Serie: MATEMATYKA-FIZYKA z. 36

Nr kol. 626

alled w mistyny warturle

Piotr BEDNORZ

ZASTOSOWANIE FIZYKALNIE NIELINIOWEJ TEORII NAPRĘŻEŃ CIEPLNYCH W OŚRODKACH GRAFITOWYCH

II. ANALITYCZNY OPIS KRZYWYCH ODKSZTAŁCENIA

<u>Streszczenie</u>. W pracy zaproponowano ciągi iteracyjnych równań konstytutytwnych, które opisują zależności między tensorami naprężeń i odkształceń: równanie te przedstawiają nieliniowe związki Kauderera.

 $\frac{1}{100} = \frac{2}{2010} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} +$

(and)as + fa

1. Watep

Równania konstytutywne dla ośrodków grafitowych zostały zaproponowane dopiero niedawno, por. [8], [10]. Pierwsze próby opisu zachowania się takich ośrodków – z punktu widzenia mechaniki ośrodków cięgłych – sugerowały wykorzystanie teorii fizykalnie nieliniowej Kauderera. Teoria fizykalnie nieliniowa może być rzeczywiście wykorzystana, lecz jedynie jako pierwsze przybliżenie, w którym pomija się wiele wpływów, m.in. anizotropii. W pracach [8], [9], [10] zaproponowano pewną modyfikację teorii Kauderera. Wprowadzono tam pewną funkcję intensywności odkształceń, niezależną od atanu naprężeń i od kierunku obciążeń. Bardzo głębokie ujęcie teorii fizykalnie nieliniowych znajduje się w monografiach [11], [12]. W przedatawionej tutaj pracy ze względu na złożony charakter równań konstytutywnych – wprowadzono ciągi iteracyjne tych równań; doprowadziło to do ciągu równań przedstawionych przez Kauderera.

2. Równania konstytutywne

Badania doświadczalne wykazują, że dla ośrodków grafitowanych nie są spełnione założenia teoretyczne fizykalnie nieliniowej teorii Kauderera, per. [4], [7], [8]. Doświadczalnie nie możemy więc potwierdzić dwóch następujących założeń teoretycznych.

reasonable a state . I is a comparate seasonable shorthan or

1[°] Wymagana jest zgodność kierunków tensora podobieństwa naprężenia S_{ij} i odkształcenia e_{r s}

2.1)

gdzie:

$$\hat{S}_{1j} = \frac{S_{1j}}{6_{(1)}}, \quad \hat{e}_{1j} = \frac{\hat{e}_{11}}{\hat{e}_{(1)}}, \quad (2.1)$$

2° Żądamy, aby zależności $G_{(1)} = G_{(1)}(\ell_{(1)})$, $G_0 = G_0(\ell_0)$ miały charakter niezmienniczy względem dowolnego stanu naprężenia; warunek 2° zapisujemy zwykle w postaci

$$\frac{\delta_{(1)}}{\epsilon_{(1)}} = 2G(\epsilon_{(1)}), \quad \frac{\delta_0}{\epsilon_0} = 3K(\epsilon_0), \quad (2.2)$$

lub w postaci zależności odwrotnych, w stosunku do (2.2)

$$\frac{\mathcal{E}_{(1)}}{\mathcal{E}_{(1)}} = \frac{1}{2G(\mathcal{E}_{(1)})}, \quad \frac{\mathcal{E}_{0}}{\mathcal{E}_{0}} = \frac{1}{3K(\mathcal{E}_{0})}. \quad (2.2)$$

Opierając się na wynikach badań doświadczalnych (por. [7], [8], [12]), przyjmujemy dla ośrodków grafitowych warunek 2° w postaci zmodyfikowanej; warunek 1°, mimo iż nie jest w pełni spełniony, przyjmujemy w postaci niezmienionej, por. równanie (2.1). Przyjmujemy więc:

$$\hat{s}_{ij} = \hat{e}_i$$

2° Funkcje $\delta_0(\hat{e}_0), \eta_{\Sigma}(\hat{e}_{(1)}), \hat{e}_0(\delta_0), \hat{e}_{(1)}(\eta_{\Sigma})$ nie zależą od stanu naprężeń 1 odkaztałceń.

Funkcja $\gamma_{\Sigma}(\epsilon_{(1)})$ jest określona wzorem

$$\gamma_{\Sigma}(e_{(1)}) = \sqrt{3/2} \, e_{(1)} \, \chi + \, (1-\chi) e_{1}, \qquad (2.3)$$

gdzie: \mathcal{G}_1 jest maksymalną składową naprężeń głównych, \mathcal{X} - określamy jako wartość graniczną ilorazu $\mathcal{G}_r/\mathcal{G}_g$, gdzie \mathcal{G}_r - naprężenie przy jednoosiowym rozcięganiu, a \mathcal{G}_r - naprężenie przy jednoosiowym ściskaniu.Badania doświadczalne, por. [8], [12], potwierdzają niezmienniczy charakter funkcji $\mathcal{P}_{\Sigma}(\mathcal{E}_{lij})$.

Naprężenia główne 6, można przedstawić w postaci

$$6_1 = S_1 6_{(1)} + 6_0.$$
 (2.4)

Po uwzględnieniu w równaniu (2.3) równania (2.4) uzyskamy

 $2\Sigma(\epsilon_{(1)}) = x\sqrt{3/2} \ \delta_{(1)} + (1-x)\hat{s}_1 \delta_{(1)} + (1-x)\delta_0,$

Zastosowanie fizykalnie nieliniowej teorii.... II.

skąd przyjmując, że $\hat{S}_1 = \hat{e}_1 - por. zsł. 1^o - otrzymany$

$$S_{(1)} = \frac{7 \sum^{-1} (1-\chi) G_0}{\chi \sqrt{3/2} + (1-\chi) \widehat{e}_1}, \qquad (2.5)$$

Dalej otrzymujemy

$$\frac{\delta_{(1)}}{\hat{\ell}_{(1)}} = \overline{2G}(\hat{\ell}_{(1)}, \hat{\ell}_{0}, \hat{\hat{e}}_{1}) = \frac{\gamma_{\Sigma}(\hat{\ell}_{(1)}) - (1-\chi)\hat{e}_{0}(\hat{\ell}_{0})}{(\chi/3/2) + (1-\chi)\hat{e}_{1})\hat{\ell}_{(1)}}.$$
(2.5)

Z założeń 1° i 2° mazy

$$S_{ij} = e_{ij} \overline{2G}(e_{(i)}, e_{o}, e_{i}), \quad G_{o} = 3K(e_{o})e_{o}.$$
 (2.6)

Przedstawiając tensor naprężeń jako sumę dewiatora i części kulistej. otrzymujemy:

$$\delta_{ij} = e_{ij} \frac{\Re \sum_{(\ell_{(1)})} (1-\chi) \Im (\ell_{0}) e_{0}}{(\chi \sqrt{3/2} + (1-\chi) \hat{e}_{1}) e_{(1)}} + \delta_{ij} e_{0} (\Im (\ell_{0})).$$
(2.7)

Podstawiając

$$\mathbf{e}_{\mathbf{ij}} = \dot{\mathbf{e}}_{\mathbf{ij}} = \delta_{\mathbf{ij}} \dot{\mathbf{e}}_{\mathbf{o}}, \qquad (2.7)$$

po przekształceniach otrzymany

$$\delta_{ij} = \delta_{ij} \frac{2\Sigma^{(\ell_{(1)}) - (1-\chi)3K(\ell_{0})\ell_{0}}}{(\chi\sqrt{3/2} + (1-\chi)\hat{e}_{1})\ell_{(1)}} - \delta_{ij}\ell_{0}(3K(\ell_{0}) - \frac{2\Sigma^{(\ell_{(1)}) - (1-\chi)3K(\ell_{0})\ell_{0}}}{(\chi\sqrt{3/2} + (1-\chi)\hat{e}_{1})\ell_{(1)}}$$
(2.8)

W celu uzyskania relacji odwrotnej, tj. odkaztażcenie – naprężenie, funkcję odwrotną do funkcji $\eta_{\sum}(\mathcal{E}_{(i)})$ należy przyjąć w postaci

$$\mathcal{E}_{(1)} = \frac{\mathcal{E}_{(1)}(\eta_{\Sigma})}{\mathcal{O}_{(1)}} \mathcal{O}_{(1)} = \frac{\mathcal{E}_{(1)}(\mathcal{O}_{(1)}\chi\sqrt{3/2} + (1-\chi)\mathcal{O}_{1})}{\mathcal{O}_{(1)}}, \qquad (2.9)$$

Postępując enalogicznie jak uprzednio, otrzymujemy

$$\theta_{1j} = \frac{\theta_{(1)}(\eta_{\Sigma})G_{11}}{G_{(1)}} + \frac{1}{3K(G_{0})} - \frac{\theta_{(1)}(\eta_{\Sigma})}{G_{(1)}} \theta_{1j}G_{0}.$$
(2.10)

Równania (2.8), (2.10) możemy przedstawić w postaci

$$\delta_{1j} = \epsilon_{1j} \overline{26}(\epsilon_{(1)}, \epsilon_{0}, \hat{\epsilon}_{1}) + \delta_{1j} \epsilon_{a} (3\kappa(\epsilon_{0}) - \overline{26}(\epsilon_{(1)}, \epsilon_{0}, \hat{\epsilon}_{1})),$$

(2,11)

$$\epsilon_{ij} = \sigma_{ij} \frac{1}{2\overline{c}(\sigma_{(1)}, \sigma_{\sigma}\sigma_{1})} + \sigma_{ij}\sigma_{\sigma} \frac{-1}{2\overline{c}(\sigma_{(1)}, \sigma_{\sigma}, \sigma_{1})} + \frac{1}{3K(\sigma_{\sigma})}$$

Równania (2.11) sę analogiczne do równań nieliniowej teorii Kauderera, ze względu jednak na to, że $\overline{2G} = \overline{2G}(\ell_{(1)}, \ell_0, \hat{e}_1)$ jest funkcją nie tylko $\ell_{(1)}$, nie możemy w pełni korzystać z tej teorii.

By umożliwić pełne wykorzystanie wyników teorii Kaudarera, wprowadzamy tensor F₁₁ – określony jako tensor przybliżony; przyjmujemy, że

$$\mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}_{(i)} \hat{\mathbf{E}}_{ij} + \delta_{ij} \mathbf{F}_{kk}, \qquad (2.12)$$

gdzie:

$$F(i) = 7 \sum_{k=1}^{\sqrt{3/2}}, \hat{E}_{ij} = \hat{S}_{ij}, F_{kk} = 6_{kk}, F_{o} = 6_{o}.$$
 (2.12)

Z równości (2.12) i (2.3) mamy

$$F_{(1)} = G_{(1)} \chi + m G_{(1)} \hat{E}_{1} + m F_{0}, \qquad (2.13)$$

gdzie w równaniu (2.13) przyjęto $m = (1-\chi)/\sqrt{3/2}$.

Mnożęc (2.13) przez S_{ij} i dodając 1/3 S_{ij}F_{kk}, otrzymujemy

$$F_{ij} = (2 + m\hat{E}_{1})S_{ij} + mF_{o}\hat{E}_{ij} + \delta_{ij}F_{o}(1 - 2 - m\hat{E}_{1})$$
(2.14)

Wykorzystując rozbicie tensora d_{ij} na część dewiatorową i kulistę, a także równanie (2.12)₂ otrzymamy po przekształceniach

$$\boldsymbol{\delta}_{ij} = \boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{F}_{ij} \left(\frac{1}{\boldsymbol{\chi}_{+} m \hat{\boldsymbol{E}}_{i}} \left(1 - \frac{\boldsymbol{F}_{o} m}{\boldsymbol{F}_{(i)}} \right) - 1 \right) +$$

(2.15)

$$-\delta_{ij}F_{o}\left(\frac{1}{\chi_{+}}\prod_{m=1}^{A}\left(1-\frac{F_{o}}{F_{(i)}}\right)-1\right).$$

Równanie (2.15) skrótowo możemy zapisać

$$\delta_{ij} = F_{ij} + F_{ij}h(\hat{E}_{1}, F_{0}, F_{(i)}) - \delta_{ij}F_{0}(\hat{E}_{1}, F_{0}, F_{(i)}), \quad (2.16)$$

Wykorzystując wzór (2.16), możemy powiązmć tensor F_{ij} z działającym polam obciążeń

$$\delta_{ij,j} + X_{i} = F_{ij,j} + F_{ij,j}h + F_{ij}h, j - \delta_{ij}F_{o,j}h - \delta_{ij}F_{o}h, j + X_{i} = 0,$$

(2.17)

$$\delta_{ij}n_j = F_{ij}n_j + F_{ij}n_j h - F_{0}h\delta_{ij}n_j = X_i$$

Dla tensorów F_{ij} i & wprowadzamy równania konstytutywne Kauderera w postaci

$$F_{ij} = \ell_{ij}^{2G(\ell_{(i)})} + (3K(\ell_{0}) - 2G(\ell_{(i)}))\ell_{0}\delta_{ij}.$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2G(F_{(i)})} + \frac{1}{3K(F_0)} - \frac{1}{2G(F_{(i)})} F_0 \delta_{ij}.$$
 (2.18)

Rozpatrując jednoosiowe rozciąganie, stwierdzamy, że $F_{(1)} = G_{(1)} = \sqrt{2/3} G_x$. Wynika stąd, iż przyjęcie równości $G_{ij} = F_{ij}$ i h = 0 jest równoznaczne z proponowanym przez W.J. Strokowa i W.N. Barabonowa (por. [12]) zastosowaniem zależności $G_{(i)} = G_{(i)}(\ell_{(i)})$. $\ell_{(i)} = \ell_{(i)}(G_{(i)})$ do budowy równań konstytutywnych typu Kauderera. Dalej zakładamy, że przyjmując h = 0, możemy wyznaczyć tensor $F_{ij} = F_{ij}$ i $\ell_{ij} = \ell_{ij}$. wykorzystując warunki równowagi w postaci (2.17) i równania konstytutywne (2.18): (0) (0) (0) przyjmujemy również, że tensor F_{ij} jest równy pierwszemu przybliżeniu (0) (0) (0)

Dalezych przybliżeń szukamy przyjmując

(n) (n) (n) (n) (n) (n)

$$F_{ij} = \hat{e}_{ij} 2G(\hat{e}_{(i)}) 3K(\hat{e}_{o}) - 2G(\hat{e}_{(i)}) \hat{e}_{o} \hat{o}_{ij},$$

(2 20)

gdzie:

$$\begin{array}{cccc} (n-1) & (n-1) & (n-1) & (n-1)(n-1) & (n-1)(n-1) \\ x_{i} = x_{i} + F_{ij,j} & h + F_{ij} & h, j - \delta_{ij} & F_{o,j} & h - \delta_{ij} & F_{o} & h \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (n-1) & (n-1) & (n-1) \\ \chi_{1} = -F_{ij}n_{j}h \\ \end{array} = \delta_{ij}n_{j} \\ F_{0} \\ \end{array} \begin{array}{c} (n-1)(n-1) \\ F_{0} \\ \end{array} + \chi_{1}. \end{array}$$

Można wykazać, że związki konstytutywna (2.11), (2.18) sę równoważne; uzyskujemy to, wstawiając do równań (2.11) za o wyrażenie (2.16), a wtedy otrzymujemy (2.18).

Przy założeniu, że funkcje $\gamma \sum (\mathcal{E}_{(1)})$, $\delta_0(\mathcal{E}_0)$ i funkcje odwrotne w pewnych przedziałach temperatur nie zależą w sposób jawny od temperatury, możemy dołączyć człony wynikające ze zmian temperatury, por. [3]; dla większości przypadków grafitu współczynnik rozazerzalności liniowej α (Θ) (α (Θ) – jest współczynnikiem średnim $\alpha_S(\Theta)$ lub też $\alpha_H(\Theta)$ – współczynnikiem w kierunku ułożenia warstw krystalicznych grafitu lub α_\perp – współczynnikiem w kierunku prostopadłym do nich) jest funkcją przyrostu temperatury, przedziałami liniową, per. [13], czyli α (Θ) = Θ + b.

Równania konstytutywne (2.18) pe dołączeniu członów desypacyjnych mają postać

$$\hat{b}_{ij} = \frac{1}{2G(F_{(1)})} F_{ij} + \frac{1}{3K(F_0)} - \frac{1}{2G(F_{(1)})} F_0 \hat{b}_{ij} + (a+b\theta) \hat{b}_{ij}\theta,$$

$$F_{ij} = \mathcal{E}_{ij}^{2G(\mathcal{E}_{(1)})} + (3K(\mathcal{E}_o - (a+b\Theta)\Theta)(\mathcal{E} - (a+b\Theta)\Theta)\delta_{ij} - 2G(\mathcal{E}_{(1)})\mathcal{E}_o\delta_{ij}$$

Równania (2.11) wzbogacone o czynnik termiczny są analogiczne do równań (2.21).

3. Aproksymacja wielomianowa

Wykresy przedstawione na rysunkach 1, 2, przedstawiają zależności $\delta_0(\hat{e}_0)$, $?_{\Sigma}(\hat{e}_{(1)})$ dla grafitu ARW, por. [12]. Jeżeli odkaztałcenia w danej konstrukcji spełniają warunek $\hat{e}_0 \in (0, \hat{e}_0) \land \hat{e}_{(1)} \in (0, \hat{e}_{(1)})$, te krzywe na -ry-



Rys. 1

1 - dwuosiowe rozciąganie równomierne, 2 - dwuosiowe rozciąganie nierównomierne, 3 - jednoosiowe rozciąganie





1 - jednoosiowe rozciąganie,2 jednoosiowe ściekanie, 3 - ścinania, 4 - dwuosiowe rozciąganie nierównomierne, 5 - dwuosiowe rozciąganie równomierne

sunkach 1, 2 możemy aprokeymować wielomianami danego stopnia. Większość gatunków grafitu ma zbliżony przebieg krzywych odkaztałcenia do krzywych z rysunku 1, 2 odpowiadających grafitowi ARW; oczywiście występują tutaj różnice w wartościach liczbowych, lecz kształt krzywych jest podobny (liczne przykłady – por. [4], [7], [12]). Wystarczającą dokładność daje przyjęcie funkcji $\mathcal{O}_{0}(\ell_{0}), \tau_{\Sigma}(\ell_{(1)})$ w postaci wielomianów trzeciego atopnia.

Równania konstytutywne z wykorzystaniem sproksymacji wielomianowej mają postać

$$\mathcal{E}_{ij} = F_{ij}^{(b} + b_{2F}^{F}(i) + b_{3F}^{(2)} + \delta_{ij}^{F_{0}}^{(d_{1}+d_{2}F_{0}+d_{3}F_{0}^{2}-b_{1F}^{-b} + 2F}^{F}(i) + (a+b\theta)\delta_{i}^{\theta},$$

$$F_{ij} = e_{ij}(e_{1F} + e_{2F}e_{(i)} + e_{3F}e_{(i)}) + \delta_{ij}(c_1 + c_2(e_0 - (a+b\theta)\theta) + c_3(e_0 - (a+b\theta)\theta)^2$$

$$(\mathcal{E}_{o}^{-(a+b)}) = \delta_{ij} \mathcal{E}_{o}^{(a_{1}+a_{2}+b_{1})} \mathcal{E}_{(i)}^{+a_{3}} \mathcal{E}_{(i)}^{+a_{3}}).$$

Przykładowe dla grafitu ARW wyniki aproksymacji · przedstawione są w teblicy 1, por. [1].

Ta	b1	10	a 1
----	-----------	----	-----

MN/m2		(MN/mª)-4			
Que	Q ₁₇ ·	asr	b _#	b _{gs}	bar
4084.5	0	-1.21-108	2.446-10-10	0	1466.10-*
6.	C.	C _a	d,	dı	ds
6082.2	-806580	0	1.644 - 10	1920.10-10	0

Przy obliczeniach współczynników przyjęto, że $\mathcal{E}_{(1)} = \bigvee_{ij}^{e} ij^{e} ij^{d} (1) = \int_{ij}^{e} ij^{e} ij^{d} (1) = \int_{ij}^{e} ij^{e} ij^{d} (1) = \int_{ij}^{e} ij^{e} ij^{e} ij^{d} ij^{d} (1) = \int_{ij}^{e} ij^{e} ij^{e} ij^{d} ij^{d} (1) = \int_{ij}^{e} ij^{e} ij^{d} ij^$

4. Wnioski końcowe

- Materiały takie jak grafit charakteryzują się silną nieliniowością fizykalną, której nie można w ogólności opisać nieliniowością typu Kauderera.
- Ze względu na bardzo złożony kształt nieliniowości fizykalnej (wpływ naprężenia głównego czy też odkształcenia - E₁), zaproponowano iteracyjne równania konstytutywne, które po tej modyfikacji okazały się równaniami Kauderera.
- Do rozwiązania zadanie należy wprowadzić podwójny proces iteracyjny, jeden w równaniach konstytutywnych, drugi w równaniach problemu brzegowego.
- Problem aproksymacji funkcjami danych pomiarowych potraktowany zostaż szkicowo, stanowi to bowiem osobny temat, wymagający opracowania odpowiednich programów.

LITERATURA

- Bednorz P.: Zastosowanie fizykalnie nieliniowej teorii naprężeń cieplnych w ośrodkach grafitowych. Omówienie badań doświadczalnych. Zesz. Nauk. Pol. Śl., Mat.-Fiz., 1979.
- [2] Bednorz P.: Termosprezystość nieliniowa w ośrodkach grafitowych.Praca mg., Pol. Šl., Mat.-Fiz., 1978.
- [3] Borkowski Sz.: Dynamical equations of physically nonlinear thermoelasticity, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. tech.9, 24 (1976),655-662.
- [4] Coffin L.F., Shenctady J.R.: The flow and fracture of a brittle material, Journal of Applied Mechanics, VII, 1950, 233-247.

Zastosowanie fizykalnie nieliniowej teorii..., II.

- [5] Kauderer H.: Nichlineare Mechanik. Springer-Verlag, Berlin, 1958.
- [6] Lebiedziejewski M., Szudek M.: Wyroby z węgla i grafitu. WNT, Warszawa 1970.
- [7] Фридман А.М., Барабанов В.Н.: Некоторые особенности методики исследования прочностных свойств графитов при плоском напряженном состояние, Зав. Лаб., № 9, 972, 1137-1140.
- [8] Ковальчук Б.И., Лебедев А.А.: Деформационные свойства серого чугуна при плоском напряженном состоянии в условиях низких температур, Пробл. Проч., № 7, 1970, 9-13.
- [9] Надан А.: Пластичность и разрушение твердых тел, ИЛ. 1954.
- [10] Писаренко Г.С., Лебедев А.А.: Сопротивление материалов деформированию и разрушению при сложном напряженом состоянии, Киев 1969.
- [11] Писаренко Г.С., Лебедев А.А.: Сопротивление материалов деформированию и разрушению при сложном напряженом состоянии, Киев 1976.
- [12] Строков В.И., Барабанов В.Н.: Деформируемость конструкционных графитов в условиях сложного напряженного состояния, Проб. Проч., 7, 1977, 104-107.

приденение физически нелинейной теории термических напряжений

В ГРАФИТОВЫХ СРЕДАХ

II. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ФОРМА КРИВЫХ ДЕФОРМАЦИИ

Резюме

В работе сформулировано итерационные последовательности определяющих соотношений для зависимости между тенсорами напряжений и деформации. Полученные уравнения тождественны с нелинейными состношениями Каудерера.

THE APPLICATION OF PHYSICALLY NONLINEAR THEORY OF THERMAL STRESS TO GRAPHITE MEDIA II. ANALYTICAL DESCRIPTION OF THE STRESS-STRAIN CURVES

Summary

The iterative sequences of constitutive equations are proposed for description of the dependence between stress and strain tensors.Obtained relations constitute the nonlinear Kauderer equations.