X leżący na jednej z kwadryk. Płaszczyzna W_1XW_2 przecina kwadryki Φ^2 i ψ^2 odpowiednio w stożkowych c_Φ i c_ψ które przechodzą przez punkty W_1 i W_2 oraz przez punkty przecięcia stożkowych c_γ, c_δ i k płaszczyzną W_1XW_2.

Ponieważ stożkowa c_Φ jest identyczna ze stożkową c_Ψ, więc punkt X kwadryki Φ^2 jest również punktem kwadryki Ψ^2, czyli $\Phi^2 = \Psi^2$.

Przecinając korelacyjne wiązki (W_1) i (W_2) dowolną płaszczyzną ω nie przechodzącą przez punkty W_1 i W_2 otrzymamy dwa układy płaskie (ω_1) i (ω_2) o wspólnej płaszczyźnie podstawowej (ω). Elementami homologicznymi tych układów będą:

$$\bar{A}_1 = a_1\omega \text{ i } \bar{a}_2 = \alpha_2\omega, \quad \bar{B}_1 = b_1\omega \text{ i } \bar{b}_2 = \beta_2\omega$$

$$\bar{C}_1 = c_1\omega \text{ i } \bar{c}_2 = \gamma_2\omega, \quad \bar{D}_1 = d_1\omega \text{ i } \bar{d}_2 = \delta_2\omega$$

Każdemu punktowi $\bar{X}_1$ układu (ω_1) przyporządkowana jest jedna i tylko jedna prosta $\bar{x}_2$ w układzie (ω_2). Prostej $\bar{x}_1 = \bar{X}_1W_1$ wiązki (W_1) przyporządkowana jest płaszczyzna $\xi_2 = \bar{x}_2W_2$ wiązki (W_2). Punkt X przecięcia prostej $\bar{x}_1$ płaszczyzną ξ_2 jest punktem kwadryki. Każdej prostej $\bar{z}_1$ układu (ω_1) przyporządkowany jest jeden i tylko jeden punkt $\bar{Z}_2$ w układzie (ω_2).

Szeregowi punktów $\bar{z}_1$ $(\bar{P}_1, \bar{Q}_1, \bar{R}_1, \ldots)$ przyporządkowany jest pęk prostych $\bar{Z}_2(\bar{p}_2, \bar{q}_2, \bar{r}_2, \ldots)$. Pękowi prostych (W_1) $W_1(W_1\bar{P}_1, W_1\bar{Q}_1, W_1\bar{R}_1 \ldots)$ przyporządkowany jest pęk płaszczyzn $W_2\bar{Z}_2(W_2\bar{p}_2, W_2\bar{q}_2, W_2\bar{r}_2 \ldots)$.

Płaszczyzna $W_1\bar{z}_1$ przecina pęk płaszczyzn (W_2Z_2) w pęku prostych (Z) który wraz z rzutowym do niego pękiem prostych (W_1) tworzy stożkową przekroju kwadryki płaszczyzną $W_1\bar{z}_1$.

Prosta $t_1 = s_2$ łącząca wierzchołki korelacyjnych wiązek (W_1) i (W_2) przetnie płaszczyznę ω w punktach $\bar{T}_1 = \bar{S}_2$. Punktowi $\bar{T}_1$ zaliczonemu do układu (ω_1) lub punktowi $\bar{S}_2$ zaliczonemu do układu (ω_2), przyporządkowane będą odpowiednio proste $\bar{t}_2$ w układzie (ω_2) i prosta $\bar{s}_1$ w układzie (ω_1).

Płaszczyzny $\sigma_1 = W_1\bar{s}_1$ i $\tau_2 = W_2\bar{t}_2$, są płaszczyznami stycznymi do kwadryki w jej punktach W_1 i W_2.

1. Kwadryki o punktach hiperbolicznych, parabolicznych, eliptycznych i zdegenerowane

Rozważmy dwa rzutowe szeregi punktów o wspólnej podstawie $\bar{t}_2$. Elementami homologicznymi tych szeregów będą: $1_2, 2_2, 3_2$ oraz $\bar{1}_2, \bar{2}_2, \bar{3}_2$ które znajdziemy w sposób następujący:

Płaszczyzny $\varepsilon_1 = t_1E$, $\eta_1 = t_1H$ $\varphi_1 = t_1F$ pęku $t_1(\varepsilon_1, \eta_1, \varphi_1, \ldots)$, przecinają płaszczyznę ω w prostych e_1, h_1, f_1 pęku $\bar{T}_1(e_1, h_1, f_1 \ldots)$. Proste pęku $\bar{T}_1$ przetną prostą $\bar{t}_2$ w punktach: $1_2 = e_1\bar{t}_2$, $2_2 = h_1\bar{t}_2$, $3_2 = f_1\bar{t}_2$. Pękowi prostych $(\bar{T}_1)$ układu (ω_1) przyporządkowany jest szereg punktów $\bar{t}_2(\bar{1}_2, \bar{2}_2, \bar{3}_2, \ldots)$ w układzie (ω_2).

Wiadomo, że takie dwa rzutowe szeregi punktów o wspólnej podstawie mają elementy zjednoczone.

a) rzeczywiste i różne od siebie,

b) rzeczywiste i zjednoczone,

c) urojone sprzężone.

Rzucając szeregi $\bar{t}_2(1_2, 2_2, 3_2, \ldots)$ i $\bar{t}_2(\bar{1}_2, \bar{2}_2, \bar{3}_2 \ldots)$ z punktu W_2 otrzymamy dwa rzutowe pęki prostych o wspólnym wierzchołku W_2 przynależne do płaszczyzny stycznej $\tau_2 = \bar{t}_2W_2$, które mają również elementy zjednoczone wymienione od a-c.

Analogiczne rozważania przeprowadzić możemy w odniesieniu do płaszczyzny σ_1 stycznej w punkcie W_1.

Zatem: jeśli kwadryka posiada w dwóch różnych punktach W_1 i W_2 elementy zjednoczone wymienione pod a, b, c, to punkty te są odpowiednio:

1) punktami hiperbolicznymi,

2) punktami parabolicznymi,

3) punktami eliptycznymi.

W przypadku gdy elementy homologiczne dwóch rzutowych pęków prostych (W_2) lub (W_1) będą pokrywać się, wówczas kwadryka degeneruje się do dwóch płaszczyzn, a mianowicie do płaszczyzn $\tau_2 = \bar{t}_2 W_2$ i $\sigma_1 = \bar{s}_1 W_1$.

Jeżeli punkt rzeczywisty W_2 lub W_1 kwadryki Φ^2 jest punktem:

1) hiperbolicznym,
2) parabolicznym,
3) eliptycznym,

a płaszczyzna τ_2 względnie σ_1 płaszczyzną styczną w punkcie W_2 lub W_1 do kwadryki, to wówczas każda prosta rzeczywista leżąca na płaszczyznie τ_2 lub σ_1 i nie przechodząca przez punkt W_2 lub W_1 jest w przypadku:

1) prostą sieczną,
2) prostą styczną,
3) prostą zewnętrzną.

w odniesieniu do kwadryki Φ^2,

Jeżeli kwadryka posiada jeden rzeczywisty punkt 1) hiperboliczny, 2) paraboliczny, 3) eliptyczny, to wówczas wszystkie rzeczywiste punkty tej kwadryki są odpowiednio punktami hiperbolicznymi, parabolicznymi, eliptycznymi.

W przypadku 1 przez punkt np. W_2 kwadryki przechodzą dwie różne od siebie proste rzeczywiste (tworzące) p i q. Przez dowolny punkt rzeczywisty X kwadryki nie przynależny do prostych p i q prowadzimy płaszczyznę $\pi = Xp$ i $\psi = Xq$. Płaszczyzny te przetną kwadrykę w dwóch stożkowych c_π i c_ψ, które w tym wypadku degenerują się odpowiednio do dwóch prostych $c_\pi = p\bar{p}$ i $c_\psi = q\bar{q}$. Punkt X leży na stożkowych zdegenerowanych, dlatego musi być punktem przecięcia się prostych p i q.

Zatem punkt X jest punktem hiperbolicznym kwadryki.

W przypadku 2) przez punkt np. W_2 kwadryki przechodzą dwie rzeczywiste proste (tworzące) p i q zjednoczone. Przez dowolny punkt rzeczywisty X kwadryki nie przynależny do prostych p = q prowadzimy płaszczyzny $\pi = Xp$ i $\psi = Xq$, które jednoczą się. Stożkowe przekroju c_π i c_ψ również zjednoczą się na wspólnej płaszczyznie a tym samym tworzące p i q zjednoczą się na wspólnej prostej p = q. Ponieważ punkt X leży na zjednoczonych stożkowych c_π i c_ψ, jest więc punktem parabolicznym kwadryki.

W przypadku 3) zakładamy, że np. punkt W_2 kwadryki jest punktem eliptycznym. Obieramy na kwadryce dowolny rzeczywisty punkt X, gdyby punkt X był punktem hiperbolicznym lub parabolicznym, to na podstawie powyższych rozważań punkt X musiałby być punktem hiperbolicznym lub parabolicznym kwadryki. Ponieważ dochodzimy do sprzeczności z założeniem, więc punkt X jest punktem eliptycznym kwadryki.

2. Dalszy podział kwadryk

Niechaj płaszczyzna styczna τ_2 w punkcie W_2 przecina kwadrykę w dwóch zjednoczonych tworzących p=q. Każdy punkt prostej p=q jest punktem styczności płaszczyzny τ_2 z kwadryką. Przez dowolny punkt X kwadryki nie przynależny do prostej p=q poprowadźmy płaszczyznę $\pi = Xp$, która przecina kwadrykę w stożkowej c_π. Stożkowa c_π degeneruje się do dwóch prostych p i $\bar{p}$. Tworząca $\bar{p}$ przechodząca przez punkt X przecina tworzącą p w punkcie $S = p\bar{p}$. Obierzmy następnie dowolny punkt Y kwadryki i poprowadzmy dwie płaszczyzny $\alpha = Yp$ i $\beta = Y\bar{p}$. Płaszczyzny te przetną kwadrykę w stożkowych zdegenerowanych $c_\alpha = pa$, $c_\beta = pb$. Ponieważ punkt wspólny Y stożkowych c_α i c_β nie leży na prostych p i $\bar{p}$, jest więc punktem Y = ab.

Z omówionego pod 1) przypadku wynika, że płaszczyzna ab jest styczna w punkcie Y do kwadryki, a z omówionego pod 2) przypadku wynika, że Y = ab jest punktem parabolicznym kwadryki, dlatego proste a i b jednoczą się na prostej a=b. Prostę p i a przynależą do płaszczyzny α a proste p i b do płaszczyzny β, więc proste $\bar{p}$ i a oraz $\bar{p}$ i b są prostymi przecinającymi się. Przecięcie wymienionych prostych jest możliwe jeżeli prosta a = b przechodzi przez punkt S = $p\bar{p}$.
Wykazaliśmy, że przez dowolny punkt Y kwadryki przechodzi tworząca a = b = SY tej kwadryki. Stąd wnosimy, że przez punkty $Y, Y_1 \ldots$ kwadryki przechodzą tworzące SY, $SY_1 \ldots$ przecinając się w jednym punkcie S.

Jeśli S jest punktem właściwym, wówczas kwadryka jest powierzchnią stożkową, jeśli S jest punktem niewłaściwym, kwadryka jest powierzchnią walcową. Powierzchnie stożkowe i walcowe są kwadrykami zniekształconymi.

Ponieważ każda płaszczyzna ρ styczna do kwadryki w jej punkcie rzeczywistym R przecina kwadrykę w dwóch prostych (tworzących) p i q, dlatego:

1) kwadryka o punktach hiperbolicznych posiada nieskończenie wiele prostych tworzących rzeczywistych,
2) kwadryka o punktach eliptycznych nie posiada wcale żadnych prostych tworzących rzeczywistych.

Kwadryki te są kwadrykami niezniekształconymi.
W przypadku 1) na którejkolwiek prostej tworzącej p lub q kwadryki obierzmy szereg punktów $P, P_1, P_2, \ldots$ lub $Q, Q_1, Q_2, \ldots$ a następnie poprowadźmy w tych punktach płaszczyzny styczne $\pi, \pi_1, \pi_2 \ldots$ lub $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \ldots$ do kwadryki. Płaszczyzny te przetną kwadrykę w prostych $p\bar{p}$, $p\bar{p}_1$, $p\bar{p}_2, \ldots$ lub $q\bar{q}, q\bar{q}_1, q\bar{q}_2, \ldots$. Proste np. $\bar{p}, \bar{p}_1, \bar{p}_2$ muszą być prostymi skośnymi. Gdyby np. $\bar{p}$ i $\bar{p}_1$ przecinały się w punkcie P, to płaszczyzna $WW_1P = p\bar{p} = p\bar{p}_1 = \pi = \pi_1$ by-

łaby płaszczyzną styczną w dwóch różnych punktach $W = p\bar{p}$ i $W_1 = p\bar{p}_1$ do kwadryki oraz przecinałaby ją w trzech prostych p, $\bar{p}$ i $\bar{p}_1$ co jest niemożliwe.

W tym przypadku kwadryka jest kwadryką prostokreślną skośną.

W przypadku 2) kwadryka jest kwadryką krzywokreślną.

Inny podział kwadryk niezniekształconych otrzymamy jeżeli zbadamy ich położenie względem płaszczyzny niewłaściwej ω^{∞}.

Dowolna płaszczyzna ε w odniesieniu do kwadryki prostokreślnej skośnej może być tylko:

a) płaszczyzną sieczną,

b) płaszczyzną styczną.

Płaszczyzna ε nie może być płaszczyzną zewnętrzną, gdyż przecina poszczególne tworzące tej kwadryki w punktach rzeczywistych.

Jeżeli płaszczyzna niewłaściwa ω^{∞} jest w odniesieniu do kwadryki prostokreślnej skośnej płaszczyzną:

a) sieczną,

b) styczną

to kwadryka jest odpowiednio:

a) hiperboloidą jednopowłokową,

b) paraboloidą hiperboliczną.

Dowolna płaszczyzna ε w odniesieniu do kwadryki krzywokreślnej może być:

a) płaszczyzną sieczną,

b) płaszczyzną styczną,

c) płaszczyzną zewnętrzną.

Jeżeli płaszczyzna niewłaściwa ω^{∞} jest w odniesieniu do kwadryki krzywokreślnej płaszczyzną:

a) sieczną,

b) styczną,

c) zewnętrzną

to kwadryka jest odpowiednio:

a) hiperboloidą dwupowłokową,

b) paraboloidą eliptyczną,

c) elipsoidą.

LITERATURA

[1] Seydewitz - Archiv Grunerta IX, 1847.

[2] Pascal E. - Repetytorium Matematyki Wyższej. W-wa 1901.

[3] Plamitzer A. - Geometria Rzutowa. W-wa 1938.

[4] Vojtech J. - Geometria Projektivni. Praha 1932.

[5] Leś J. - Warunki przynależności dziewięciu punktów do kwadryki (w druku).

КОНСТРУКЦИЯ КВАДРИКИ ДЛЯ ДАННЫХ ДЕВЯТИ ЕЁ ТОЧЕК

Р е з ю м е

В работе автор представил конструкцию квадрики для данных девяти её точек, спираясь на коррелятивные связки.

THE CONSTRUCTION OF A PLANE OF THE SECOND ORDER
FOR ITS NINE GIVEN POINTS

S u m m a r y

In this paper the author describes the construction of a plane of the second order, nine of its points being given, basing on the correlational pencils of straights and planes.