ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1970

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 15 Nr kol. 285

JÓZEF SZPILECKI
Katedra Fizyki B

O PEWNYCH WŁASNOŚCIACH MACIERZOWEJ FUNKCJI WYKŁADNICZEJ

Streszczenie. W pracy przedyskutowano w przypadku szeregu typów równań różniczkowych macierzowych pierwszego rzędu i różnych typów macierzy współczynników, własności macierzowej funkcji wykładniczej, wykorzystując częściowo wyniki innych autorów, w celu zastosowania do zagadnienia stateczności rozwiązań.

1. Wstęp

W pracy "Stateczność układów impulsowych o zmiennych parametrach" w celu zbadania stateczności rozwiązań pewnych macierzowych równań różniczkowych pierwszego rzędu rozpatrzono własności macierzowej funkcji wykładniczej dla różnych typów tych równań, w których rozwiązaniu ta funkcja występuje. Ze względu na dużą objętość pracy, materiał jej podzielono i zagadnienie to opracowano w postaci oddzielnej publikacji.

Rozpatrywane zagadnienie nawiązuje do prac autora [1, 2] w których rozpatrzono równanie różniczkowe typu

$$dX/dt + P(t)X = 0 \tag{1}$$

gdzie:

$P(t) = (p_{i,k}(t))$ - macierz kwadratowa n rzędu o elementach będących funkcjami ciągłymi lub odcinkami ciągłymi o skończonej liczbie nieciągłości 1 rodzaju,

X - wektor-kolumna o elementach $X_1, \dots X_n$.

Równanie (1) posiada rozwiązanie w postaci

$$X = e^{-\int_0^t P(t)dt} \cdot C, \tag{2}$$

gdzie elementy wektora-kolumny C wyznaczone są z warunków początkowych

$$X_i(0) = X_{i,o}, \qquad i = 1,2,\dots n \tag{3}$$

Według [3] macierz P(t) powinna spełniać warunek konieczny i dostateczny w postaci

$$e^{-\int_0^t P(t)dt)} P(t) = P(t)\, e^{-\int_0^t P(t)dt} \tag{4}$$

Jest to według [3] spełnione w przypadku następujących macierzy:

$$1. \quad P(t) = \mathrm{const}, \tag{5}$$

$$2. \quad P(t) = A\,\varphi(t), \tag{6}$$

gdzie:

A - macierz o elementach stałych, kwadratowa n rzędu,

$\varphi(t)$ - funkcja skalarna, odcinkami ciągła,

$$3.\quad P(t) = \sum_k A_k\, \varphi_k(t), \tag{7}$$

gdzie:

A_k – macierze o podobnych własnościach jak macierz w (6) przemienne z sobą,

$\varphi_k(t)$ – funkcja o podobnych własnościach jak w (6).

Do tych przypadków można ze względu na własności funkcji $K(t, \tau_l, \tau_{l+1})$ dodać ważny przypadek, rozpatrywany poprzednio przez autora

$$P(t) = K(t, \tau_l, \tau_{l+1})\, P_l(t) \tag{8}$$

gdzie:

$P_l(t)$ – macierz kwadratowa n rzędu stała lub w ogólności o elementach będących funkcjami t o podobnych własnościach jak funkcje rozpatrywane w (6) i (7), więc spełniająca warunek (4).

Funkcja $K(t, \tau_l, \tau_{l+1})$ jest równa jedności w przedziale zamkniętym $\langle\tau_l, \tau_{l+1}\rangle$, na zewnątrz zaś tego przedziału równa zeru.

W ostatnim przypadku twierdzenie jest spełnione, ze względu na własność funkcji $K(t, \tau_l, \tau_{l+1})$, mianowicie, że w przypadku tworzenia kolejnych potęg macierzy $P(t)$ w rozwinięciu funkcji $e^{\int_0^t P(t)dt}$ występują jedynie pierwsze potęgi funkcji $K(t, \tau_l, \tau_{l+1})$, ponieważ iloczyny dwóch funkcji, odnoszących się do różnych przedziałów, są równe zeru, potęgi zaś tej funkcji są równe jej samej.

Do podobnego rozwiązania prowadzą również równania o zmiennych współczynnikach, zwane przywiedlnymi [4 – 10]. Równania te jak wiadomo przy pomocy transformacji

$$X = K(t)Y \tag{9}$$

gdzie:

Y - wektor-kolumna o nowych elementach niewiadomych, dadzą się sprowadzić do postaci

$$dY/dt + A\,Y = 0, \tag{10}$$

gdzie:

A - macierz stała.

Według [8, 11], aby równanie (1) było przywiedlne, potrzeba i wystarcza, by fundamentalny układ jego rozwiązań unormowany dla $t = 0$, był przedstawiony w postaci

$$X = K(t)e^{At}, \tag{11}$$

przy czym $\det K(t)$ i $\det K^{-1}(t)$ są ograniczone dla $t > 0$, macierz A posiada postać Jordanowską. Jeśli rozwiązanie nie jest unormowane, należy poprzednie wyrażenie pomnożyć przez kolumnę C wartości stałych (początkowych).

W szczególności jeżeli macierz $P(t)$ jest okresowa o okresie ω, według [7] układ jest przywiedlny przy pomocy macierzy $K(t)$ okresowej o okresie ω, przy czym w [7] podano dokładny sposób budowania obu macierzy $K(t)$ i A.

Równanie typu (2) jest również użyteczne jako przybliżenie zerowe (liniowe) w przypadku szerokiej klasy równań różniczkowych nieliniowych typu [7, 10, 12],

$$dy_s/dt = \sum_i p_{s,i}(t)\, y_i + \sum p_s^{(m_1,\ldots m_n)}(t) y_1^{m_1} \ldots y_n^{m_n} \tag{12}$$

dla $$m_1 + \ldots + m_n > 1,$$

gdzie: $p_{s,i}(t)$, $p_s^{(m_1 \ldots m_n)}(t)$ - rzeczywiste ciągłe ograniczone funkcje lub odcinkami ciągłe o skończonej liczbie nieciągłości 1 rodzaju, określone dla $t > 0$ oraz $s = 1,\ldots n$. Układ może być rozwiązany jak wynika z twierdzenia Lapunowa, jeśli macierz posiada pojedyncze wartości charakterystyczne λ_i, $i = 1,\ldots n$.

2. Pewne zależności dla macierzowej funkcji wykładniczej [4, 5 6, 9, 13, 14]

W pewnych przypadkach postać funkcji, która jest określona przy pomocy rozwinięcia

$$e^{A(t)} = E + (1/1!)\, A(t) + (1/2!)\, A(t)^2 + \ldots \tag{13}$$

gdzie E - macierz jednostkowa,
jest znana np.

$$e^{t\begin{pmatrix} 0, & \mp a, & 0 \\ \pm a, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos at, & \mp\sin at, & 0 \\ \pm\sin at, & \cos at, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$e^{t\begin{pmatrix} 0, & a, & 0 \\ a, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\, at, & \mathrm{sh}\, at, & 0 \\ \mathrm{sh}\, at, & \mathrm{ch}\, at, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$e^{t\begin{pmatrix} 0 & \pm a i & 0 \\ \mp a i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\, at & \pm i\, \mathrm{sh}\, at & 0 \\ \mp i\, \mathrm{sh}\, at & \mathrm{ch}\, at & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Jeśli

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos at & \sin at \\ \sin at & \cos at \end{pmatrix} \tag{17}$$

wtedy $e^{A(t)}$ przedstawiona jest szeregiem Fouriera, ponieważ w rozwinięciu funkcji (13) postać kolejnych potęg macierzy A(t) jest podobna, tylko argument funkcji w n-tej potędze wzrasta n-krotnie.

Jeśli liczbę zespoloną przedstawimy w postaci macierzowej [14, 15]

$$A = a + b\,i = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

wtedy e^{A} będzie miała podobną postać, ponieważ

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{n} = \mathrm{Re}(a + i\,b)^{n}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Im}(a+ib)^{n}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

W przypadku macierzy przyporządkowanej kwanternionowi [17]

$$A = (a_1, a_2, a_3, a_4) = \begin{pmatrix} a_4 + i\,a_1 & -a_3 + i\,a_2 \\ a_3 + i\,a_2 & a_4 - i\,a_1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

funkcja e^{A} zachowuje również podobną postać.

Również charakter macierzy A diagonalnej, quasidiagonalnej i trójkątnej nie ulega zmianie przy transformacji e^A.

W przypadku macierzy (8) otrzymujemy

$$e^P = \sum_{l=1}^{\infty} K(t, \tau_l, \tau_{l+1})\, e^{P_l} \tag{21}$$

W przypadku macierzy (6), macierzowa funkcja wykładnicza przedstawiona jest szeregiem potęgowym funkcji $\varphi(t)$. W przypadku, gdy funkcja ta jest trygonometryczna, ze względu na jednostajną i bezwzględną zbieżność szeregu współczynników otrzymany szereg trygonometryczny jest również bezwzględnie i jednostajnie zbieżny.

Jeśli macierz P stała posiada wartości charakterystyczne π_k, k = 1,...n pojedyncze, więc w przedstawieniu Jordanowskim posiada postać

$$P = S\,[\pi_1, \dots \pi_n]\,S^{-1}, \tag{22}$$

gdzie:

S - nieosobliwa (modalna) macierz przekształcenia kanonicznego, wtedy

$$e^P = f(P) = S\,[f(\pi_1), \dots f(\pi_n)]\,S^{-1} \tag{23}$$

Jeśli wartości charakterystyczne macierzy P są wielokrotne, czyli

$$P = S\,[J_{\varrho}(\xi)]\,S^{-1} \tag{24}$$

gdzie:

$$J_\varrho(\xi) = \left[J_{\varrho_1}(\xi_1), \dots J_{\varrho_s}(\xi_s)\right], \tag{25}$$

$$J_{\varrho i}(\xi_i) = \begin{pmatrix} \xi_i, & 0, & 0, & \dots & 0, & 0 \\ 1, & \xi_i, & 0, & \dots & 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & \dots 0, & 1, & \xi_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots n \tag{26}$$

wtedy

$$f\left[J_\varrho(\xi)\right] = \begin{pmatrix} f(\xi), & 0, & 0, & \dots & 0 \\ f'(\xi), & f(\xi), & 0, & \dots & 0 \\ (1/2)f''(\xi), & f'(\xi), & f(\xi), & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (1/(\varrho-1))f^{(\varrho-1)}(\xi) & \dots & \dots & \dots & f(\xi) \end{pmatrix} \tag{27}$$

otrzymujemy więc macierz trójkątną. Natomiast

$$f(P) = S\left\{f\left[J_{\varrho_1}(\xi_1)\right], \dots f\left[J_{\varrho_s}(\xi_s)\right]\right\} S^{-1} \tag{28}$$

Otrzymujemy więc macierz quasidiagonalną zbudowaną z macierzy trójkątnych.

3. Obliczenie macierzowej funkcji wykładniczej dla pewnych typów macierzy

Można stosunkowo prosto przedyskutować własności macierzowej funkcji wykładniczej, wykorzystując przedstawienia kanoniczne pewnych typów macierzy stałych.

Rozpatrzono następujące przypadki [6]:

1) kwadratowej macierzy rzeczywistej,
2) ortogonalnej macierzy rzeczywistej,
3) antysymetrycznej macierzy rzeczywistej,
4) macierzy unitarnej (ewentualnie unitarnej symetrycznej),
5) zespolonej ortogonalnej,
6) ortogonalnej Hermita.

Wykorzystując twierdzenia o sprowadzeniu ich do postaci Jordanowskiej oraz twierdzenie o utrzymywaniu charakteru macierzy przy przejściu od macierzy do macierzowej funkcji wykładniczej tej macierzy w przypadku macierzy trójkątnych, diagonalnych i quasidiagonalnych, można to samo twierdzić w przypadku 1 i 2, ponieważ w przypadku 1 macierz kwadratową rzeczywistą można przedstawić przy pomocy nieosobliwego liniowego przekształcenia w postaci quasidiagonalnej z rzeczywistymi kwadratowymi macierzami $A_1, \dots A_k, B_1, \dots B_m$ na przekątnej głównej [5]

$$A_j = \begin{pmatrix} S_j, & 0_2, & \dots & 0_2, & 0_2 \\ E_2, & S_j, & \dots & 0_2, & 0_2 \\ 0_2, & E_2, & \dots & 0_2, & 0_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0_2, & 0_2, & \dots & E_2, & S_j \end{pmatrix} \qquad (29)$$

gdzie:

$$S_j = \begin{pmatrix} \alpha_j, & -\beta_j \\ \beta_j, & \alpha_j \end{pmatrix} \qquad (30)$$

O_2, E_2 - macierz zbudowana z zer i macierz jednostkowa drugiego rzędu

$$B_j = \begin{pmatrix} \lambda_j, & 0, & \dots & 0 \\ 1, & \lambda_j, & \dots & 0 \\ 0, & 1, & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots & \lambda_j \end{pmatrix} \qquad (31)$$

Macierze A_j odpowiadają wielokrotnym zespolonym wartościom własnym, macierze B_j - rzeczywistym wielokrotnym, λ_j, które w szczególnym przypadku jeśli wartości własne są pojedyncze sprowadzają się do pierwszego elementu i tworzą macierz diagonalną. Macierz S_j daje się również sprowadzić do postaci przekątnej, przy wykorzystaniu zależności

$$S_j = \alpha_j \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} - \beta_j \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi}, & 0 \\ 0, & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}. \qquad (32)$$

Przy potęgowaniu macierze A_j, B_j można traktować jak trójkątne i przy przejściu do funkcji macierzowej wykładniczej ten charakter zostaje zachowany.

Podobnie ma się sprawa w przypadku 2, gdy dowolną macierz ortogonalną rzeczywistą można przy pomocy ortogonalnego nieosobliwego przekształcenia doprowadzić do postaci [14, 19]

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1, & \sin\alpha_1 & & & & & & & & \\ -\sin\alpha_1, & \cos\alpha_1 & & & & & & & & \\ & & \cos\alpha_2, & \sin\alpha_2 & & & & & & \\ & & -\sin\alpha_2, & \cos\alpha_2 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad (33)$$

Ta macierz, która może być również napisana w postaci diagonalnej zespolonej zachowuje swój charakter przy przejściu do macierzowej funkcji wykładniczej. W miejsce poszczególnych podmacierzy kwadratowych drugiego rzędu otrzymujemy macierze, będące szeregami Fouriera.

Macierz przypadku [3], która posiada przedstawienie quasidiagonalne [6, 14, 20]

$$A = \begin{pmatrix} 0, & \varphi_1 & & & & & \\ -\varphi_1 & 0 & & & & & \\ & & 0, & \varphi_2 & & & \\ & & -\varphi_2, & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad (34)$$

posiada macierze omówione już poprzednio i dające macierze w postaci skończonej.

Macierze przypadku 4, 5 i 6 można potraktować razem, ponieważ są one przedstawialne w postaci podobnej.

W przypadku 4 ogólne przedstawienie macierzy unitarnej jest następujące [6]

$$U = R\,e^{iS}, \tag{35}$$

gdzie:

R - rzeczywista macierz ortogonalna,

S - macierz rzeczywista symetryczna.

W przypadku gdy macierz jest ponadto symetryczna, macierz R jest jednostkowa.

W przypadku 5 macierz zespoloną ortogonalną można sprowadzić do postaci [6]

$$O = R\,e^{iK} \tag{36}$$

gdzie:

R - macierz rzeczywista ortogonalna,

K - macierz rzeczywista antysymetryczna.

W przypadku 6, macierz Hermita ortogonalną można przedstawić w postaci [6]

$$G = I\,e^{iK}, \tag{37}$$

gdzie:

I - macierz rzeczywista symetryczna i inwolucyjna,

K - macierz rzeczywista antysymetryczna, przestawialna z I. Jeżeli macierz ta jest ponadto dodatnio określona wtedy I = E.

We wszystkich przypadkach występuje tu macierz [4, 13]

$$e^{iK} = \cos K + i \sin K \tag{38}$$

Można do niej stosować twierdzenie Moivre'a. Spełnia ona również zależność

$$(\cos K + i \sin K)^n = \cos nK + i \sin nK \tag{39}$$

Jeżeli macierze R i K są przemienne ogólny wyraz macierzy e^R e^{iK} można napisać w postaci $(1/n!)\ R^n\ (\cos nK\ i \sin nK)$.

W ogólnym przypadku macierzy nie przemiennych takie przedstawienie jest niemożliwe. Przemienność jest spełniona w przypadku macierzy unitarnej symetrycznej oraz K macierzy rzeczywistej antysymetrycznej przestawialnej z I (I - macierz symetryczna rzeczywista i inwolucyjna spełniające warunek $I^2 = E$).

Jeżeli jedna z macierzy R, S lub R, K jest nieosobliwa, wtedy istnieje możność przy pomocy nieosobliwego przekształcenia liniowego równoczesnej diagonalizacji obu macierzy [6]. Tak otrzymana macierz diagonalna posiada na ogół elementy zespolone.

Można diagonalizować macierz Hermita przy pomocy przekształcenia unitarnego i macierz symetryczną rzeczywistą przy pomocy przekształcenia ortogonalnego, przy czym ich elementy są wtedy rzeczywiste. Każda macierz unitarna daje się przy pomocy przekształcenia unitarnego, macierz zaś rzeczywista ortogoanlna przy pomocy przekształcenia ortogonalnego doprowadzić do postaci diagonalnej z zespolonymi na ogół elementami.

Jeśli równocześnie przekształcenie do postaci diagonalnej nie jest możliwe można przekształcić do takiej postaci przynajmniej jedną z macierzy.

Razem można również potraktować macierze w przypadku

7) macierzy kwadratowej zespolonej,
8) symetrycznej macierzy zespolonej,
9) zespolonej macierzy antysymetrycznej,
10) zespolonej macierzy ortogonalnej.

W przypadku 7 dowolna kwadratowa macierz zespolona jest podobna do symetrycznej [6]

$$\tilde{S} = \left\{ \lambda_1 E^{(p_1)} + S^{(p_1)}, \ldots \lambda_n E^{(p_n)} + S^{(p_n)} \right\} \tag{40}$$

gdzie $E^{(p_i)}$ - macierz jednostkowa p_i rzędu,

$$S^{(p_i)} = (1/2)\begin{pmatrix} 0, 1, 0, \ldots 0, 0, 0 \\ 1, 0, 1, \ldots 0, 0, 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0, 0, 0, \ldots 1, 0, 1 \\ 0, 0, 0, \ldots 0, 1, 0 \end{pmatrix} + \tag{41}$$

$$+ (i/2)\begin{pmatrix} 0, 0, 0, \ldots 0, 1, 0 \\ 0, 0, 0, \ldots 1, 0, -1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1, 0, -1, \ldots 0, 0, 0 \\ 0, -1, 0, \ldots 0, 0, 0 \end{pmatrix}$$

Ponieważ jako rezultat mnożenia macierzy $S^{(p_i)}$ przez siebie otrzymujemy przesuwanie się odpowiednich przekątni jedynek ku narożom, więc po $p_i - 1$ mnożeniach otrzymujemy macierz zerową, więc przy obliczaniu kolejnych potęg macierzy w rozwinięciu macierzowej funkcji wykładniczej w szereg otrzymujemy dla elementu p_i

$$(\lambda_i)^{p_i} E^{(p_i)} + \binom{p_i}{1} S^{(p_i)} \lambda_i^{p_i-1} + \dots + \binom{p_i}{p_i-1} S^{(p_i)} \lambda_i^{p_i-1} \tag{42}$$

Podobnie zachowuje się macierzowa funkcja wykładnicza w przypadku 8 symetrycznej macierzy zespolonej, która jest ortogonalnie podobna do symetrycznej macierzy o normalnej postaci $\tilde{S}$ [6].

W przypadku 9 zespolonej macierzy antysymetrycznej, która jest (zespolenie) ortogonalnie podobna do macierzy K o normalnej postaci [6]

$$K = \left\{ K\lambda_1^{(p_1,p_1)}, \dots K\lambda_n^{(p_n,p_n)}, K^{(q_1)}, \dots K^{(q_v)} \right\} \tag{43}$$

gdzie

$$K^{(q)} = (1/2)\begin{pmatrix} 0, & 1, & 0, & \dots & 0, & 0 \\ -1, & 0, & 1, & \dots & 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & \dots & 0, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & \dots & 1, & 0 \end{pmatrix} + (i/2)\begin{pmatrix} 0, & 0, & \dots & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & \dots & 1, & 0, & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1, & 0, & \dots & 0, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & \dots & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} \tag{44}$$

oraz

$$
K^{(p,p)} = (1/2) \begin{vmatrix}
0, & 1, & \dots & 0, & 0 & 0, & 0, & \dots & i, & 2\lambda_0 \\
-1, & 0, & \dots & 0, & 0 & 0, & 0, & \dots & 2\lambda_0, & i \\
\dots & & & & & \dots & & & & \\
\dots & & & & & \dots & & & & \\
0, & 0, & \dots & 0, & 1 & i, & 2\lambda_0, & \dots & 0, & 0 \\
0, & 0, & \dots & 1, & 0 & 2\lambda_0, & i, & \dots & 0, & 0 \\
0, & 0, & \dots & -i, & -2\lambda_0 & 0, & -1, & \dots & 0, & 0 \\
0, & 0, & \dots & -2\lambda_0, & -i & 1, & 0, & \dots & 0, & 0 \\
\dots & & & & & \dots & & & & \\
\dots & & & & & \dots & & & & \\
-i, & -2\lambda_0, & \dots & 0, & 0 & 0, & 0, & \dots & 0, & -1 \\
-2\lambda_0, & -i, & \dots & 0, & 0 & 0, & 0, & \dots & 1, & 0
\end{vmatrix}
\tag{45}
$$

macierze $K^{(q_i)}$ jako podobnie zbudowane do $S^{(p_i)}$ posiadają podobną własność. W przypadku macierzy $K^{(p,p)}$ trudno jest podać proste prawo tworzenia wyższych potęg

Wreszcie w przypadku 10, macierzy dowolnej zespolonej ortogonalnej, która jest ortogonalnie podobna do macierzy o normalnej postaci [6]

$$
O = \left\{ e^{K\mu_1 (p_1,p_1)}, \dots e^{K\mu_n (p_n,p_n)}, e^{K^{(q_v)}}, \dots e^{K^{(q_v)}}, -e^{K^{(t_1)}}; \right.
$$
$$
\left. , \dots -e^{K^{(t_w)}} \right\} \tag{46}
$$

gdzie t_j krotność dzielnika elementarnego $\lambda + 1$, q_i krotność elementarnych dzielników $\lambda - 1$, inne dzielniki elementarne

$\lambda - \lambda_j$ posiadają krotność p_j, $\lambda_j \neq 0$, $j = 1,\dots n$, mamy macierze podobnie zbudowane jak w poprzednim przypadku.

LITERATURA

[1] Szpilecki J., Arch. Autom. i Telemech. 3, nr 4, 211 1958.

[2] Szpilecki J., Arch. Autom. i Telemech. 3, nr 4, 291 1958.

[3] Jerugin N.P., Metod Lappo Danilewskowo w tieorii differencialnych urawnienij, Izd. Leningrads. Uniw. 1956.

[4] Bułhakow B.W., Kolebania - Gos. Izd. T.T. Moskwa 1954.

[5] Coddington E.A., Lewinson N., Theory of ordinary differential equations, Mc Graw Hill, N. York 1955, przekł. ros. Izd. Inostr. Lit. Moskwa 1958.

[6] Gantmacher R.F., Applications of the theory of matrices, Interscience Publishers, N. York 1959.

[7] Malkin J.G., Niekotoryje zadaczi tieorii nieliniejnych kolebanij, Gos. Izd. T.T. Lit. Moskwa 1956.

[8] Matwiejew N.M., Metody integrirowania obyknowiennych differencialnych urawnienij, Izd. Lenigr. Uniw. 1955.

[9] Niemyckij W.N., Stepanow W.W., Kaczestwiennaja tieoria differencialnych urawnienij, Gos. Izd. T.T. Lit. Moskwa 1949.

[10] Zubow W.I., Matematiczeskije metody issledowania sistiem awtom. regulirowania, Gos. Sojuz. Izd. Sudowoj Promyszlennosti, Leningrad 1959.

[11] Jerugin N.N., Priwodymyje sistiemy, Trudy Mat. Inst. im. N.A. Stiekłowa, 13, Izd. A.N. SSSR Leningrad 1946.

[12] Mandelstam L.I., Połnoje sobranie trudow, II, Izd, A.N. SSSR 1947.

[13] Lappo Danilewskij J.A., Primienienie funkcji ot matric k tieorii liniejnych sistiem obyknowiennych differencialnych urawnieniej, Gos. Izd. T.T. Lit. Moskwa 1957.

[14] Malcew A.J., Osnowy liniejnoj algebry, Gos. Izd. T.T. Lit. Moskwa 1948.

[15] Cholewicki T., Macierzowa analiza obwodów liniowych, PWN W-wa 1958.

[16] Tieoria grupp i jejo primienienie f fizike, Gos. Izd. T.T. Lit. Moskwa 1957.

[17] Madelung E., Die math. Hilfsmittel d. Physikers, Springer Berlin 1957, przekł. ros. Izd. F.M. Lit. Moskwa 1960.

[18] Najmark M.A., Liniejnyje predstawlania gruppy Lorenca, Gos, Izd. F.M. Lit. Moskwa 1958.

[19] Szyłow G.E., Wwiedienie w tieoriu liniejnych prostranstw Gos. Izd. T.T. Lit. Moskwa 1956.

[20] Fadiejew A.K., Sominskij J.S., Sbornik zadacz po wysszej ałgebre, Gos. Izd. T.T. Lit. Moskwa 1949.

[21] Fadiejewa W.N., Metody numeryczne algebry liniowej, PWN Warszawa 1955.

[22] Frazer R.A., Duncan W.I., Collar A.R., Elementary matrices, 1950.

[23] Łukaszewicz J., Warmus M., Metody numeryczne i graficzne cz. I. PWN Warszawa 1956.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ МАТРИЧНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Р е з ю м е

В работе рассматриваются свойства матричной экспоненциальной функции в случае ряда типов матричных дифференциальных уравнении первого порядка и различных типов матриц коэффициентов, используя частично известные из литературы результаты для использования их при проблемах устойчивости решений.

SOME PECULIARITIES OF THE MATRIX EXPONENTIAL FUNCTION

S u m m a r y

In the paper are discussed the peculiarities of the matrix exponential function for many types of matrix differential equations of the first order and for various types of matrix of coefficients, with particular use of some results presented in previous papers, for use in the solution of stability problem.