ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 36 Nr kol. 625

Tadeusz GUZENDA

NAPRĘŻENIA TERMICZNE W TARCZACH FIZYKALNIE NIELINIOWYCH

I. RÓWNANIA PRZEMIESZCZENIOWE

Streszczenie. Podano podstawowe równania przemieszczeniowe tarcz fizykalnie nieliniowych, z uwzględnieniem wpływów termicznych; rozpatrzono przypadki dynamiki i statyki tarcz fizykalnie nieliniowych.

1. Wstęp

Zagadnienie wyznaczania naprężeń termicznych w ośrodkach fizykalnie nieliniowych jest problemem złożonym. Wykorzystanie własności mechanicznych materiałów, takich jak: grafit, żeliwo, polimery, materiały kolorowe, może być w pełni zrealizowane pod warunkiem uwzględnienia nieliniowej charakterystyki (nieliniowe związki konstytutywne). Próbą opisu zachowania się takich ośrodków jest przyjęcie teorii fizykalnie nieliniowej H. Kauderera [4], którą w problemach termosprężystości przedstawiono w pracy [2]. Przegląd publikacji - dotyczących naprężeń termicznych - podano w pracach [1,5,6].

2. Równania przemieszczeniowe dla płaskiego stanu naprężenia

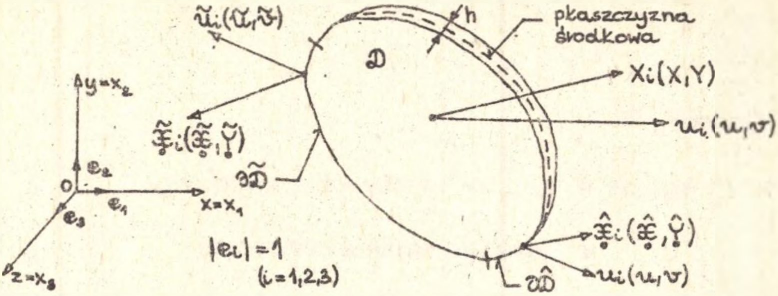
2.1. Zagadnienie dynamiczne

Rozpatrywać będziemy cienką tarczę o grubości h, stałej, której płaszczyzna środkowa pokrywać się będzie z płaszczyzną (Oxy) - por. rys.1; obszar ten oznaczać będziemy przez D, a jego brzeg przez ∂D. Brzeg ten dzielimy na dwa podobszary rozłączne tak, że:

$$\partial D = \partial\hat{D} \cup \partial\tilde{D}, \quad \partial\hat{D} \cap \partial\tilde{D} = \emptyset. \tag{2.1}$$

Niech na brzegu $\partial\hat{D}$ będą zadane siły (będą to siły powierzchniowe) $\underset{0}{\hat{X}}_i$; na brzegu $\partial\tilde{D}$ niech będą zadane przemieszczenia $\tilde{u}_i$ oraz niech na ośrodek działa określone pole sił masowych X_i.

Zakładamy, że ośrodek jest izotropowy, jednorodny, lecz fizykalnie nieliniowy - typu Kauderera. Zakładamy także działanie niestacjonarnego pola temperatur i przytoczonego wyżej pola obciążeń. Załóżymy również, że ośrodek jest sprężysty i liniowy geometrycznie.



Rys. 1

Przy tych założeniach wyprowadzimy fizykalnie nieliniowe równania przemieszczeniowe dla termosprężystości niesprzężonej, w których niewiadomą funkcją jest wektor pola przemieszczeń. W tym celu rozpatrzymy trzy "strony" zadania:

1) stronę statyczną (równania ruchu Cauchy'ego)

$$\begin{aligned} &\sigma_{ij,j} + X_i = \rho\ddot{u}_i, \quad (x_j,t)\in D\times\mathcal{T}, \quad \text{gdzie } \mathcal{T} = \{t: t>0\} \\ &\sigma_{ij}n_j = \hat{\xi}_i, \quad (x_j,t)\in \partial\hat{D}\times\bar{\mathcal{T}}, \quad \text{gdzie } \bar{\mathcal{T}} = \{t: 0\le t<\infty\} \end{aligned} \tag{2.2}$$

2) stronę geometryczną

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{1}{2}\gamma_{ij}; \tag{2.3}$$

3) stronę fizyczną (równania konstytutywne)

$$\sigma_{ij} = 2G(1-\varkappa)\varepsilon_{ij} + \left[3\lambda(1-\phi)\,\varepsilon - 3K(1-\bar{\varphi})\Theta\alpha_T\right]\delta_{ij}, \tag{2.4}$$

gdzie występujące w (2.4) funkcje materiałowe $\varkappa$, ϕ, $\bar{\varphi}$ oraz α_T i Θ są zdefiniowane w pracy [1].

Dla płaskiego stanu naprężenia macierz tensora naprężenia i tensora odkształcenia ma następującą postać:

$$[\![\sigma_{ij}]\!] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \cdot & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [\![\varepsilon_{ij}]\!] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \cdot & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Uwzględniając związek (2.5) w równościach (2.2), (2.3) i (2.4), otrzymamy równania wynikające z analizy odpowiednich "stron" problemu płaskiego. Natomiast ε_z w "stronie" geometrycznej wyznaczymy z warunku $\sigma_z = 0$, przy czym korzystamy tylko z liniowej części wzoru (2.4), tj. przyjmujemy $i = j = 3$, $\chi = \psi = 0$.

Następnie, uwzględniając "stronę" geometryczną w "stronie" fizycznej, uzyskujemy podstawowe równania, w relacji naprężenie-przemieszczenie. Wstawiając te równania do "strony" statycznej, uzyskamy równania przemieszczeniowe oraz naprężeniowe warunki brzegowe.

Równania przemieszczeniowe mają postać:

$$
\begin{gathered}
G\left\{2\frac{\partial}{\partial x}\left[\left[(1-\chi)+\frac{\lambda}{2G+\lambda}(1-\psi)\right]\frac{\partial u}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(1-\chi)\frac{\partial u}{\partial y}\right]\right\}+G\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[(1-\chi)\frac{\partial v}{\partial x}\right]+\frac{2\lambda}{2G+\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-\psi)\frac{\partial v}{\partial y}\right]\right\}+\\
+3K\alpha_T\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\left[\frac{\lambda}{2G+\lambda}(1-\psi)-1\right](1-\bar{\varphi})\Theta\right]\right\}+X=\varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\\
G\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-\chi)\frac{\partial u}{\partial y}\right]+\frac{2\lambda}{2G+\lambda}\frac{\partial}{\partial y}\left[(1-\psi)\frac{\partial u}{\partial x}\right]\right\}+G\left\{2\frac{\partial}{\partial y}\left[\left[(1-\chi)+\frac{\lambda}{2G+\lambda}(1-\psi)\right]\frac{\partial v}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-\chi)\frac{\partial v}{\partial x}\right]\right\}+\\
+3K\alpha_T\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[\left[\frac{\lambda}{2G+\lambda}(1-\psi)-1\right](1-\bar{\varphi})\Theta\right]\right\}+Y=\varrho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.
\end{gathered}
\tag{2.6}
$$

Wprowadzając do równań (2.6) odpowiednie macierze

$$
\begin{gathered}
A = [\![A_{ij}]\!]_{2\times 2}, \quad A = A(\chi,\psi); \quad B = [\![B_i]\!]_{2\times 1}, \quad B = B(\psi,\bar{\varphi})\\
u = [\![u_i]\!]_{2\times 1}, \quad \mathcal{X} = [\![\mathcal{X}_i]\!]_{2\times 1}
\end{gathered}
\tag{2.7}
$$

otrzymujemy fizykalnie nieliniowe równanie przemieszczeniowe, dla termosprężystości niesprzężonej, w postaci macierzowej

$$
Au + B + \mathcal{X} = \varrho\ddot{u}. \tag{2.8}
$$

Natomiast naprężeniowe warunki brzegowe mają postać:

$$
\begin{gathered}
G(1-\chi)\left[2l\frac{\partial u}{\partial x}+m\frac{\partial u}{\partial y}\right]+\frac{2G\lambda}{2G+\lambda}(1-\psi)l\frac{\partial u}{\partial x}+G\left[\frac{2\lambda}{2G+\lambda}(1-\psi)l\frac{\partial v}{\partial y}+(1-\chi)m\frac{\partial v}{\partial x}\right]+\\
+3K(1-\bar{\varphi})\Theta\alpha_T l\left[\frac{\lambda}{2G+\lambda}(1-\psi)-1\right]=\hat{\mathcal{X}}_{\circ}.
\end{gathered}
\tag{2.9}
$$

$$G\left[\frac{2\lambda}{2G+\lambda}(1-\psi)m\frac{\partial u}{\partial x}+(1-\chi)l\frac{\partial u}{\partial y}\right]+G(1-\chi)\left[2m\frac{\partial v}{\partial y}+l\frac{\partial v}{\partial x}\right]+\frac{2G\lambda}{2G+\lambda}(1-\psi)m\frac{\partial v}{\partial y}+$$

$$+3K(1-\bar{\varphi})\Theta\alpha_T m\left[\frac{\lambda}{2G+\lambda}(1-\psi)-1\right]=\hat{\underset{\circ}{Y}}\ ; \qquad (2.9)$$

Wprowadzając do równań (2.9) odpowiednie macierze

$$a=\left[\left[a_{ij}\right]\right]_{2x2},\quad a=a(\chi,\psi);\quad b=\left[\left[b_i\right]\right]_{2x1},\quad b=b(\psi,\bar{\varphi})$$

$$u=\left[\left[u_i\right]\right]_{2x1},\quad \hat{\underset{\circ}{\chi}}=\left[\left[\hat{\underset{\circ}{\chi}}_i\right]\right]_{2x1} \qquad (2.10)$$

otrzymujemy naprężeniowe warunki brzegowe w postaci macierzowej

$$au+b=\hat{\underset{\circ}{\chi}}. \qquad (2.11)$$

2.2. Zagadnienie statyczne

Równania przemieszczeniowe wyprowadza się analogicznie jak dla zagadnienia dynamicznego, z tym że w zagadnieniu statycznym nie uwzględnia się ingerencji czasu. Tak więc wykonując takie same przekształcenia jak poprzednio i odrzucając czynniki związane z czasem otrzymujemy: fizykalnie nieliniowe równania przemieszczeniowe dla termosprężystości niesprzężonej w postaci macierzowej

$$Au+B+\chi=0, \qquad (2.12)$$

oraz naprężeniowe warunki brzegowe w postaci macierzowej

$$au+b=\hat{\underset{\circ}{\chi}}. \qquad (2.13)$$

3. Sformułowanie problemu

3.1. Problem początkowo-brzegowy

Zagadnienie dynamicznej, niesprzężonej termosprężystości, dla tarcz fizykalnie nieliniowych, sprowadza się do wyznaczenia pola przemieszczeń $u=u(x,y;t)$, $(x,y;t)\in(D\cup\partial\hat{D})\times\mathcal{J}$ takiego, aby spełniony był układ równań przemieszczeniowych

$$Au+B+\chi=\rho\ddot{u},\quad (x,y;t)\in D\times\mathcal{J} \qquad (3.1)$$

oraz warunki brzegowe, kolejno naprężeniowe i przemieszczeniowe

$$\begin{aligned} au + b &= \hat{\chi}_o, \quad (x,y;t)\in \partial\hat{D} \times \bar{\mathcal{T}}, \\ u &= \tilde{u}, \quad (x,y;t)\in \partial\tilde{D} \times \bar{\mathcal{T}}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

gdzie $\tilde{u} = [\![\tilde{u}_i]\!]_{2x1}$

i warunki początkowe

$$\begin{aligned} u\big|_{t=0} &= u_o, \quad (x,y)\in \bar{D}, \quad \text{gdzie } \bar{D} = D \cup \partial D \\ \dot{u}\big|_{t=0} &= v_o, \quad (x,y)\in \bar{D}; \end{aligned} \tag{3.3}$$

3.2. Problem brzegowy

Zagadnienie statycznej, niesprzężonej termosprężystości, dla tarcz fizykalnie nieliniowych sprowadza się do wyznaczenia pola przemieszczeń $u = u(x,y)$, $(x,y)\in D\cup\partial\hat{D}$ takiego, aby spełniony był układ równań przemieszczeniowych

$$Au + B + \chi = 0, \quad (x,y)\in D \tag{3.4}$$

oraz warunki brzegowe, kolejno naprężeniowe i przemieszczeniowe

$$\begin{aligned} au + b &= \hat{\chi}_o, \quad (x,y)\in \partial\hat{D}, \\ u &= \tilde{u}, \quad (x,y)\in \partial\tilde{D}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

4. Przybliżone metody rozwiązywania równań problemu

4.1. Problem dynamiczny

a) m e t o d a   r o z w i ą z a ń   s p r ę ż y s t y c h

W celu zlinearyzowania problemu rozkładamy nieliniową macierz operatora A na dwie macierze - liniową A_L i nieliniową A_N, zgodnie z równaniem

$$A = A_L + A_N, \quad \text{gdzie } A_N = A_N(\varkappa,\varphi). \tag{4.1}$$

Następnie wstawiając związek (4.1) do równania (3.1) oraz oznaczając

$$\chi^* = -\chi - A_N u - B \tag{4.2}$$

uzyskujemy równania przemieszczeniowe dla termosprężystości niesprzężonej w postaci następującej:

$$A_L u - \varrho \ddot{u} = \chi^{*}. \tag{4.3}$$

Analogicznie postępujemy z nieliniową macierzą a, tak więc

$$a = a_L + a_N, \qquad a_N = a_N(\chi, \psi). \tag{4.4}$$

Wstawiając związek (4.4) do równania $(3.2)_1$ oraz oznaczając

$$\hat{\chi}_o^{*} = \hat{\chi}_o - a_N u - b \tag{4.5}$$

dostaniemy naprężeniowe warunki brzegowe w postaci

$$a_L u = \hat{\chi}_o^{*}. \tag{4.6}$$

Pozostałych warunków $(3.2)_2$ i (3.3) nie musimy przekształcać, gdyż są one juz liniowe.

Problem początkowo-brzegowy będzie teraz polegał na wyznaczeniu pola przemieszczeń $u = u(x,y;t)$, $(x,y;t) \in (D \cup \partial\hat{D}) \times \mathcal{J}$ takiego, aby spełniony był układ liniowych, iteracyjnych równań przemieszczeniowych

$$A_L u^{(n)} - \varrho \ddot{u}^{(n)} = \chi^{*(n-1)}, \quad (x,y;t) \in D \times \mathcal{J} \tag{4.7}$$

oraz iteracyjne warunki brzegowe, kolejno naprężeniowe i przemieszczeniowe

$$\begin{aligned} a_L u^{(n)} &= \hat{\chi}_o^{*(n-1)}, && (x,y;t) \in \partial\hat{D} \times \bar{\mathcal{J}}, \\ u^{(n)} &= \tilde{u}, && (x,y;t) \in \partial\tilde{D} \times \bar{\mathcal{J}} \end{aligned} \tag{4.8}$$

i warunki początkowe

$$\begin{aligned} u^{(n)}\Big|_{t=0} &= u_o; && (x,y) \in \bar{D}, \\ \dot{u}^{(n)}\Big|_{t=0} &= v_o, && (x,y) \in \bar{D}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Przy czym, korzystając ze związków (4.2) i (4.5), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \chi^{*(n-1)} &= -\chi - A_N u^{(n-1)} - B, \\ \hat{\chi}_o^{*(n-1)} &= \hat{\chi}_o - a_N u^{(n-1)} - b; \end{aligned} \tag{4.10}$$

b) m e t o d a   k o l e j n y c h   p r z y b l i ż e ń

Przedstawimy zlinearyzowany układ równań (3.1) i $(3.2)_1$; w tym celu zbudujemy następujący proces iteracyjny

$$
\begin{aligned}
A^{(n)}u^{(n)} + B^{(n)} + \chi &= \varrho\ddot{u}^{(n)},\\
a^{(n)}u^{(n)} + b^{(n)} &= \hat{\chi}_o; \quad (n = 1,2...);
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

przy czym

$$
\begin{aligned}
A^{(n)} &= A^{(n)}(\chi^{(n-1)},\varphi^{(n-1)}), \quad & B^{(n)} &= B^{(n)}(\varphi^{(n-1)},\bar{\varphi}),\\
a^{(n)} &= a^{(n)}(\chi^{(n-1)},\varphi^{(n-1)}), \quad & b^{(n)} &= b^{(n)}(\varphi^{(n-1)},\bar{\varphi}).
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

W (4.11) nie przytoczono pozostałych warunków brzegowych $(3.2)_2$ i warunków początkowych (3.3), gdyż, jak to widać z ich zapisu, są ona liniowe, a więc nie musimy tutaj tworzyć linearyzowanych operatorów. Zlinearyzowane problemy brzegowe (4.11) można rozwiązać np. metodą różnic skończonych lub metodami wariacyjnymi.

4.2. Problem statyczny

a) m e t o d a   r o z w i ą z a ń   s p r ę ż y s t y c h

Przy postępowaniu analogicznie jak dla problemu dynamicznego, problem brzegowy dla zagadnienia statycznego będzie polegał na wyznaczaniu pola przemieszczeń $u = u(x,y)$, $(x,y) \in D \cup \partial\hat{D}$ takiego, aby spełniony był układ liniowych iteracyjnych równań przemieszczeniowych

$$
A_L u^{(n)} = \chi^{*(n-1)}, \quad (x,y) \in D \tag{4.13}
$$

oraz iteracyjne warunki brzegowe, kolejno naprężeniowe i przemieszczeniowe

$$
\begin{aligned}
a_L u^{(n)} &= \hat{\chi}_o^{*(n-1)}, \quad & (x,y) &\in \partial\hat{D},\\
u^{(n)} &= \tilde{u}, \quad & (x,y) &\in \partial\vec{D}.
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

b) m e t o d a   k o l e j n y c h   p r z y b l i ż e ń

Postępując analogicznie jak dla problemu dynamicznego, budujemy następujący proces iteracyjny

$$
\begin{aligned}
A^{(n)}u^{(n)} + B^{(n)} + X = 0 \\
a^{(n)}u^{(n)} + b^{(n)} = \hat{X}_{0} \quad (n = 1,2...);
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

Nie przytoczono tutaj pozostałych warunków brzegowych $(3.5)_2$, gdyż są one już liniowe. Zlinearyzowane problemy brzegowe (4.15) możemy znowu rozwiązać np. metodą różnic skończonych lub metodami wariacyjnymi.

LITERATURA

[1] Borkowski Sz.: Przegląd prac dotyczących naprężeń termicznych w ciałach stałych (lata 1965-1967). Mech. Teor. i Stos. 2, 7, (1969), 107-153.

[2] Borkowski Sz.: Dynamical equations of physically nonlinear thermoelasticity, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn. 9, 24 (1976), 655-662.

[3] Guzenda T.: Zagadnienia termosprężystości tarcz fizykalnie nieliniowych (praca magisterska), Gliwice 1978.

[4] Kauderer H.: Nichlineare Mechanik, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958.

[5] Nowacki W.: Thermoelasticity, Pergamon Press, 1962.

[6] Nowacki W.: Dynamiczne zagadnienia termosprężystości. PWN, Warszawa 1966.

ТЕРМИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПЛОСКИХ ЗАДАЧАХ
I. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Р е з ю м е

В работе представлены основные дифференциальные уравнения перемещений с учётом термических эффектов. Рассмотрено случай динамической и статической физически нелинейной плоокой задачи.

THERMAL STRESSES IN PHYSICALLY NONLINEAR PLANE STATE OF STRESS
I. DISPLACEMENT EQUATIONS

S u m m a r y

The paper presents fundamental displacement equations of physically nonlinear plane state of stress accounting for thermal effects. Statical and dynamical problems of physically nonlinear plane state of stress are also discussed.