ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1970

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 15 Nr kol. 285

JERZY LEŚ
Katedra Geometrii Wykreślnej

O PEWNEJ KONSTRUKCJI POWIERZCHNI DRUGIEGO STOPNIA

Celem niniejszej publikacji jest podanie konstrukcji prostokreślnej powierzchni drugiego stopnia, określonej dowolną prostą t oraz nie przynależnymi do niej punktami A,B,C,D,E,F, z których żadna czwórka nie jest współpłaszczyznowa.

Zagadnienie to rozwiążemy konstruując krzywą przestrzenną k^3 stopnia trzeciego i jej odpowiednią sieczną.

W tym celu rzućmy punkty A,B,C,E z prostej t. Otrzymamy wówczas pęk płaszczyzn t(A,B,C.E).

Z kolei rzućmy np. z punktu D punkty A,B,C,E. Otrzymamy wiązkę prostych D (A,B,C,E). Przetnijmy następnie owe utwory płaszczyzną ω = A B E.

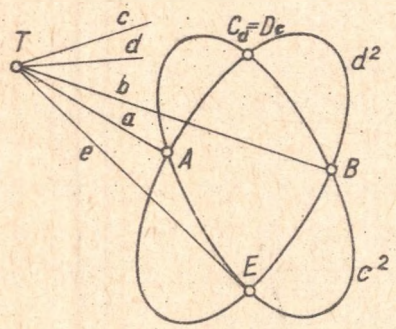
W wyniku przecięcia otrzymamy pęk prostych T(a,b,c,e) i układ płaski punktów A,B,C_d, E.

Przez punkty A,B,C_d,E poprowadźmy stożkową d^2 o określonej wartości dwustosunku (a,b,c,e). Jeżeli rzucimy stożkową d^2 z punktu D, to otrzymamy powierzchnię stożkową Φ^2.

Analogicznie, rzućmy punkty A,B,D,E z prostej t oraz z punktu C. Następnie przetnijmy otrzymane utwory tą samą płaszczyzną ω = A B E otrzymamy wówczas T(a,b,d,e) oraz A,B, D_c, E. Przez punkty A, B, D_c, E poprowadźmy stożkową C^2 o określonej wartości dwustosunku (a, b, d, c) (rys. 1).

Jeżeli rzucimy stożkową C^2 z punktu C, otrzymamy powierzchnię stożkową Ψ^2.

Powierzchnie Φ^2 i Ψ^2 przenikają się w krzywej przestrzennej stopnia 4 gat. I, która degeneruje się do krzywej przestrzennej k^3 stopnia 3 i jej dwusiecznej CD = r.



Rys. 1

Poprowadźmy następnie płaszczyznę rF = ϱ. Płaszczyzna ta przecina powierzchnie Φ^2 i Ψ^2 (poza r = CD) odpowiednio w tworzących s i s_1, które z kolei przecinają się w punkcie S. Punkt S jest punktem krzywej przestrzennej stopnia 3, w którym płaszczyzna ϱ przecina krzywą poza punktami CiD.

Wykażemy, że prosta t jest dwusieczną krzywej k^3 przestrzennej stopnia 3, określonej punktami A, B, C, D, E i S. W tym celu weźmy pod uwagę łańcuch utworów perspektywicznych

$$t(A, B, C \ldots) \overline{\overline{\wedge}} k^3 (A, B, C \ldots) \overline{\overline{\wedge}} SD(A, B, C \ldots)$$

z którego wynika

$$t(A, B, C \ldots) \overline{\wedge} SD(A, B, C \ldots)$$

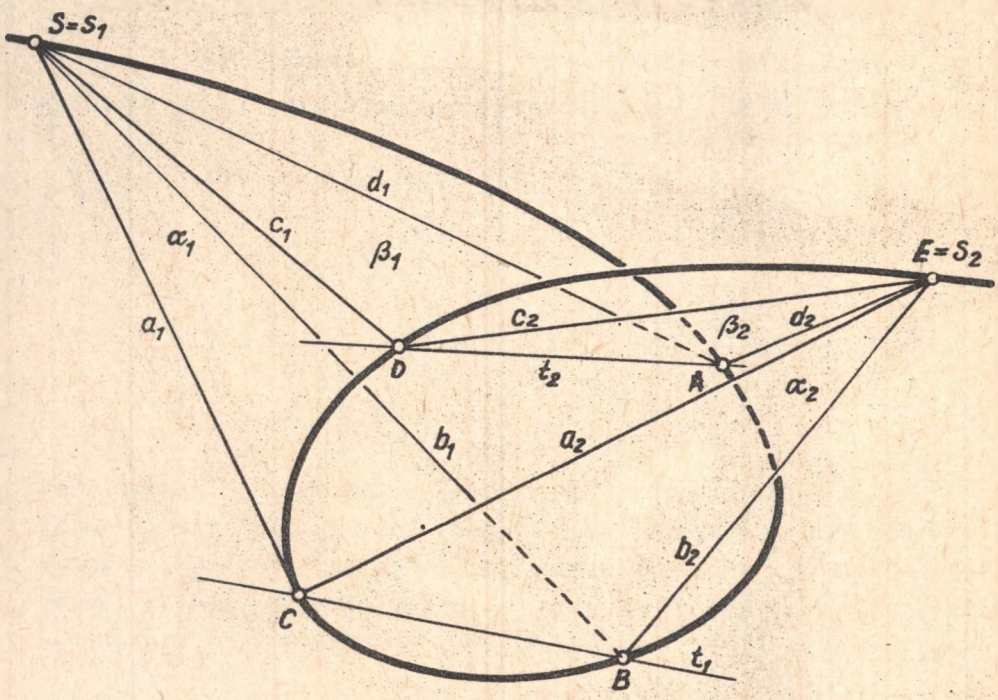
Wiadomo, że utworem tych rzutowych pęków płaszczyzn o osiach skośnych t i SD jest kwadryka skośna Ω^2 dla której osie tych pęków są tworzącymi należącymi do tej samej rodziny prostych skośnych, a tym samym dwusiecznymi rozważanej krzywej k^3. Z kolei łącząc punkty S i F otrzymamy prostą q, która jest sieczną rozważanej krzywej k^3.

Jeżeli przez punkty prostej q za wyjątkiem punktu S skonstruujemy dwusieczne krzywej k^3, to otrzymamy poszukiwaną kwarykę.

Na zakończenie podamy konstrukcję dwusiecznej krzywej przestrzennej stopnia 3 jako utworu dwóch kolineacyjnych wiązek środkowych (S_1) i (S_2). Z definicji wynika, że krzywa przestrzenna stopnia 3 określona jest sześcioma punktami, pięcioma punktami i dwusieczną, trzema punktami i trzema dwusiecznymi, dwoma punktami i czterema dwusiecznymi. Dwa punkty np. S i E przyjmiemy za wierzchołki wiązek (S_1) i (S_2) i ustalimy ich kolineację czterema parami prostych:

$a_1 = S_1C$ i $a_2 = S_2C$; $b_1 = S_1B$ i $b_2 = S_2B$, $c_1 = S_1D$

i $c_2 = S_2D$; $d_1 = S_1A$ i $d_2 = S_2A$ (rys. 2).



Rys. 2

Homologiczne płaszczyzny $\alpha_1 = a_1b_1$ i $\alpha_2 = a_2b_2$, $\beta_1 = c_1d_1$ i $\beta_2 = c_2d_2$ ... kolineacyjnych wiązek (S_1) i (S_2) przetną się odpowiednio w ∞^2 dwusiecznych t_1, t_2 ... krzywej k^3 skośnej stopnia 3.

Przez dany punkt Q nie leżący na krzywej skośnej stopnia 3, skonstruujemy dwusieczną krzywej k^3 w sposób następujący: Wyznaczamy krawędzie płaszczyzn $r_1 = \alpha_1 \beta_1$ i $r_2 = \alpha_2 \beta_2$; proste r_1 i r_2 są siecznymi krzywej k^3. Krawędź t płaszczyzn $\varepsilon_1 = r_1 Q$ i $\varepsilon_2 = r_2 Q$ jest dwusieczną krzywej przestrzennej k^3 stopnia 3.

LITERATURA

[1] Reye T. - Die Geometrie der Lage, Stuttgart 1907.

[2] Ślusarczyk B. - Rzut krzywoliniowy stopnia 3 Z.N. Geom.Wykreślna. W-wa 1964.

[3] Vojtech J. - Geometria Projektivni - Praha 1932.

О НЕКОТОРОЙ КОНСТРУКЦИИ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Р е з ю м е

В работе представлено конструкцию прямолинейной квадрики определённой шестью точками и прямой. Через данные пять точек конструируем пространственную кривую третьего порядка, а затем доказывает автор, что прямые это её биссектрисы. Кривая третьего порядка её биссектриса и шестая точка определяют квадрику.

ABOUT A CERTAIN CONSTRUCTION OF A PLANE OF THE SECOND ORDER

S u m m a r y

The paper discusses the construction of a rectilinear plane of the second order, which is defined by six points and a straight line. Through five given points a spatial curve of the third order is constructed, after which it may be shown that the straight line is its bisector. The curve of the third order, its bisector and the sicth point determine the plane of the second order.