ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 36 Nr kol. 625

Stanisław NEUMAN

NIEJEDNORODNE ZADANIA TERMOLEPKOSPRĘŻYSTOŚCI

I. PRZESTRZENNE PROBLEMY BRZEGOWE

Streszczenie. Przyjęto: równania konstytutywne, określające ośrodek termolepkosprężysty; równania równowagi Cauchy'ego; warunki brzegowe i równania strony geometrycznej. Stosując metodę sum skończonych, sformułowano problem brzegowy dla równań przemieszczeniowych niejednorodnej termolepkosprężystości.

1. Wstęp

W niniejszej pracy sformułowano problem brzegowy dla ośrodka niejednorodnego - termolepkosprężystego. Przyjmuje się podstawowe związki konstytutywne, które zostały podane w pracy [1]; stosując metodę sum skończonych i wykorzystując podstawowe równania podane w pracy [3], sformułowano problem brzegowy w przemieszczeniach dla przestrzennych zadań niejednorodnej termolepkosprężystości. Niejednorodność w opisie badanych zagadnień termolepkosprężystości wynika z zależności współczynników równań konstytutywnych od temperatury.

Sposób ten stosowano w zagadnieniach jednowymiarowych, por. [2], a ostatnio był wprowadzony w pracy [1] do zagadnień termolepkosprężystości i problemów termicznych teorii starzenia. We wspomnianej pracy nie zajmowano się jednak sformułowaniem zadań brzegowych.

Przegląd prac poświęconych zagadnieniom termolepkosprężystości podany jest w publikacjach [4], [5], [6].

2. Równania konstytutywne

Weźmy pod uwagę ośrodek znajdujący się w niestacjonarnym polu temperatur $T(x,t)$, a lepkosprężyste właściwości ośrodka niech zależą od temperatury; przyjmujemy też, że pole temperatur jest znane z rozwiązania problemu początkowo-brzegowego równania przewodnictwa ciepła. Równania konstytutywne termolepkosprężystości, zgodnie z [6], przyjmujemy w postaci

$$s_{ij}(x,t) = 2G\left[e_{ij} - \int_0^t \Pi(x,t,\tau)e_{ij}d\tau\right],$$

$$\sigma(x,t) = K\left[(\Theta - 3\alpha T) - \int_0^t R(x,t,\tau)(\Theta - 3\alpha T)d\tau\right]. \tag{2.1}$$

W równaniu (2.1) x oznacza współrzędne dowolnego punktu (x_1, x_2, x_3), $s_{ij} = s_{ij}(x,t)$, $e_{ij} = e_{ij}(x,t)$, $\sigma = \sigma(x,t)$, $\varepsilon = \varepsilon(x,t)$ oznaczają odpowiednio: dewiator tensora naprężenia i odkształcenia oraz wartość średnią tensora naprężenia i odkształcenia, $\Theta = 3\varepsilon$, $K = K(x,t)$ i $G = G(x,t)$ są odpowiednio: modułami odkształcenia objętościowego i postaciowego, jądra operatorów Π i R są funkcjami czasu i współrzędnych.

Jeżeli dekompozycję dewiatorów naprężenia i odkształcenia przyjmujemy w postaci

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon, \tag{2.2}$$

to wówczas z równań (2.1), (2.2) otrzymamy równanie określające tensor naprężenia

$$\sigma_{ij}(x,t) = 2G\left[e_{ij} - \int_0^t \Pi(x,t,\tau)e_{ij}d\tau\right] + \delta_{ij}K\left[(\Theta - 3\alpha T) - \right.$$

$$\left. - \int_0^t R(x,t,\tau)(\Theta - 3\alpha T)d\tau\right]. \tag{2.3}$$

Rozpatrzmy tensor naprężenia σ_{ij} w dowolnej chwili czasu t. W tym celu dzielimy przedział czasu $(0,t)$ punktami, $t_\alpha \in (0,t)$, por. [6], (dla $\alpha = 0,1,2,\ldots,N$), i tak aby $t_{\alpha-1} < t_\alpha$, $t_0 = 0$, $t_N = t$; następnie aproksymujemy całki $\int_0^t (\ )d\tau$, dla rozpatrywanego przedziału $(0,t_\alpha)$, sumami skończonymi; wówczas dla dowolnego czasu t_α zamiast (2.3) uzyskamy

$$\sigma_{ij}^{(\alpha)}(x) = 2G^{(\alpha)}\left[\left[1 - \varrho_{\alpha\alpha}(x)\right]e_{ej}^{(\alpha)} - \psi_{ij}^{(\alpha-1)}(x)\right] +$$

$$+ 3\delta_{ij}K^{(\alpha)}\left[\left[1 - \mu_{\alpha\alpha}(x)\right]\left[\varepsilon^{(\alpha)} - \alpha T^{(\alpha)}\right] - \phi^{(\alpha-1)}(x)\right], \tag{2.4}$$

gdzie:

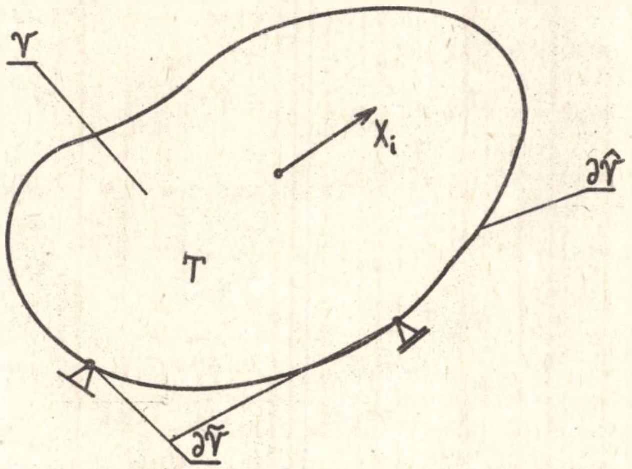
$$\psi_{ij}^{(\alpha-1)}(x) = \sum \varrho_{\alpha\beta}(x) e_{ij}^{(\beta)}, \qquad \varrho_{\alpha\beta}(x) = A_{\alpha\beta} \Pi(x, t_\alpha, \tau_\beta),$$

$$\Phi^{(\alpha-1)}(x) = \sum \mu_{\alpha\beta}(x) \left[\varepsilon^{(\beta)} - \alpha T^{(\beta)} \right], \quad \mu_{\alpha\beta}(x) = A_{\alpha\beta} R(x, t_\alpha, \tau_\beta),$$

w (2.4) $f(x,t_\alpha) = f^{(\alpha)}(x)$; współczynniki $\varrho_{\alpha\beta}(x)$ i $\mu_{\alpha\beta}(x)$ zależą od postaci aproksymacji współczynnika $A_{\alpha\beta}$.

3. Równania przemieszczeniowe. Sformułowanie problemu brzegowego

Weźmy pod uwagę obszar $\mathcal{V}$ zajmowany przez ośrodek. Niech w obszarze $\mathcal{V} \times \mathcal{T}$ działają siły masowe $X_i(x,t)$, $(x,t) \in \mathcal{V} \times \mathcal{T}$, a na brzegu $\partial\hat{\mathcal{V}}$ obszaru $\mathcal{V}$ siły powierzchniowej $\mathcal{X}_i(x,t)$, $(x,t) \in \partial\hat{\mathcal{V}} \times \mathcal{T}$; na pozostałym obszarze $\partial\tilde{\mathcal{V}} = \partial\mathcal{V} \setminus \partial\hat{\mathcal{V}}$ niech zadane będą przemieszczenia $u_i(x,t)$, $(x,t) \in \partial\tilde{\mathcal{V}}$, por. rys. 1.



Rys. 1

Rozpatrywać będziemy zadanie quasi-statyczne; występowanie jednak czasu - w sposób jawny - w równaniach problemu oznacza, że pole przemieszczeń, odkształceń i naprężeń zmieniają się w czasie pełzania.

Równania równowagi Cauchy'ego mają postać

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0; \tag{3.1}$$

Odpowiednie warunki brzegowe określone są przez

$$\sigma_{ij}n_j = \mathfrak{X}_i, \qquad u_i = \tilde{u}_i. \tag{3.2}$$

Przyjmować będziemy teorię liniową geometrycznie; wtedy

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \varepsilon = \frac{1}{3}\, u_{k,k} \tag{3.3}$$

Podstawiając (2.4) do (3.1) i $(3.2)_1$ oraz uwzględniając (3.3), uzyskamy

$$a(x)u^{(\alpha)}_{i,jj} + b(x)u^{(\alpha)}_{k,ki} + c(x)u^{(\alpha)}_{i,j} +$$

$$+ c(x)u^{(\alpha)}_{j,i} + d(x)u^{(\alpha)}_{k,k} = e(x), \tag{3.4}$$

$$a(x)u^{(\alpha)}_{i,j}n_j + a(x)u^{(\alpha)}_{j,i}n_j + f(x)u^{(\alpha)}_{k,k}n_i = g(x).$$

W (3.4) przyjęto następujące oznaczenia

$$a(x) = G^{(\alpha)}\left[1 - \varrho_{\alpha\alpha}(x)\right],$$

$$b(x) = K^{(\alpha)}\left[1 - \mu_{\alpha\alpha}(x)\right] - G^{(\alpha)}\left[1 - \varrho_{\alpha\alpha}(x)\right],$$

$$c(x) = a(x)_{,j}, \quad d(x) = b(x)_{,i},$$

$$e(x) = 3K^{(\alpha)}\left[1 - \mu_{\alpha\alpha}(x)\right]T^{(\alpha)}{}_{,i} + \left[G^{(\alpha)}\phi^{(\alpha-1)}_{ij}\right]_{,j} +$$

$$+ \left[K^{(\alpha)}\Phi^{(\alpha-1)}\right]_{,i} - X^{(\alpha)}_i,$$

$$f(x) = K^{(\alpha)}\left[1 - \mu_{\alpha\alpha}(x)\right] - \frac{2}{3}\, G^{(\alpha)}\left[1 - \varrho_{\alpha\alpha}(x)\right],$$

$$g(x) = 3\alpha K^{(\alpha)}\left[1 - \mu_{\alpha\alpha}(x)\right]T^{(\alpha)}n_i + \left[G^{(\alpha)}\phi^{(\ -1)}_{ij} + K^{(\alpha)}\Phi^{(\alpha-1)}\right]n_j + \hat{\mathfrak{X}}^{(\alpha)}_i.$$

Otrzymane równania (3.4) i $(3.2)_2$ tworzą układ zamknięty, opisujący problem w danej chwili t_α; są to poszukiwane równania przemieszczeniowe wraz z warunkami brzegowymi zadania.

LITERATURA

[1] Borkowski S.: Przegląd problematyki badawczej Instytutu Mechaniki Teoretycznej (mech. ośr. ciągłych), w pracy "Mechanika Teor. i Stos. w Pol. Śl.", wyd. PTMTS, t. I, 27-39, Gliwice 1976.

[2] Fung Y.C.: Podstawy mechaniki ciała stałego. PWN, Warszawa 1969.

[3] Jędrzejczyk J.: Metoda sił dla termosprężystych układów prętowych Rozpr. Inż., 2, 21 (1973), 305-310.

[4] Nowacki W.: Teoria pełzania. PWN, Warszawa 1963.

[5] Бугаков И.И.: Ползучесть полимерных материалов. Наука 1973.

[6] Зевин А.А.: Применение метода конечных сумм к расчету упругих и стареющих наследственны сред, Прикл.Мех. 9, 12 (1976), 82-88 .

НЕОДНОРОДНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ

I. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Р е з ю м е

Исходя из физических соотношений между тензорами напряжений и деформации, используя уравнения равновесия коши и геометрические и краевые условия сформулировано, при помощи метода конечных сумм, краевую задачу для уравнений перемещений неоднородной термовязкоупругости.

HETEROGENEOUS PROBLEMS OF THERMOVISCOELASTICITY

I. SPATIAL BOUNDARY PROBLEMS

S u m m a r y

The boundary problems for displacement equations of heterogeneous thermoviscoelasticity have been formulated with the aid of the method of finite sums, basing on the constitutive equations of thermoviscoelasticity,the Cauchy's equations of equilibrium as well as geometrical and boundary conditions.