ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1970

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 15 Nr kol. 285

MICHAŁ KOBYLIŃSKI
Katedra Fizyki Technicznej

ROZWIĄZANIE RÓWNANIA LAPLACE'A

Streszczenie. Wyeliminowano z równania Laplace'a $p = \frac{\sigma}{r}$ promień krzywizny "r", otrzymując równanie różniczkowe:

$$\frac{dz}{z^2} = \frac{\varrho g}{\sigma} dX$$

Po scałkowaniu tego równania i wyliczeniu stałej całkowania z warunków granicznych otrzymano wyrażenie:

$$\frac{\varrho g}{\sigma} X + \frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{\varrho g}{\sigma} \frac{1}{1 - \sin\theta}}$$

Kształt powierzchni cieczy przy ściance jest wynikiem gry sił działających na cząsteczki, tworzące warstwy powierzchniowe cieczy, pochodzących od cząsteczek cieczy, cząsteczek ścianki oraz pola grawitacyjnego. W przybliżeniu kształt ten określa równanie Laplace'a (1):

$$\Delta p = \frac{\sigma}{r} \tag{1}$$

Δp - oznacza różnicę ciśnień po obu stronach powierzchni zakrzywionej,

σ - napięcie powierzchniowe cieczy,

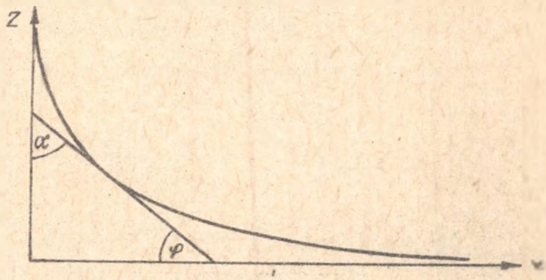
r - promień krzywizny powierzchni.

Jaeger [2] eliminując promień krzywizny z równania Laplace'a otrzymał równanie:

$$\sin\alpha = \frac{2\sigma - \rho g z^2}{2\sigma} = \cos\varphi \qquad (2)$$

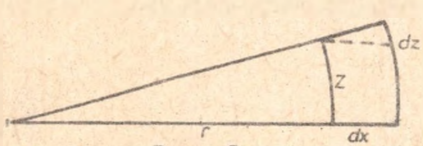
ρ - jest gęstością cieczy, g - oznacza przyspieszenie ziemskie.

W oparciu o to równanie sporządzono wykres powierzchni menisku (rys. 1).



Rys. 1

Równanie w układzie kartezjańskim, będące rozwiązaniem równania Laplace'a otrzymano eliminując promień krzywizny w oparciu o poniższy rysunek (Adamson [3]).



Rys. 2

$$\frac{z}{r} = \frac{z + dz}{r + dx} \rightarrow r = \frac{z\,dx}{dz}$$

Ciśnienie hydrostatyczne słupka cieczy w danym punkcie powierzchni równoważy różnicę ciśnień wynikłą z krzywizny tej powierzchni.

Możemy więc różnicę ciśnień Δp zastąpić wyrażeniem ϱgZ. Równanie Laplace'a przyjmie więc postać:

$$\varrho gZ = \frac{\sigma dz}{Z\, dx} \tag{3}$$

Po przekształceniu otrzymujemy:

$$\frac{dz}{Z^2} = \frac{\varrho g}{\sigma}\, dx \tag{4}$$

Po scałkowaniu

$$-\frac{1}{Z} = \frac{\varrho g}{\sigma} X + C$$

Stałą całkowania C obliczamy z warunków granicznych. Gdy $X \to 0$, wówczas Z przyjmuje wartość maksymalną, którą możemy obliczyć z równania (2), podstawiając za kąt α (alfa) wartość kąta granicznego Θ (teta).

$$Z_{max} = \sqrt{\frac{2\sigma}{\varrho g}(1 - \sin\Theta)}$$

stąd

$$\frac{\varrho g}{\sigma} X + \frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{\varrho g}{2\sigma} \cdot \frac{1}{1 - \sin\Theta}} \tag{6}$$

Podstawiając:

$$\frac{\varrho g}{\sigma} = a^2$$

otrzymujemy ostatecznie:

$$a^2 X + \frac{1}{Z} = \frac{a}{\sqrt{2(1 - \sin\Theta)}} \tag{7}$$

Równanie to ze względu na swą prostą postać nadaje się do analizy pola elektrycznego, którego linie załamują się na granicy dielektryków.

LITERATURA

[1] de Laplace P.S. - Mechanique Celeste, Suplement to Book 10, 1806.

[2] Jaeger G., Theoretische Physik, B.I. Hydrodynamik.

[3] Adamson A.W., Chemia fizyczna powierzchni.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Р е з ю м е

Путем исключения из уравнения Лапласа: $\varrho g Z = \frac{\sigma}{r}$ радиуса кривизны r получается дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{Z^2}\,dZ = \frac{\varrho g}{\sigma}\,dX$$

Проинтегрировав это уравнение и вычислив постоянную интегрирования из предельных условий, получаем уравнение:

$$\frac{\varrho g}{\sigma}X + \frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{\varrho g}{\sigma}}\,\frac{1}{\sqrt{1 - \sin\theta}}$$

ON A SOLUTION OF LAPLACE'S EQUATION

S u m m a r y

On eliminating the curvature radius r from the Laplace equation

$$\varrho g Z = \frac{\sigma}{r}$$

the differential equation

$$\frac{1}{Z^2}\, dZ = \frac{\varrho g}{\sigma}\, dX$$

is obtained.

On integration of this equation and on calculation of the integration constant from the boundary conditions, one obtains the equation

$$\frac{\sigma g}{\sigma} X + \frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{\varrho g}{\sigma}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \sin \theta}}$$