ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 36 Nr kol. 625

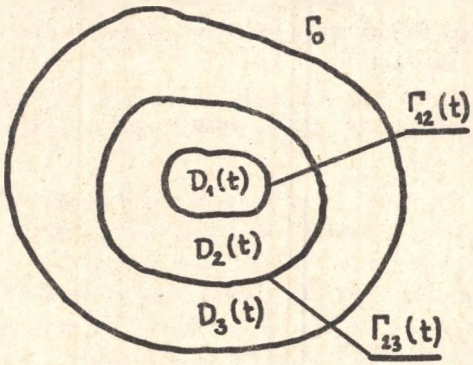
Bohdan MOCHNACKI
Małgorzata BIEDROŃSKA

O PEWNEJ METODZIE PRZYBLIŻONEGO ROZWIĄZANIA PROBLEMU KRZĘPNIECIA

Streszczenie. Artykuł dotyczy wykorzystania funkcji giętych do przybliżonego wyznaczania nieustalonego pola temperatury i kinetyki krzepnięcia odlewów o prostych kształtach (płyta, walec, kula), wykonanych ze stopu krzepnącego w interwale temperatury. Przedstawiona metoda pozwala uwzględnić zmienność parametrów termofizycznych materiału i rozwiązywać zadanie dla dowolnych warunków brzegowo-początkowych. W pracy przedstawiono przykłady obliczeń numerycznych.

1. Równania różniczkowe i warunki jednoznaczności

Rozpatrywać będziemy obszar przestrzenny D odlewu, ograniczony powierzchnią Γ_0 (wewnętrzną powierzchnią formy), w którym zachodzi proces krzepnięcia i stygnięcia metalu.



Rys. 1. Niejednorodny obszar odlewu

Obszar D jest obszarem niejednorodnym i stanowi złożenie trzech podobszarów $D = \bigcup_{m=1}^{3} D_m(t)$ odpowiadających fazie ciekłej, przejściowej i ciału stałemu, przy czym podobszary $D_m(t)$, $m = 1, 2, 3$ zmieniają w czasie swoją konfigurację, zaś ich chwilowe kształty (rys. 1) determinuje położenie izoterm

$$U(X,t) = U_1$$
$$U(X,t) = U_2 \tag{1}$$

gdzie:

$U, X = \{x_1, x_2, x_3\}$, t - kolejno oznaczają temperaturę, współrzędne przestrzenne, czas,

U_1, U_2 - wynikające z wykresu równowagi temperatury początku i końca krzepnięcia metalu (stopu).

Nieustalone pole temperatury w objętości odlewu można z dobrym przybliżeniem opisać układem równań różniczkowych

$$c_m(U)\varrho_m(U)U'_t = \nabla[\lambda_m(U)\nabla U(X,t)] + \dot{q}_{vm}, \quad m = 1, 2, 3 \tag{2}$$

gdzie:

c_m, ϱ_m, λ_m - parametry termofizyczne (właściwa pojemność cieplna, gęstość masy, współczynnik przewodzenia ciepła),

$\dot{q}_{vm}$ - objętościowa wydajność wewnętrznych źródeł ciepła w $D_m(t)$,

∇ - operator Hamiltona.

Układ równań (2) uzupełniają warunki brzegowe i początkowe, które podane zostaną w dalszej części pracy.

Występujący w równaniach (2) składnik $\dot{q}_{vm}$ zeruje się dla $m = 1, 3$, zaś w fazie przejściowej $(m = 2)$ jest proporcjonalny do szybkości zmiany lokalnego udziału ciała stałego w otoczeniu punktu $P(X) \in D_2(t)$.

Przyjęcie takiego założenia sprowadza równanie przewodnictwa w omawianym podobszarze do postaci

$$c_2(U)\varrho_2(U)U'_t = \nabla[\lambda_2(U)\nabla U(X,t)] + \varrho_3 q_{kr} S'_t \tag{3}$$

W równaniu (3) ϱ_3 jest gęstością ciała stałego w temperaturze U_2, q_{kr} ciepłem przemiany fazowej, zaś $S(X,t)$ lokalnym udziałem objętościowym ciała stałego w fazie przejściowej stopu.

Uzależnienie funkcji $S(X,t)$ od chwilowej temperatury $U(X,t) \in [U_2, U_1]$ w punkcie $P(X)$ obszaru $D_2(t)$ pozwala wprowadzić do równania (3) tzw. zastępczą pojemność cieplną fazy przejściowej [1, 2, 3, 4].

$$C_2(U) = c_2(U)\varrho_2(U) - \varrho_3 q_{kr} S'_U \tag{4}$$

Ponieważ dla $U > U_1$ $S(U) \overset{df}{=} 0$, zaś dla $U < U_2$ $S(U) \overset{df}{=} 1$, więc układ równań

$$C_m(U)U'_t = \nabla[\lambda_m(U)\nabla U(X,t)] \quad m = 1, 2, 3 \tag{5}$$

opisuje nieustalone pole temperatury w całym obszarze D.

Problemy modelowania pola temperatury w obszarach o zmiennej w czasie geometrii są bardzo złożone, zaś efektywne rozwiązanie numeryczne uzyskiwano dotychczas najczęściej na bazie metod różnicowych. Istnieje jednak możliwość "ujednorodnienia" obszaru D i sprowadzenia układu równań (5) do jednego równania parabolicznego w pochodnych cząstkowych obowiązującego w całym modelowanym obszarze. Wykorzystano tu koncepcję przedstawioną w procesach Sajranta, Slacka i Warszawskiego (por. [5]), zaś szczegóły dotyczące przedstawionych niżej przekształceń, modyfikacji warunków brzegowych i doboru funkcji $H(U)$, $T(U)$, $\Phi(T)$ omówiono w [6].

Definiuje się funkcje

$$H(U) = \int_{U^*}^{U} C(\xi)d\xi \qquad C(U) = \begin{cases} C_1(U); & U > U_1 \\ C_2(U); & U \in [U_2, U_1] \\ C_3(U); & U < U_2 \end{cases} \tag{6}$$

oraz

$$T(U) = \int_{U^*}^{U} \lambda(\xi)d\xi \qquad \lambda(U) = \begin{cases} \lambda_1(U); & U > U_1 \\ \lambda_2(U); & U \in [U_2, U_1] \\ \lambda_3(U); & U < U_2 \end{cases} \tag{7}$$

gdzie U^* jest dowolnie przyjętym poziomem odniesienia.

Wykorzystanie funkcji $H(U)$ oraz $T(U)$ sprowadza układ równań (5) do równania

$$\Phi'(T)T'_t = \nabla^2 T(X,t) \tag{8}$$

Funkcja $\Phi'(T)$ jest pochodną dH/dT. Sposób tworzenia ww. funkcji przedstawiono w [6].

Na brzegu $\Gamma_o = \bigcup_{k=1}^{3} \Delta\Gamma_{ok}$ ograniczającym obszar odlewu można wyróżnić elementy $\Delta\Gamma_{ok}$, na których zadane są warunki I, II lub III rodzaju ($k = 1, 2, 3$).

Warunki determinujące przepływ ciepła przez powierzchnię graniczną Γ_o po wprowadzeniu do rozważań funkcji $T(X,t)$ przyjmują postać:

$$P(X) \in \Delta\Gamma_{01} : \quad T\big|_{\Delta\Gamma_{01}} = T(P,t)$$

$$P(X) \in \Delta\Gamma_{02} : \quad -T'_n\big|_{\Delta\Gamma_{02}} = q(P,t) \tag{9}$$

$$P(X) \in \Delta\Gamma_{03} \quad : \quad -T_n' \Delta\Gamma_{03} = \frac{\alpha}{\lambda_m} T(P,t)$$

gdzie:

T_n' - pochodna funkcji $T(P,T)$ w punkcie $P(X)$ w kierunku normalnym do brzegu obszaru,

$\dot{q}(P,t)$ - zadany strumień ciepła na powierzchni $\Delta\Gamma_{02}$,

α, λ_m - współczynnik wymiany ciepła do otoczenia i średni współczynnik przewodzenia ciepła w interwale temperatury brzeg - otoczenie (jako poziom odniesienia przyjęto temperaturę otoczenia).

Równanie (8) i warunki (9) uzupełnia warunek początkowy zadania

$$P(X) \in D \quad : \quad T(X,0) = T_0(X) \tag{10}$$

Dla obszarów warstwowych, walcowych i kulistych w przypadku jednowymiarowego zadania przewodnictwa cieplnego równanie (8) można zapisać w postaci

$$\Phi'(T)T_t' = \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + \frac{z}{x}\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}, \quad z = 0,\ 1,\ 2 \tag{11}$$

które dla $z = 0$ dotyczy płyty, dla $z = 1$ walca nieskończonego, zaś dla $z = 2$ kuli. W dwóch ostatnich przypadkach dla $x = 0$ prawa strona równania (11) sprowadza się do $(1 + z)T_{xx}''$ z warunkiem $T_n'(0) = 0$.

2. Przybliżone rozwiązanie jednowymiarowego zadania przewodnictwa cieplnego przy zastosowaniu funkcji giętych

Rozpatrywany będzie obszar odlewu, w którym proces przepływu ciepła opisuje równanie (11), $x \in [a,b]$ z zadanymi na brzegu warunkami (9) i warunkiem początkowym (10).

W przedziale $[a,b]$ ustala się siatkę Δ_n: $a = x_0 < x_1, \ldots, x_n = b$, zaś w przedziale czasu $[0,\infty)$ siatkę o kroku $\Delta t^p = t^{p+1} - t^p$. Chwilowy rozkład funkcji $T(x,t)$ w wyróżnionym na osi czasu węźle $t^{p+1} = t^p + \Delta t^p$ przybliża się sześcienną funkcją giętą $S_3(x)$ defektu 1, następującej postaci [8]

$$T(x,t) = S_3(x) = \sum_{s=0}^{3} a_s x^s + \sum_{s=1}^{n-1} \alpha_s (x-x_s)_+^3 \tag{12}$$

Aby wyznaczyć współczynniki określające funkcje $S_3(x)$, zakłada się, że spełnia ona równanie (11) w węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_n$ oraz warunki brzegowe w granicznych węzłach siatki x_0 i x_n.

Pochodną T'_t w węźle x_i przybliża się ilorazem różnicowym

$$T'_t(x_i) \approx \frac{T(x_i, t^{p+1}) - T(x_i, t^p)}{\Delta t^p} = \frac{S_3(x_i) - T(x_i, t^p)}{\Delta t^p} \qquad i = 0, 1, \ldots, n \tag{13}$$

Dla węzłów $x_0, x_1, \ldots, x_n$ otrzymuje się $n+1$ liniowych równań postaci

$$\Phi'(x_i, t^p)\,\frac{S_3(x_i) - T(x_i, t^p)}{\Delta t^p} = \frac{d^2 S_3(x_i)}{dx^2} + \frac{z}{x_i}\,\frac{dS_3(x_i)}{dx} \qquad i = 0, 1, \ldots, n \tag{14}$$

czyli

$$\sum_{s=0}^{3} a_s \left[x_i^s - \frac{\Delta t^p}{\Phi'(x_i, t^p)}\, x_i^{s-2}\, s(s-1+z) \right] + \sum_{s=1}^{n-1} \alpha_s (x_i - x_s)^3 -$$

$$- 3\,\frac{\Delta t^p}{\Phi'(x_i, t^p)}\,(x_i - x_s)\left(2 + \frac{z}{x_i}(x_i - x_s)\right)\Bigg] = T(x_i, t^p) \qquad i = 0, 1, \ldots, n \tag{15}$$

Układ równań (15) uzupełniają dwa równania wynikające z zadanych warunków brzegowych. W zależności od rozpatrywanego zadania są to dwa z poniższych równań

$$\begin{aligned} S_3(x_i) &= T_i(t^{p+1}) && i = 0, n \\ -\frac{dS_3(x_i)}{dx} &= \dot{q}_i(t^{p+1}) && i = 0, n \\ -\frac{dS_3(x_i)}{dx} &= \frac{\alpha_i}{\lambda_{mi}}\, S_3(x_i) && i = 0, n \end{aligned} \tag{16}$$

3. Przykłady obliczeń numerycznych

Przedstawiony wyżej algorytm wykorzystano do przybliżonego rozwiązania problemu krzepnięcia stalowej płyty. Do obliczeń numerycznych przyjęto dwie grubości płyty: $G_1 = 0{,}2$ m, $G_2 = 0{,}1$ m. Płyta była wykonana ze stali węglowej o zawartości 0,35% węgla, temperatura zalewania ciekłym metalem $U_{zal} = 1520^0$, na styku odlewu i formy przyjęto warunek I rodzaju

$U(b) = 800^{\circ}$, co odpowiada średniej temperaturze kontaktu w typowych układach wlewek-wlewnica, przy czym przyjęcie bardziej dokładnych warunków brzegowych nie zmienia istoty i złożoności zaproponowanego algorytmu.

Oś płyty pokrywa się z osią symetrii cieplnej. Do konstrukcji funkcji $\Phi'(T)$ wykorzystano dane doświadczalne cytowane w literaturze radzieckiej. Jeżeli wymiary liniowe układu zostaną zadane w 10^{-1} m, to wartości liczbowe funkcji $\Phi'(T)$ określają zależności

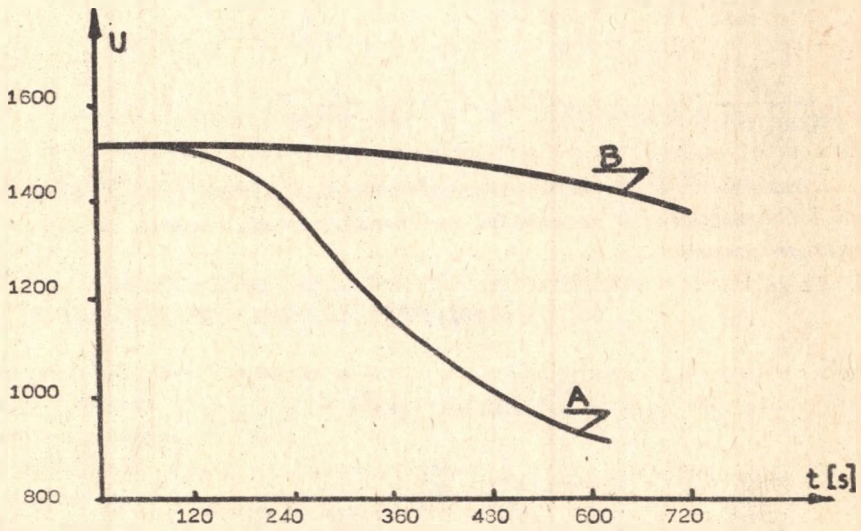
$$T < 4.8687 \qquad \Phi(T) = 2083.4$$

$$T > 5.1818 \qquad \Phi'(T) = 1952.7$$

$$T \in [4.8687,\ 5.1818] \qquad \Phi'(T) = -8160131 + 325200.6T - 323606.1T^2$$

Jak łatwo zauważyć, funkcja $\Phi'(T)$ jest ciągła na roboczym odcinku krzywej $H = \Phi(T)$.

Na rysunku 2 przedstawiono krzywe stygnięcia w osi płyt $G_1 = 0{,}2$ m (krzywa b) i $G_2 = 0{,}1$ m (krzywa a).



Rys. 2. Krzywe stygnięcia płyt staliwnych

Stała krzepnięcia dla odlewów staliwnych, stygnących w warunkach zbliżonych do warunków przyjętych w obliczeniach numerycznych wynosi około 0.0039 $ms^{1/2}$. Czas krzepnięcia (tzn. czas, po którym temperatura w osi płyty osiągnęła wartość 1470°) odlewu o grubości $G_1 = 0{,}2$ m wynosi około 600 s, zaś czas krzepnięcia płyty $G_2 = 0{,}1$ m 190 s. Obliczona stąd

stała krzepnięcia dla odlewu 0,2 m wynosi $K_1 = 0.0041\ m.s^{-1/2}$, dla odlewu 0,1 m $K_2 = 0.0036\ m.s^{-1/2}$, co wskazuje na zgodność wyników obliczeń numerycznych z rzeczywistymi krzywymi stygnięcia układu.

Obliczenia numeryczne przeprowadzone zostały na EMC WANG 2200.

LITERATURA

[1] Kozdoba L.A.: Nieliniejnyje problemy tiepłoprowodności. Nauka, Moskwa 1975.

[2] Samojłowicz I.A.: Formirowanije slitka. Mietałurgia, Moskwa 1975.

[3] Bałandin G.E.: Osnowy tieorii formirowanija otliwki. Maszinostr., Moskwa 1976.

[4] Mochnacki B., Zabawa R.: Rozkład wewnętrznych źródeł ciepła w fazie przejściowej stopu Fe-C... Sympozjum "Modelowanie w mechanice", mat. Beskid Śląski 1979.

[5] Szargut J.: Metody numeryczne w obliczeniach cieplnych procesów przemysłowych. Śląsk 1977.

[6] Mochnacki B., Mazur K.: Zastosowanie metody elementu skończonego do symulacji procesu krzepnięcia odlewu. Zeszyt Naukowy Politechniki Śląskiej En. 67/78.

[7] Biedrońska M., Mochnacki B.: Modelowanie problemu przewodnictwa cieplnego przy zastosowaniu funkcji giętych. Archiwum Budowy Maszyn (złożono do druku).

[8] Stieczkin S.B., Subbotin J.N.: Spłajny w wyczislitielnoj matiematikie. Moskwa 1976.

О НЕКОТОРОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ

Р е з ю м е

В работе представлен нумерический метод решения проблемы затвердевания при использовании сплайнов.

ABOUT CERTAIN METHOD OF SOLUTION OF SOLIDIFICATION PROBLEM

S u m m a r y

The subject of this work is description of a certain numerical method which uses the spline functions for approximation of solidification problem.