ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 36 Nr kol. 625

Tadeusz GUZENDA

NAPRĘŻENIA TERMICZNE W TARCZACH FIZYKALNIE NIELINIOWYCH

II. ZASADY WARIACYJNE

Streszczenie. Sformułowano zasady wariacyjne dla przypadków dynamiki i statyki tarcz fizykalnie nieliniowych, termosprężystych.

1. Wstęp

Istnieje wiele ośrodków (żeliwo, grafit, polimery), dla których model ośrodka liniowo-sprężystego jest nie wystarczający do opisu stanu naprężenia i odkształcenia. Zachowanie takich ośrodków może być opisane równaniami konstytutywnymi nieliniowymi. Płaski stan naprężenia we współrzędnych prostokątnych był omawiany przez H. Kauderera [6]. Przegląd publikacji - dotyczących naprężeń termicznych - podano w pracach [1, 7, 8]. Zasady wariacyjne termosprężystości fizykalnie nieliniowej zostały sformułowane w pracach [2, 3].

2. Wyprowadzenie podstawowych funkcjonałów

2.1. Problem dynamiczny

Przyjmować będziemy, że równania konstytutywne mają postać

$$\sigma_{ij} = 2G(1-\chi)\varepsilon_{ij} + \left[3\lambda(1-\psi)\varepsilon - 3K(1-\bar{\varphi})\theta\alpha_T\right]\delta_{ij}, \tag{2.1}$$

gdzie występujące w (2.1) funkcje materiałowe χ, ψ, $\bar{\varphi}$ oraz α_T i θ są zdefiniowane w pracy [1].

Przy czym

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma\delta_{ij} \tag{2.2}$$

Porównując (2.1) z (2.2), otrzymujemy po kilku przekształceniach związki

$$s_{ij} = 2G(1-\chi)e_{ij}, \quad \sigma = 3K(1-\varphi)\varepsilon - 3K(1-\bar{\varphi})\alpha_T\theta. \tag{2.3}$$

Równania ruchu Cauchy'ego i naprężeniowe oraz przemieszczeniowe warunki brzegowe, dla problemu płaskiego, w postaci macierzowej są określone przez związki

$$
\begin{aligned}
Au + B + X &= \rho\ddot{u}, && (x,y;t) \in D \times \mathcal{T},\\
au + b &= \hat{X}_0, && (x,y;t) \in \partial\hat{D} \times \bar{\mathcal{T}},\\
u &= \tilde{u}, && (x,y;t) \in \partial\tilde{D} \times \bar{\mathcal{T}},
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

gdzie występujące w (2.4) macierze A, u, B, X, a, b, $\hat{X}_0$ są określone w pracy [5].

Ponieważ rozważania będą dotyczyć problemu rozpatrywanego w pracy [4]. Na wstępie dokonamy kilku założeń:

dla pól $X(x,y;t)$, $u(x,y;t)$, gdzie $(x,y;t) \in D \times \mathcal{T}$, przyjmować będziemy, że wariacje $\delta X = 0$, $\delta u \neq 0$; dla pól $\hat{X}_0(x,y;t)$, $u(x,y;t)$, gdzie $(x,y;t) \in \partial\hat{D} \times \bar{\mathcal{T}}$, przyporządkowane wariacje spełniają warunki $\delta \hat{X}_0 = 0$, $\delta u \neq 0$, wreszcie pola $\hat{X}_0(x,y;t) = au + b$, $u(x,y;t)$ dla $(x,y;t) \in \partial\tilde{D} \times \bar{\mathcal{T}}$ scharakteryzowane są przez wariacje $\delta \hat{X}_0 = \delta\{au + b\} \neq 0$, $\delta\tilde{u} = 0$.

Weźmy pod uwagę zasadę przemieszczeń przygotowanych Lagrange'a

$$
\begin{gathered}
\int_D X_i \delta u_i dx + \int_{\partial\hat{D}} \hat{X}_{0i} \delta u_i dx = \int_D \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} dx + \int_D \rho \ddot{u}_i \delta u_i dx\\
u_i(x_j,t)\Big|_{(x_j,t) \in \partial\tilde{D} \times \bar{\mathcal{T}}} = \tilde{u}_i
\end{gathered}
\tag{2.5}
$$

Korzystając z twierdzenia Gaussa-Ostrogradzkiego oraz ze związków (2.1), możemy wyrażenie $\int_D \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} dx$ przekształcić do postaci

$$
\int_D \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} dx = -\left[Au + B, \delta u\right] + \left(au + b, \delta u\right); \tag{2.6}
$$

przy czym wprowadzamy następujące oznaczenia

$$
\begin{aligned}
&\left[(\,),[\,]\right] \equiv \int_D (\,)^T[\,]dx, && \left\{(\,),[\,]\right\} \equiv \int_{t_0}^{T}\int_D (\,)^T[\,]dxdt,\\
&\left(\!(\,),[\,]\right) \equiv \int_{\partial\hat{D}} (\,)^T[\,]dx, && \left\langle(\,),[\,]\right\rangle \equiv \int_{t_0}^{T}\int_{\partial\hat{D}} (\,)^T[\,]dxdt,\\
&\left((\,),[\,]\right) \equiv \int_{\partial\tilde{D}} (\,)^T[\,]dx, && \left((\,),[\,]\right) \equiv \int_{t_0}^{T}\int_{\partial\tilde{D}} (\,)^T[\,]dxdt.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Wprowadzając również mnożnik Lagrange'a $\underset{0}{\chi} = au + b$, możemy równania (2.5) zapisać w postaci równania wariacyjnego, bezwarunkowego

$$-\left[Au + B, \delta u\right] + \left\langle au + b, \delta u\right\rangle + \left[\varrho\ddot{u}, \delta u\right] = \\ = \left[\chi, \delta u\right] + \left\langle \underset{0}{\hat{\chi}}, \delta u\right\rangle + \delta\left(u - \tilde{u}, \underset{0}{\chi}\right). \tag{2.8}$$

Całkując równanie (2.8) w przedziale czasu (t_0, τ), otrzymamy

$$-\left\{Au + B, \delta u\right\} + \left\langle au + b, \delta u\right\rangle + \left\{\varrho\ddot{u}, \delta u\right\} = \\ = \left\{\chi, \delta u\right\} + \left\langle \underset{0}{\hat{\chi}}, \delta u\right\rangle + \delta(u - \tilde{u}, \underset{0}{\chi}). \tag{2.9}$$

Podamy teraz inną wersję równania (2.6): w tym celu przekształcimy wyrażenia $\int_D \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dx$ w sposób następujący

$$\int_D \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dx = \int_D (s_{ij}+\sigma\delta_{ij})(\delta e_{ij}+\delta\varepsilon\delta_{ij})dx = \int_D (s_{ij}\delta e_{ij}+3\sigma\delta\varepsilon)dx, \tag{2.10}$$

Wstawiając do prawej strony równania (2.10) związki (2.3) oraz uwzględniając wzory na funkcje materiałowe φ, $\bar{\varphi}$ i χ, uzyskamy następujące zależności

$$\int_D \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dx = \delta\left(-\left[\hat{A}u + \hat{B}, u\right] + \left\langle \hat{a}u + \hat{b}, u\right\rangle\right), \tag{2.11}$$

gdzie

$$\hat{A} = \hat{A}(\hat{\chi}, \hat{\psi}), \quad \hat{B} = \hat{B}(\hat{\psi}, \bar{\varphi}), \quad \hat{a} = \hat{a}(\hat{\chi}, \hat{\varphi}), \quad \hat{b} = \hat{b}(\hat{\varphi}, \bar{\varphi}); \tag{2.12}$$

przy czym wielkości $\hat{\chi}$, $\hat{\psi}$, φ są określone w pracy [3].

Porównując zależność (2.6) z zależnością (2.11), a następnie całkując w przedziale czasu (t_0, τ), otrzymamy związek

$$-\left\{Au + B, \delta u\right\} + \left\langle au + b, \delta u\right\rangle = \delta\left(-\left\{\hat{A}u + \hat{B}, u\right\} + \left\langle \hat{a}u + \hat{b}, u\right\rangle\right), \tag{2.13}$$

Przyjmując, że $\delta u(x,y;t_0) = \delta u(x,y;\tau) = 0$, możemy napisać

$$\left\{\varrho\ddot{u}, \delta u\right\} = -\frac{1}{2}\delta\left\{\varrho\dot{u}, \dot{u}\right\} \tag{2.14}$$

Uwzględniając równania (2.13) i (2.14), możemy związek (2.9) zapisać w postaci

$$\delta\left(-\left\{\hat{A}u+\hat{B}, u\right\} + \left\langle \hat{a}u+\hat{b}, u\right\rangle - \frac{1}{2}\left\{\varrho\dot{u}, \dot{u}\right\} - \left\{\chi, u\right\} - \left\langle \underset{0}{\hat{\chi}}, u\right\rangle - \left(u-\tilde{u}, \underset{0}{\chi}\right)\right) = 0. \tag{2.15}$$

Wyrażenie zawarte w nawiasie oznaczymy przez $I_{(1)}$; jest to funkcjonał zadania; na podstawie (2.15) mamy $\delta I_{(1)} = 0$.

2.2. Problem statyczny

Podstawowy funkcjonał wyprowadza się analogicznie jak dla zagadnienia dynamicznego, z tym że w zagadnieniu statycznym nie uwzględnia się ingerencji czasu. Tak więc, wykonując takie same przekształcenia jak poprzednio i odrzucając czynniki związane z czasem, otrzymujemy:

$$\delta\left(-\left[\hat{A}u+\hat{B},\ u\right]+\left\langle\hat{a}u+\hat{b},\ u\right\rangle-\left[\chi,\ u\right]-\right.$$
$$\left.-\left\langle\hat{\underset{0}{\chi}},\ u\right\rangle-\left(u-\tilde{u},\underset{0}{\chi}\right)\right)=0. \tag{2.16}$$

Wyrażenie zawarte w nawiasie oznaczymy przez $I_{(2)}$; jest to funkcjonał zadania; na podstawie (2.16) mamy $\delta I_{(2)}=0$.

3. Równanie wariacyjne problemu

3.1. Problem dynamiczny

Przeprowadzając wariację podstawowego funkcjonału $I_{(1)}$, otrzymujemy równanie wariacyjne problemu

$$\delta I_{(1)}=0. \tag{3.1}$$

Uwzględniając związek (2.15), a także zależności (2.13) i (2.14), otrzymujemy równanie wariacyjne problemu w postaci

$$\delta I_{(1)}=\left\{-Au-B+\rho\ddot{u}-\chi,\ \delta u\right\}+$$
$$+\left\langle au+b-\hat{\underset{0}{\chi}},\ \delta u\right\rangle-\left(u-\tilde{u},\delta\underset{0}{\chi}\right)=0. \tag{3.2}$$

Ze względu na to, że wariacje: $\delta u(x,y;t)$, $(x,y;t)\in D\times\mathcal{J}$; $\delta u(x,y;t)$, $(x,y;t)\in\partial\hat{D}\times\bar{\mathcal{J}}$; $\delta\underset{0}{\chi}(x,y;t)$, $(x,y;t)\in\partial\bar{D}\times\bar{\mathcal{J}}$ - są niezależne, z (3.2) uzyskujemy równania (2.4), tj. równania przemieszczeniowe, naprężeniowe i przemieszczeniowe warunki brzegowe.

3.2. Problem statyczny

Przeprowadzając wariację podstawowego funkcjonału $I_{(2)}$, otrzymujemy równanie wariacyjne problemu

$$\delta I_{(2)}=0. \tag{3.3}$$

Uwzględniając związek (2.16), a także zależności (2.6) i (2.11), otrzymujemy równanie wariacyjne problemu w postaci

$$\delta I_{(2)}=\left[-Au-B-\chi,\ \delta u\right]+$$
$$+\left\langle au+b-\hat{\underset{0}{\chi}},\ \delta u\right\rangle-\left(u-\tilde{u},\delta\underset{0}{\chi}\right)=0. \tag{3.4}$$

Ze względu na to, że odpowiednie wariacje są niezależne (analogicznie jak dla problemu dynamicznego), z (3.4) uzyskujemy kolejno równania przemieszczeniowe, naprężeniowe i przemieszczeniowe warunki brzegowe. Postacie tych równań podano w pracy [4].

4. Metoda rozwiązań sprężystych

4.1. Problem dynamiczny

W tym celu rozkładamy nieliniowe macierze operatorów A i a na liniową i nieliniową część według formuł

$$A = A_L + A_N, \quad A_N = A_N(\chi, \phi),$$
$$a = a_L + a_N, \quad a_N = a_N(\chi, \phi). \tag{4.1}$$

Stosując (4.1) w (3.2), otrzymujemy

$$\delta I_{(1)} = \left\{ - A_L u + \varrho \ddot{u} - \chi - A_N u - B, \delta u \right\} +$$
$$+ \left\langle a_L u - \hat{\underset{0}{\chi}} + a_N u + b, \delta u \right\rangle - \left(u - \bar{u}, \delta \underset{0}{\chi} \right) = 0. \tag{4.2}$$

Jeżeli teraz zdefiniujemy wariacje iteracyjnego funkcjonału przez

$$\delta I_{(1)}^{(n)} = \left\{ - A_L u^{(n)} + \varrho \ddot{u}^{(n)} - \chi - A_N u^{(n-1)} - B, \delta u^{(n)} \right\} +$$
$$+ \left\langle a_L u^{(n)} - \hat{\underset{0}{\chi}} + a_N u^{(n-1)} + b, \delta u^{(n)} \right\rangle - \left(u^{(n)} - \bar{u}, \delta \underset{0}{\chi} \right) = 0 \tag{4.3}$$

oraz wprowadzimy oznaczenia χ^*, $\hat{\underset{0}{\chi}}^*$, które są zdefiniowane w pracy [5], to otrzymamy ciąg równań różniczkowych

$$A_L u^{(n)} - \varrho \ddot{u}^{(n)} = \chi^{*(n-1)}, \quad (x,y;t) \in D \times \mathcal{T},$$
$$a_L u^{(n)} = \hat{\underset{0}{\chi}}^{*(n-1)} \quad (x,y;t) \in \partial \mathcal{D} \times \bar{\mathcal{T}}, \tag{4.4}$$
$$u^{(n)} = \bar{u}, \quad (x,y;t) \in \partial \bar{\mathcal{D}} \times \bar{\mathcal{T}}.$$

tj. równań przemieszczeniowych, naprężeniowych i przemieszczeniowych warunków brzegowych (por. [4]).

4.2. Problem statyczny

Przeprowadzamy analogiczne rozważania jak dla problemu dynamicznego, czyli uwzględniając (4.1) w (3.4), otrzymujemy

$$\delta I_{(2)} = \left[- A_L u - \chi - A_N u - B, \delta u\right] +$$
$$+\left(a_L u - \hat{\underset{0}{\chi}} + a_N u + b, \delta u\right) - \left(u - \tilde{u}, \delta \underset{0}{\chi}\right) = 0. \tag{4.5}$$

Jeżeli teraz zdefiniujemy wariacje iteracyjnego funkcjonału przez

$$\delta I_{(2)}^{(n)} = \left[- A_L u^{(n)} - \chi - A_N u^{(n-1)} - B, \delta u^{(n)}\right] +$$
$$+\left(a_L u^{(n)} - \hat{\underset{0}{\chi}} + a_N u^{(n-1)} + b, \delta u^{(n)}\right) - \left(u^{(n)} - \tilde{u}, \delta \underset{0}{\chi}\right) = 0 \tag{4.6}$$

oraz wprowadzimy oznaczenia χ^*, $\hat{\underset{0}{\chi}}^*$, to otrzymamy ciąg równań różniczkowych

$$\begin{aligned} A_L u^{(n)} &= \chi^{*(n-1)}, && (x,y) \in D, \\ a_L u^{(n)} &= \hat{\underset{0}{\chi}}^{*(n-1)}, && (x,y) \in \partial\hat{D}, \\ u^{(n)} &= \tilde{u}, && (x,y) \in \partial\tilde{D}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

tj. równań przemieszczeniowych, naprężeniowych i przemieszczeniowych warunków brzegowych (por. [4]).

5. Metoda kolejnych przybliżeń

5.1. Problem dynamiczny

Jeżeli zastosujemy iteracyjne funkcjonały postaci

$$I_{(1)} = -\left\{\hat{A}^{(n)} u^{(n)} + \hat{B}^{(n)}, u^{(n)}\right\} - \left\{\chi, u^{(n)}\right\} - \frac{1}{2}\left\{\rho\, \dot{u}^{(n)}, \dot{u}^{(n)}\right\} +$$
$$+\left\langle \hat{a}^{(n)} u^{(n)} + \hat{b}^{(n)}, u^{(n)}\right\rangle - \left\langle \hat{\underset{0}{\chi}}, u^{(n)}\right\rangle - \left(u - \tilde{u}, \underset{0}{\chi}\right), \tag{5.1}$$

gdzie wielkości $\hat{A}^{(n)}$, $\hat{B}^{(n)}$, $\hat{a}^{(n)}$ i $\hat{b}^{(n)}$ określone są w pracy [5], to warunek $\delta I_{(1)} = 0$ daje nam równanie

$$\left\{- A^{(n)} u^{(n)} - B^{(n)} + \rho \ddot{u}^{(n)} - \chi, \delta u^{(n)}\right\} +$$
$$+\left\langle a^{(n)} u^{(n)} + b^{(n)} - \hat{\underset{0}{\chi}}, \delta u^{(n)}\right\rangle - \left(u - \tilde{u}, \delta \underset{0}{\chi}\right) = 0, \tag{5.2}$$

które jest równoważne rozwiązaniom równań

$$A^{(n)}u^{(n)} + B^{(n)} + \chi = \varrho\ddot{u}^{(n)},$$

$$a^{(n)}u^{(n)} + b^{(n)} = \hat{\underset{0}{\chi}}, \qquad (n = 1,2...) \qquad (5.3)$$

$$u = \bar{u},$$

podanych w pracy [4]. Przy czym wielkości $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, $a^{(n)}$ i $b^{(n)}$ są określone w pracy [5].

5.2. Problem statyczny

Jeżeli zastosujemy iteracyjne funkcjonały postaci

$$I_{(2)} = \left[\hat{A}^{(n)}u^{(n)} + \hat{B}^{(n)}, u^{(n)}\right] - \left[\chi, u^{(n)}\right] +$$

$$+ \left(\hat{a}^{(n)}u^{(n)} + \hat{b}^{(n)}, u^{(n)}\right) - \left(\hat{\underset{0}{\chi}}, u^{(n)}\right) - \left(u - \bar{u}, \underset{0}{\chi}\right), \qquad (5.4)$$

to warunek $\delta I_{(2)} = 0$ daje nam równanie

$$\left[- A^{(n)}u^{(n)} - B^{(n)} - \chi, \delta u^{(n)}\right] +$$

$$+ \left(a^{(n)}u^{(n)} + b^{(n)} - \hat{\underset{0}{\chi}}, \delta u^{(n)}\right) - \left(u - \bar{u}, \partial\underset{0}{\chi}\right) = 0 \qquad (5.5)$$

które jest równoważne rozwiązaniom równań

$$A^{(n)}u^{(n)} + B^{(n)} + \chi = 0,$$

$$a^{(n)}u^{(n)} + b^{(n)} = \hat{\underset{0}{\chi}} \qquad (n = 1,2...) \qquad (5.6)$$

$$u = \bar{u},$$

podanych w pracy [4].

LITERATURA

[1] Borkowski Sz.: Przegląd prac dotyczących naprężeń termicznych w ciałach stałych (lata 1965-1967), Mech. Teor. i Stos. 2, 7, (1969), 107-153.

[2] Borkowski Sz.: Variational principles in physically nonlinear thermoelasticity, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn. 9, 25 (1977), 769-774.

[3] Borkowski Sz.: Zasady wariacyjne fizykalnie nieliniowej termosprężystości. Gliwice 1977, 1-35 str., problem międzyresortowy, maszynopis dla Inst. Podst. Probl. Techn. PAN - Warszawa.

[4] Guzenda T.: Naprężenia termiczne w tarczach fizykalnie nieliniowych. Równania przemieszczeniowe. Zesz. Nauk. Pol. Śl. Mat.-Fiz., 1979.

[5] Guzenda T.: Zagadnienia termosprężystości tarcz fizykalnie nieliniowych (praca magisterska), Gliwice 1978.

[6] Kauderer H.: Nichlineare Mechanik, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958.

[7] Nowacki W.: Thermoelasticity, Pergamon Press, 1962.

[8] Nowacki W.: Dynamiczne zagadnienia termosprężystości. PWN, Warszawa 1966.

ТЕРМИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПЛОСКИХ ЗАДАЧАХ

II. ВАРИАЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ

Р е з ю м е

Представлено вариационные теоремы для термоупругих динамических и статических физически нелинейных плоских задач.

THERMAL STRESSES IN PHYSICALLY NONLINEAR PLANE STATE OF STRESS

II. VARIATIONAL PRINCIPLES

S u m m a r y

Variational principles are formulated for dynamical and statical problems of thermoelastic physically nonlinear plane state of stress.