ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1970

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 15 Nr kol. 285

JOZEF SZPILECKI
Katedra Fizyki Technicznej

O PEWNYCH WNIOSKACH ZE ZWIĄZKÓW DYSPERSYJNYCH, DOTYCZĄCYCH PLAZMY CIAŁA STAŁEGO O WŁASNOŚCIACH FERROELEKTRYKA I FERROMAGNETYKA

Streszczenie. W artykule wyprowadzono pewne wnioski z jednego z równań dyspersyjnych z jednej z poprzednich prac autora, dotyczące prędkości fazowej i grupowej w powiązaniu z anomalnym, złożonym i odwrotnym efektem Dopplera w plazmie ciała stałego o własnościach ferroelektryka i ferromagnetyka.

1. Wstęp

W pracy [1] wyprowadzono związki dyspersyjne, dotyczące plazmy ciała stałego o własnościach ferroelektryka i ferromagnetyka, opierając się na pracy autora [2].

Celem niniejszej pracy jest wyprowadzenie z tych związków pewnych wniosków, dotyczących rozchodzenia się fal w wymienionych wyżej ciałach. Numerację wzorów i oznaczenia, na które powołano się, przyjęto jak w pracy [1] i [2].

2. Rozpatrzenie pewnego przypadku szczególnego

Przy pewnych upraszczających założeniach, dotyczących znikania wielkości polaryzacji P_o, M_o oraz prędkości $c_1, c_2 \to 0$ lub koncentracji nośników ładunku $N_{1,0}$, $N_{2,0} \to \infty$, otrzymuje się podstawowe dla dalszych rozważań równanie, oznaczone w pracy [1] numerem (12). Dotyczy ono składowych pola E i H

$$\det\begin{pmatrix}(F_1) & , & (F_2)\\ (F_4) & , & (F_1)\end{pmatrix} = 0 \tag{1}$$

Występują w nim macierze trzeciego rzędu (F_1), (F_2), F_4):

$$(F_1) = j\,k_r\begin{pmatrix}0 & , & \gamma & , & -\beta\\ -\gamma & , & 0 & , & \alpha\\ \beta & , & -\alpha & , & 0\end{pmatrix} \tag{2}$$

$$(F_2) = (j\omega_r/c)\Big\{(\beta_{i,k}) - j\,k_r\,((\delta_{i,1,k}),\,(\delta_{i,2,k}),\,(\delta_{i,3,k}))\,\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} - k_r^2\left[(\Delta_{1,i,k}) + (\Delta_{2,i,k})\begin{pmatrix}\alpha^2 & , & \alpha\beta & , & \alpha\gamma\\ \beta\alpha, & & \beta^2 & , & \beta\gamma\\ \gamma\alpha, & & \gamma\beta & , & \gamma^2\end{pmatrix}\right]\Big\} \tag{3}$$

lub w postaci skróconej

$$(F_2) = (j\omega_r/c)\left\{(\beta_{i,k}) - j\,k_r\,(\lambda'_{o,k}) - k_r^2\,(\mu'_{i,k})\right\}, \tag{4}$$

gdzie rozważanie odnosi się do r-tej z możliwych fal, α, β, γ współczynniki kierunkowe wektora falowego k_r, $(\lambda'_{i,k})$, $(\mu'_{i,k})$ skróty, które można otrzymać przez porównanie z odpowiednimi wyrażeniami w (3).

Ze względu na analogiczną budowę można analogicznie przedstawić

$$(F_4) = (j\omega_r/c)\left\{-(\alpha_{i,k}) + j\,k_r(\lambda''_{i,k}) + k_r^2\,(\mu''_{i,k})\right\}, \tag{5}$$

przy czym wielkości $(\lambda''_{i,k})$, $(\mu''_{i,k})$ otrzymuje się z pojedynczo kreskowanych przez zastąpienie $(\beta_{i,k})$ przez $-(\alpha_{i,k})$ $(\delta_{i,1,k})$ itd przez $-(\gamma_{i,1,k})$, itd $(\Delta_{1,i,k})$, $(\Delta_{2,i,k})$ przez $-(\Gamma_{1,i,k})$, $-(\Gamma_{2,i,k})$.

W powyższych warażeniach j oznacza jednostkę urojoną.

Wyznacznik (1) składa się z trzech rodzajów wyrażeń.

W celu ich wyprowadzenie tworzymy kolejno następujące iloczyny elementów macierzy (F_2)

$$\begin{aligned} F_{2,m,n}\,F_{2,p,q} &= \beta_{m,n}\,\beta_{p,q} - j\,k_r\,(\beta_{m,n}\,\lambda'_{p,g} + \beta_{p,q}\,\lambda'_{m,n}) - \\ &- k_r^2\,(\mu'_{m,n}\,\beta_{p,q} + \mu'_{p,q}\,\beta_{m,n} + \lambda'_{m,n}\,\lambda'_{p,q}) + j\,k_r^3\,\cdot \\ &\cdot (\mu'_{m,n}\,\lambda'_{p,q} + \mu'_{p,q}\,\lambda'_{m,n}) + k_r^4\,\mu'_{m,n}\,\mu'_{p,q}. \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} F_{2,i,j}\,F_{2,m,n}\,F_{2,p,q} &= \beta_{i,j}\,\beta_{m,n}\,\beta_{p,q} - j\,k_r\left[\beta_{i,j}\,(\beta_{m,n}\lambda'_{p,q} + \right. \\ &\left. + \lambda'_{m,n}\,\beta_{p,q}) + \lambda'_{i,j}\,\beta_{m,n}\,\beta_{p,q}\right] - k_r^2\left[\beta_{i,j}\,(\mu'_{m,n}\,\beta_{p,g} + \mu'_{p,q}\beta_{m,n}\right) \\ &+ \lambda'_{m,n}\,\lambda'_{p,q}) + \lambda'_{i,j}\,(\beta_{m,n}\lambda'_{p,q} + \lambda'_{m,n}\,\beta_{p,q}) + \mu'_{i,j}\,\cdot \\ &\left.\cdot\,\beta_{m,n}\,\beta_{p,q}\right] + j\,k_r^3\left[\beta_{i,j}\,(\mu'_{m,n}\,\lambda'_{p,q} + \mu'_{p,q}\,\lambda'_{m,n}) + \right. \\ &+ \lambda'_{i,j}\,(\mu'_{m,n}\,\beta_{p,q} + \mu'_{p,q}\,\beta_{m,n} + \lambda'_{m,n}\,\lambda'_{p,q}) + \\ &\left. + \mu'_{i,j}\,(\beta_{m,n}\,\lambda'_{p,q} + \lambda'_{m,n}\,\beta_{p,q})\right] + k_r^4\left[\beta_{i,j}\,\mu'_{m,n}\,\mu'_{p,q}\right. + \end{aligned}$$

$$+ \lambda'_{i,j} (\mu'_{m,n} \lambda'_{p,q} + \mu'_{p,q} \lambda'_{m,n}) + \mu'_{i,j} (\mu'_{m,n} \beta_{p,q} +$$

$$+ \mu'_{p,q} \beta_{m,n} + \lambda'_{m,n} \lambda'_{p,q})] - j\, k_r^5 [\lambda'_{i,j} \mu'_{m,n} \mu'_{p,q} +$$

$$+ \mu'_{i,j} (\mu'_{m,n} \lambda'_{p,q} + \mu'_{p,q} \lambda'_{m,n})] - k_r^6 \mu'_{i,j} \mu'_{m,n} \mu'_{p,q}. \tag{7}$$

Pozwala to napisać wyznacznik det (F_2) w postaci sumy następujących wyrażeń po indeksie $i = 1,2,3$ i po indeksach m,p różnych od i branych w rosnącej kolejności

$$(-1)^i < \beta_{i,1} (\beta_{m,2} \beta_{p,3} - \beta_{m,3} \beta_{p,2}) - j\, k_r [\beta_{i,1} (\beta_{m,2} \lambda'_{p,3} +$$

$$+ \lambda'_{m,2} \beta_{p,3}) + \lambda'_{i,1} \beta_{m,2} \beta_{p,3} - (\beta_{m,3} \lambda'_{p,2} + \lambda'_{m,3} \beta_{p,2}) \cdot$$

$$\cdot \beta_{i,1} - \lambda'_{i,1} \beta_{m,3} \beta_{p,2}] - k_r^2 [\beta_{i,j} (\mu'_{m,2} \beta_{p,3} - \mu'_{m,3} \beta_{p,2} +$$

$$+ \mu'_{p,3} \beta_{m,2} - \mu'_{p,2} \beta_{m,3} + \lambda'_{m,2} \lambda'_{p,3} - \lambda'_{m,3} \lambda'_{p,2}) + \lambda'_{i,1} \cdot$$

$$\cdot (\beta_{m,2} \lambda'_{p,3} - \beta_{m,3} \lambda'_{p,2} + \lambda'_{m,2} \beta_{p,3} - \lambda'_{m,3} \beta_{p,2}) +$$

$$+ \mu'_{i,1} (\beta_{m,2} \beta_{p,3} - \beta_{m,3} \beta_{p,2})] + j\, k_r^3 [\beta_{i,1} (\mu'_{m,2} \lambda'_{p,3} -$$

$$- \mu'_{m,3} \lambda'_{p,2} + \mu'_{p,3} \lambda'_{m,2} - \mu'_{p,2} \lambda'_{m,3}) + \lambda'_{i,1} (\mu'_{m,2} \beta_{p,3} -$$

$$- \mu'_{m,3} \beta_{p,2} + \mu'_{p,3} \beta_{m,2} - \mu'_{p,2} \beta_{m,3} + \lambda'_{m,2} \lambda'_{p,3} -$$

$$- \lambda'_{p,2} \lambda'_{m,3}) + \mu'_{i,1} (\beta_{m,2} \lambda'_{p,3} - \beta_{m,3} \lambda'_{p,2} + \lambda'_{m,2} \beta_{p,3} -$$

$$- \lambda'_{m,3} \beta_{p,2})] + k_r^4 [\beta_{i,1} (\mu'_{m,2} \mu'_{p,3} - \mu'_{m,3} \mu'_{p,2} + \lambda'_{i,1} \cdot$$

$$\cdot (\mu'_{m,2} \lambda'_{p,3} - \mu'_{m,3} \lambda'_{p,2} + \mu'_{p,3} \lambda'_{m,2} - \mu'_{p,2} \lambda'_{m,3}) +$$

$$+\mu'_{i,1}(\mu'_{m,2}\beta_{p,3}-\mu'_{m,3}\beta_{p,2}+\mu'_{p,3}\beta'_{m,2}-\mu'_{p,2}\beta_{m,3}+$$

$$+\lambda'_{m,2}\lambda'_{p,3}-\lambda'_{m,3}\lambda'_{p,2})\big]-j\,k_r^5\big[\lambda'_{i,1}(\mu'_{m,2}\mu'_{p,3}-$$

$$-\mu'_{m,3}\mu'_{p,2})+\mu'_{i,1}(\mu'_{m,2}\lambda'_{p,3}-\mu'_{p,3}\lambda'_{m,2}+\mu'_{p,3}\lambda'_{m,2}-$$

$$-\mu'_{p,2}\lambda'_{m,3})\big]-k_r^6\mu'_{i,1}(\mu'_{m,2}\mu'_{p,3}-\mu'_{m,3}\mu'_{p,2})> \tag{8}$$

Drugi typ wyrażeń w wyznaczniku (1) zawiera

$$D_2(m,n,p,q)=-(\omega_r^2/c^2)\Big\{\beta_{m,n}\,\beta_{p,q}-j\,k_r\,(\beta_{m,n}\lambda'_{p,q}+$$

$$+\lambda'_{m,n}\beta_{p,q})-k_r^2\,(\mu'_{m,n}\mu'_{p,q}\beta_{m,n}+\lambda'_{m,n}\lambda_{p,q})+$$

$$+j\,k_r^3\,(\mu'_{m,n}\lambda'_{p,q}+\mu'_{p,q}\lambda'_{m,n})+k_r^4\mu'_{m,n}\mu'_{p,q}\Big\} \tag{9}$$

Z nich tworzy się wyrażenia typu

$$\begin{aligned}&k_{r,z}\,D_2(1,1,2,3)+k_{r,y}\,D_2(1,1,2,2)=\\&=k_r\big\{\gamma D_2(1,1,2,3)+\beta D_2(1,1,2,2)\big\}\end{aligned} \tag{10}$$

Ostatni typ wyrażeń w wyznaczniku (1) zawiera

$$F_2(i)=k_r\big\{\alpha f_{2,i,1}+\beta f_{2,i,2}+\gamma f_{2,i,3}\big\}=(j\omega_r/c)\,k_r\,\cdot$$

$$\cdot\big\{\alpha\beta_{i,1}+\beta\beta_{i,2}+\gamma\beta_{i,3}-j\,k_r\,(\lambda'_{i,1}\alpha+\lambda'_{i,2}\beta+\lambda'_{i,3}\gamma)-$$

$$-k_r^2\,(\mu'_{i,1}\alpha+\mu'_{i,2}\beta+\mu'_{i,3}\gamma)\big\} \tag{11}$$

oraz

$$k_{r,x}\,F_2(1) + k_{r,y}\,F_2(2) + k_{r,z}\,F_2(3) = (j\omega_r/c)\,k_r^2\,(B' - j\,k_r\Lambda' -$$

$$- k'_r\,M') \tag{12}$$

gdzie

$$B' = \alpha(\alpha\beta_{1,1} + \beta\beta_{1,2} + \gamma\beta_{1,3}) + \beta(\alpha\beta_{2,1} + \beta\beta_{2,2} + \gamma\beta_{2,3}) +$$

$$+ \gamma(\alpha\beta_{3,1} + \beta\beta_{3,2} + \gamma\beta_{3,3})$$

i Λ', M' analogicznie zbudowane wyrażenie, tylko w miejsce $\beta_{i,k}$ wstawiono w nich $\lambda'_{i,k}$ i $\mu'_{i,k}$.

Podobnie zbudowane są wyrażenia odnoszące się do macierzy (F_4). Z łatwo zrozumiałymi oznaczeniami można wyróżnić w wyznaczniku (1) następujące wyrażenia

$$I = I'\,I''\,k_r^4 = (\omega_r^2/c^2)\,k_r^4\,(B' - j\,k_r\Lambda' - k_r^2\,M')\,(B'' - j\,k_r\,\Lambda'' -$$

$$- k_r^2\,M'') \tag{13}$$

$$II = \sum_{i=1}^{9} II'_i\,II''_i\,k_r^2 = (\omega_r^4/c^4)\,k_r^2 \sum_{i=1}^{9} (C'_i - j\,k_r\,D'_i - k_r^2\,E'_i +$$

$$+ j\,k_r^3\,F'_i + k_r^4\,G'_i)(C''_i - j\,k_r\,D''_i - k_r^2\,E''_i + j\,k_r^3\,F''_i + k_r^4\,G''_i\,) \tag{14}$$

$$III = \sum_{i=1}^{6} III'_i\,III''_i = (j\omega_r/c)^6 \sum_{i=1}^{6} (H'_i - j\,k_r\,I'_i - k_r^2\,J'_i +$$

$$+ j\,k_r^3\,K'_i + k_r^4\,L'_i - j\,k_r^5\,N'_i - k_r^6\,O'_i)(H''_i - j\,k_r\,I''_i - k_r^2\,J''_i +$$

$$j\, k_r^3 K_i'' + k_r^4 L_i'' - j\, k_r^5 N_i'' - k_r^6 O_i'') \tag{15}$$

Wyrażenia (8), (9) i (12) upraszczają się nieco, jeśli uwzględni się że w równaniach występują dwa rodzaje dyspersji przestrzennej, proporcjonalna do pierwszych i drugich pochodnych. Ponieważ one nie występują równocześnie, tylko zależnie od symetrii jedna lub druga, można wyrażenie te sprowadzić do prostszej postaci.

Jeśli ograniczymy się do pierwszych pochodnych, należy pominąć w wyrażeniach odnoszących się do macierzy (F_2) wyrażenia $\mu''_{i,j}$, zaś w odnoszących się do (F_4) wyrażeń $\mu''_{i,j}$.

Jeśli pominie się pierwsze pochodne i pozostawi tylko drugie, należy przyjąć jako równe zeru $\lambda'_{i,j}$ i $\lambda''_{i,j}$.

Porządkując, równanie (1) można napisać w postaci następującej

$$(\omega_r^2/c^2)\ \mathrm{I}\ k_r^4 + (\omega_r^4/c^4)\ k_r^2\ \mathrm{II} - (\omega_r^6/c^6)\ \mathrm{III} = 0 \tag{16}$$

lub po rozwiązaniu

$$(\omega_r^2/c^2\ k_r^2) = (\mathrm{II}/2\ \mathrm{III})\ (1 \pm \sqrt{1 + 4\ \mathrm{I}\ \mathrm{III}/(\mathrm{II})^2}) \tag{17}$$

Jeśli oznaczymy kąt jaki zawiera prędkość fazowa z kierunkiem wektora falowego k_r przez θ, wtedy można napisać

$$v_f \cos\theta = \omega_r/k_r \tag{18}$$

Równanie (17) pozwala w stosunkowo prosty sposób zobaczyć, jaki wpływ wywiera dyspersja przestrzenna.

W przypadku, gdy nie ma dyspersji przestrzennej, wyrażenie prawej strony nie zależy od k_r, jest więc stałe. Mamy więc proporcjonalność ω_r do k_r. W przypadku przestrzennej dyspersji, wyrażenie prawej strony równania (17) jest funkcją k_r.

Zależnie od znaku wyróżnika lub wyrażenia I III/(II)^2 mamy następujące przypadki:

Jeśli wyrażenie jest dodatnie, wyrażenie podpierwiastkowe przeważa, wskutek czego jedno rozwiązanie prawej strony jest ujemne, czyli dwa rozwiązania na ω_r są urojone.

W przypadku, jeśli to wyrażenie jest ujemne i nie przekracza 1/4 bezwzględnie, mamy dwa rozwiązania jednakowego znaku, który zależy od II/III, więc albo wszystkie cztery rozwiązania są rzeczywiste albo urojone sprzężone.

W przypadku zerowania się wyrażenia, jednym rozwiązaniem jest 0, drugie zaś posiada znak wyrażenia II/III, więc otrzymujemy wartości rzeczywiste lub urojone na prędkość fazową.

Dyskusja sprowadza się więc do rozpatrywania następujących warażeń, które rozpatrzymy w dwu przypadkach (A), (B), zależnie od założenia o dyspersji przestrzennej.

W pierwszym przypadku (A)

$$\begin{aligned} I/II &= (I_r + j\, I_i)/(II_r\ j\, II_i) \\ II/III &= (II_r + j\, II_i)/(III_r + j\, III_i) \end{aligned} \tag{19}$$

gdzie

$$I = I_r + j\, I_i = (B' - j\, k_r \Lambda')(B'' - j\, k_r \Lambda'') =$$

$$= A_{1,1} + k_r^2 A_{1,2} - j\, k_r A_{1,3}$$

$$II = II_r + j\, II_i = A_{2,1} + k_r^2 A_{2,2} + k_r^4 A_{2,3} - j\, k_r (A_{2,4} + k_r^2 A_{2,5})$$

$$III = III_r + j\, III_i = A_{3,1} + k_r^2 A_{3,2} + k_r^4 A_{3,3} + k_r^6 A_{3,4} -$$

$$- j\, k_r \left({}_{3,5} + k_r^2 A_{3,6} + k_r^4 A_{3,7}\right) \tag{20}$$

$$A_{1,1} = B' B'', \quad A_{1,2} = \Lambda' \Lambda'', \quad A_{1,3} = \Lambda' B'' + \Lambda'' B'$$

$$A_{2,1} = \sum_{i=1}^{9} C_i' C_i'', \quad A_{2,2} = -\sum_{i=1}^{9} \left[(C_i' E_i'' + C_i'' E_i') - D_i' D_i'' \right]$$

$$A_{2,3} = \sum_{i=1}^{9} E_i' E_i'', \quad A_{2,4} = \sum_{i=1}^{9} (D_i' C_i'' + D_i'' C_i')$$

$$A_{2,5} = -\sum_{i=1}^{9} (D_i' E_i'' + D_i'' E_i'), \quad A_{3,1} = \sum_{i=1}^{6} H_i' H_i''$$

$$A_{3,2} = -\sum_{i=1}^{6} \left[(H_i' J_i'' + H_i'' J_i') - I_i' I_i'' \right], \quad A_{3,4} = \sum_{i=1}^{6} K_i' K_i''$$

$$A_{3,3} = \sum_{i=1}^{6} \left[J_i' J_i'' - (I_i' K_i'' + I_i'' K_i') \right],$$

$$A_{3,5} = \sum_{i=1}^{6} (I_i' H_i'' + I_i'' H_i')$$

$$A_{3,6} = -\sum_{i=1}^{6} (I_i' J_i'' + I_i'' J_i' + H_i'' K_i' + H_i' K_i'')$$

$$A_{3,7} = \sum_{i=1}^{6} (K_i' J_i'' + K_i'' J_i').$$

W drugim przypadku (B)

$$I = B_{1,1} + B_{1,2}\, k_r^2 + B_{1,3}\, k_r^4$$

$$II = B_{2,1} + k_r^2 B_{2,2} + k_r^4 B_{2,3} + k_r^6 B_{2,4} + k_r^8 B_{2,5} \tag{21}$$

$$III = B_{3,1} + k_r^2 B_{3,2} + k_r^4 B_{3,3} + k_r^6 B_{3,4} + k_r^8 B_{3,5} +$$

$$+ k_r^{10} B_{3,6} + k_r^{12} B_{3,7}$$

gdzie

$$B_{1,1} = B'B'', \quad B_{1,2} = -(B'M'' + B''M'), \quad B_{1,3} = M'M''$$

$$B_{2,1} = \sum_{i=1}^{9} C_i' C_i'', \quad B_{2,2} = -\sum_{i=1}^{9} (E_i' C_i'' + E_i'' C_i')$$

$$B_{2,3} = \sum_{i=1}^{9} (G_i' C_i'' + G_i'' C_i' + E_i' E_i''), \quad B_{2,4} = -\sum_{i=1}^{9} (G_i' E_i'' + G_i'' E_i'),$$

$$B_{2,5} = \sum_{i=1}^{9} G_i' G_i'', \quad B_{3,1} = \sum_{i=1}^{6} H_i' H_i'', \quad B_{3,2} = -\sum_{i=1}^{6} (H_i'' J_i' + H_i' J_i'')$$

$$B_{3,3} = \sum_{i=1}^{6} (H_i' L_i'' + H_i'' L_i' + J_i' J_i''),$$

$$B_{3,4} = \sum_{i=1}^{6} (H_i'' O_i' + H_i' O_i'' + J_i' L_i'' + J_i'' L_i')$$

$$B_{3,5} = \sum_{i=1}^{6} (L_i' L_i'' + J_i' O_i'' + J_i'' O_i'),$$

$$B_{3,6} = -\sum_{i=1}^{6} (L_i' O_i'' + L_i'' O_i'), \qquad B_{3,6} = \sum_{i=1}^{6} O_i' O_i'' \tag{22}$$

W przypadku (A) można napisać

$$I/II = M\, e^{-j\varphi}, \tag{23}$$

gdzie

$$M = M_1/M_2, \qquad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \tag{24}$$

Podobnie

$$II/III = M'\, e^{-j\varphi}, \tag{25}$$

gdzie

$$M' = M_2/M_3, \qquad \varphi' = \varphi_2 - \varphi_3 \tag{26}$$

Wielkości M_1, M_2, M_3 oznaczają moduły odpowiednio I, II, III podobnie φ_1, φ_2, φ_3 - fazy

$$M_1 = \sqrt{(A_{1,1} + k_r^2 A_{1,2})^2 + k_r^2 A_{1,3}^2} \tag{27}$$

$$M_2 = \sqrt{(A_{2,1} + k_r^2 A_{2,2} + k_r^4 A_{2,3})^2 + k_r^2 (A_{2,4} + k_r^2 A_{2,5})^2} \tag{28}$$

$$M_3 = \sqrt{(A_{3,1}+k_r^2 A_{3,2}+k_r^4 A_{3,3}+k_r^6 A_{3,4})^2+k_r^2(A_{3,5}+k_r^2 A_{3,6}+k_r^4 A_{3,7})^2} \tag{29}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = k_r A_{1,3}/(A_{1,1} + k_r^2 A_{1,2}) \tag{30}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = k_r\,(A_{2,4} + k_r^2 A_{2,5})/(A_{2,1} + k_r^2 A_{2,2} + k_r^4 A_{2,3}) \tag{31}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_3 = k_r\,(A_{3,5} + k_r^2 A_{3,6} + k_r^4 A_{3,7})/(A_{3,1} + k_r^2 A_{3,2} + k_r^4 A_{3,3} + k_r^6 A_{3,4}) \tag{32}$$

Otrzymane wyrażenia posiadają postać skomplikowaną. Mimo to można wysnuć z ich postaci pewne wnioski. Jeśli chodzi o wyrażenia M i M' to od wartości początkowych $A_{1,1}/A_{2,1}$ lub $A_{2,1}/A_{3,1}$ dla $k_r = 0$ dążą one do wartości 0 dla $k_r \to \infty$, monotonicznie lub przez ewentualnie kilka ekstremów. Do pomyślenia są również punkty nieciągłości w miejscach zerowych mianowników, przy czym funkcje nie zmieniają znaku.

Z dyskusji wyrażeń na $\operatorname{tg}\varphi_i$, $i=1,2,3$ wynika, że wszystkie funkcje rozpoczynają się od wartości 0 dla $k_r = 0$ i dążą do wartości 0 dla $k_r \to \infty$, przez ewentualne miejsca zerowe i miejsca nieciągłości. Ponieważ trudno jest powiedzieć a priori coś konkretnego o wzajemnym położeniu miejsc zerowych i biegunów, możliwe są sytuacje, np. między dwoma biegunami bez zerowania, gdy argument rośnie, by następnie wrócić do wartości wyjściowej. W każdym razie zakres kątowy mieści się w niewielu okresach.

Ogólny wniosek, że funkcje rozpatrywane są zespolone, wskutek czego podobny charakter mają rozwiązania na prędkości fazowe.

W przypadku (B) zbudowane z wyrażeń (21) stosunki I/II i II/III są w k_r funkcjami meromorficznymi, które mogą mieć różne postaci w zależności od wzajemnego położenia miejsc zerowych i biegunów. Mamy tu dużą rozmaitość krzywych od przebiegów monotonicznych rozpoczynających się wartością $B_{1,1}/B_{2,1}$ dla $k_r = 0$ do wartości 0 dla $k_r \to \infty$, przez funkcje posiadające w punktach pośrednich ekstrema do funkcji posiadających nieciągłości, mianowicie w biegunach rozpatrywanych wyrażeń.

3. Dwa przypadki graniczne

Jak z powyższej dyskusji wynika, na kształt funkcji prawej strony równania na prędkość fazową wpływa bardzo wiele czynników, jak założenia o symetrii lub też o położeniu wektora k_r, które należałoby specjalizować w różnych konkretnych przypadkach.

Rozumowania upraszczają się nieco w dwu przypadkach granicznych:

$$k_r \to \infty \quad \text{i} \quad k_r = 0$$

W przypadku $k_r \to \infty$ otrzymujemy

przypadek (A)	przypadek (B)
$I = A_{1,2}\, k_r^2$	$B_{1,3}\, k_r^4$
$II = A_{2,3}\, k_r^4$	$B_{2,5}\, k_r^8$
$III = A_{3,4}\, k_r^6$	$B_{3,7}\, k_r^{12}$

Z równania więc (16) otrzymujemy niezależne od k_r równanie

przypadek (A)

$$A_{3,4}\, (\omega_r/c)^4 + A_{2,3}\, (\omega_r/c)^2 - A_{1,2} = 0 \tag{33}$$

przypadek (B)

$$B_{3,7}\, (k_r\, \omega_r/c)^4 - B_{2,5}\, (k_r\, \omega_r/c)^2 - B_{1,3} = 0 \tag{34}$$

W tym przypadku rozwiązanie dąży do zera odwrotnie proporcjonalnie do k_r.
W przypadku $k_r \to 0$ otrzymujemy

przypadek (A)	przypadek (B)
$I = A_{1,1}$	$B_{1,1}$
$II = A_{2,1}$	$B_{2,1}$
$III = A_{3,1}$	$B_{3,1}$

i na prędkość fazową niezależne od k_r rozwiązania

$$A_{3,1}(v_f \cos\Theta/c)^4 - A_{2,1}(v_f \cos\Theta/c)^2 - A_{1,1} = 0 \qquad (35)$$

$$B_{3,1}(v_f \cos\Theta/c)^4 - B_{2,1}(v_f \cos\Theta/c)^2 - B_{1,1} = 0 \qquad (36)$$

4. Prędkość grupowa

Dla dalszych rozważań ważna jest również znajomość prędkości grupowej i jej znak zgodny lub niezgodny ze znakiem prędkości fazowej.

Różniczkując równanie (16) ze względu na k_r, otrzymujemy

$$\left[2\, v_f \cos\Theta\, dv_f \cos\Theta/dk_r\right]/c^2 = -\left[(v_f \cos\Theta/c)^4 (d/kr)(III) - (v_f \cos\Theta/c)^2 (d/dk_r)(II) - (d/dk_r)(I)\right] / \left[2(III)(v_f \cos\Theta/c)^2 - (II)\right]. \qquad (37)$$

Równanie to jest jeszcze bardziej skomplikowane niż równanie (16). W celu wykazania możliwości ujemnej prędkości grupowej, rozpatrzymy je w przypadkach granicznych $k_r \to \infty$ i $k_r = 0$.

W przypadku $k_r \to \infty$ pozostawiamy jedynie wyrażenia zawierające najwyższe potęgi k_r. Wtedy

$$\left[2\, v_f \cos\Theta\, dv_f \cos\Theta/dk_r\right]/c^2 \approx (v_f \cos\Theta/c)^4 (d/dk_r)(III)/(II) \tag{38}$$

Wtedy w przypadku (A) otrzymujemy $-(3/2)(v_f \cos\Theta/c)^2/k_r$, w przypadku (b) zaś $-2(v_f \cos\Theta/c)^2/k_r$.

Ze wzoru na prędkość grupową (lorda Rayleigha)

$$V_g = v_f - \lambda\, dv_f/d\lambda \tag{39}$$

lub

$$2\, v_f \cos\Theta\, v_g \cos\Theta = 2(v_f \cos\Theta)^2 + 2\, k_r v_f \cos\Theta\, dv_f \cos\Theta/dk_r \tag{40}$$

otrzymujemy w przypadku (A) $2v_f \cos\Theta\, v_g \cos\Theta/c^2 \approx -(v_f \cos\Theta)^2/c^2$ w przypadku (B) $2\, v_f \cos\Theta\, v_g \cos\Theta/c^2 \approx -(v_f \cos\Theta)^2/c^2$.

Oznacza to, że w obu przypadkach dyspersji przestrzennej prędkość grupowa posiada przeciwny znak niż fazowa, jeśli $k_r \to \infty$. W badanym więc ośrodku istnieją obszary, gdzie prędkość fazowa jest przeciwnie skierowana, niż grupowa.

5. Wnioski, dotyczące efektu Dopplera

Badanie anomalnego, złożonego i odwrotnego efektu Dopplera odbywa się zwyczajnie na podstawie przebiegu krzywych zależności ω_r od k_r. Efekty te są możliwe, jeśli zależność ta jest przedstawiona krzywą o kilku gałęziach. Specjalnie ważne są przejścia od przypadku, gdy krzywa z odpowiednio poprowadzoną prostą może posiadać więcej niż jedno przecięcie. Przejście więc od normalnego efektu Dopplera do innych rodzajów możliwe jest w miejscach, gdzie istnieje więcej gałęzi krzywych, w szczególności w miejscach, gdzie one powstają, gdyż tam styczna zmienia nachylenie, co powoduje możliwość przecięcia z prostą spełniającą określone warunki, charakterystyczne dla danego efektu.

Z powyższych rozważań wynika, że wymienione wyżej rodzaje efektów Dopplera są możliwe w badanym ośrodku.

LITERATURA

[1] Szpilecki J. - Związki dyspersyjne w plazmie ciała stałego o własnościach ferroelektryka i ferromagnetyka, Zesz. Nauk. Pol. Śl. Mat. Fiz. nr 14, 97-120, 1969.

[2] Szpilecki J. - Teoria rozchodzenia się fal w plazmie ciała stałego o własnościach ferroelektryka i ferromagnetyka Zesz. Nauk. Pol. Śl. Mat. Fiz. nr 14, 69-95, 1968.

Spis oznaczeń

W równaniu na indukcję elektryczną D i magnetyczną B występują następujące tensory trzeciego rzędu:

$\alpha_{i,k}$ - tensor wiążący D z E i P,

$\beta_{i,k}$ - tensor wiążący B z H i M,

$\gamma_{i,l,m}$ - tensor współczynników dyspersji przestrzennej przy $\partial E_l/\partial x_m$

$\delta_{i,l,m}$ - tensor współczynników dyspersji przestrzennej przy $\partial E_i/\partial x_m$.

$\Gamma_{1,i,k}$ $\Gamma_{2,i,k}$ - tensory dyspersji przestrzennej przy ΔE_i i $(\partial/\partial x_i)$ (div E),

$\Delta_{1,i,k}$, $\Delta_{2,i,k}$ - tensory współczynników dyspersji przestrzennej przy ΔH_i i $(\partial/\partial x_i)$ (div H),

E, H - wektor natężenia pola elektrycznego lub magnetycznego,

P, M - polaryzacja elektryczna lub magnetyczna,

c - prędkość światła w próżni,

N_1, N_2 - koncentracje nośników ładunków elektrycznych dodatnich i ujemnych,

V_1, V_2 - prędkości nośników elektrycznych,

e_1, e_2 - ładunki nośników elektrycznych,

$c_s^2 = T_s/m_s$. s = 1,2 stałe,

T_s - temperatura nośnika s,

m_s - masa nośnika s,

$\bar{\varepsilon}$, $\bar{\delta}$ - współczynniki w równaniach dla $\dot{M}$ i $\dot{P}$, kropka oznacza pochodną ze względu na czas,

$\bar{A}$, $\bar{B}$ - stałe wymiennego oddziaływania,

$\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ - stałe charakteryzujące relaksację prędkości zmiany P i M,

ω_r - częstość cykliczna r-tej fali,

k_r $(k_{r,x}, k_{r,y}, k_{r,z})$ - wektor falowy.

Indeksem 0 oznaczono stałe składowe odnośnych wielkości.

О НЕКОТОРЫХ ВЫВОДАХ ПО ДИСПЕРСИОННЫМ ФОРМУЛАМ
ВЫВЕДЕННЫМ ДЛЯ ПЛАЗМЫ ТВЕРДОГО ТЕЛА
С ФЕРРОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ И ФЕРРОМАГНИТНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Р е з ю м е

В статье даются некоторые выводы по одному из дисперсионных уравнений, выведенных в одной из предыдущих работ автора относительно фазовой и групповой скорости в связи с аномальным, сложным и обратным эффектами Допплера.

SOME CONCLUSIONS FROM THE DISPERSION FORMULAE DERIVED
FOR SOLID STATE PLASMA WITH FERROELECTRIC
AND FERROMAGNETIC PROPERTIES

S u m m a r y

In the paper are discussed some conclusions concerning the phase and group velocities derived from a formula given in a previous paper of the author in connection with the anomalous, the compound and inverse Doppler effect in solid state plasma with ferroelectric and ferromagnetic properties.