

Stanisław NEUMAN

NIEJEDNORODNE ZADANIA TERMOLEPKOSPĘŻYSTOŚCI

## II. PŁASKIE PROBLEMY BRZEGOWE

Streszczenie. Przyjmując podstawowe równania teorii płyt i tarcz oraz związki konstytutywne termolepkospężystości i stosując metodę sum skończonych, sformułowano płaskie problemy brzegowe teorii płyt i tarcz.

1. Wstęp

Celem prezentowanej pracy jest sformułowanie płaskich problemów brzegowych. Wykorzystując podstawowe związki konstytutywne podane w pracy [5] i równania podane w pracach [3] i [4], sformułowano analogicznie jak w teorii sprężystości problemy brzegowe teorii płyt i tarcz.

Niniejsza praca jest kontynuacją problematyki podjętej w pracy [1], [5].

2. Równania konstytutywne

Równania konstytutywne termolepkospężystości, zgodnie z [5], przyjmujemy w postaci

$$s_{ij}(x, t) = 2G(e_{ij} - \int_0^t \mathcal{R}(x, t, \tau) e_{ij} d\tau), \quad (2.1)$$

$$\sigma(x, t) = K(\theta - 3\alpha T) - \int_0^t R(x, t, \tau)(\theta - 3\alpha T) d\tau,$$

gdzie:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma, \quad e_{ij} = \epsilon_{ij} - \delta_{ij}\epsilon,$$

$$3\sigma = \sigma_{kk}, \quad \theta = 3\epsilon, \quad 3\epsilon = \epsilon_{kk}.$$

Odwracając związki (2.1), otrzymamy tensor odkształcenia

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}(x, t) = & \alpha \tau \delta_{ij} \frac{1}{2G} \left[ (\delta_{ij} - \delta_{ij} \delta) + \int_0^t P(x, t, \tau) (\delta_{ij} - \right. \\ & \left. - \delta_{ij} \delta) d\tau \right] + \frac{1}{3K} \delta_{ij} \left[ \delta + \int_0^t Q(x, t, \tau) \delta d\tau \right]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

W równaniu (2.2)  $P(x, t, \tau)$ ,  $Q(x, t, \tau)$  są jądrami operatorów odwrotnych do  $\mathcal{H}(x, t, \tau)$ ,  $R(x, t, \tau)$ .

Rozpatrując równanie (2.2) w chwili  $t_{\alpha}$  i przechodząc do płaskiego stanu naprężenia, mamy

$$\begin{aligned} \epsilon_x^{(\alpha)}(x, y) &= a_1(x, y) \delta_x^{(\alpha)} - b_1(x, y) \delta_y^{(\alpha)} + \tau^{(\alpha)} + c_1(x, y), \\ \epsilon_y^{(\alpha)}(x, y) &= a_1(x, y) \delta_y^{(\alpha)} - b_1(x, y) \delta_x^{(\alpha)} + \tau^{(\alpha)} + c_2(x, y), \\ \tau_{xy}^{(\alpha)}(x, y) &= k_1(x, y) \tau_{xy}^{(\alpha)} + c_3(x, y), \end{aligned} \quad (2.3)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} a_1(x, y) &= \frac{1 - \rho_{\alpha\alpha}(x, y)}{3G^{(\alpha)}} + \frac{1 - \mu_{\alpha\alpha}(x, y)}{9K^{(\alpha)}}, \\ b_1(x, y) &= \frac{1 - \rho_{\alpha\alpha}(x, y)}{6G^{(\alpha)}} - \frac{1 - \mu_{\alpha\alpha}(x, y)}{9K^{(\alpha)}}, \\ k_1(x, y) &= \frac{1 - \rho_{\alpha\alpha}(x, y)}{G^{(\alpha)}}, \quad c_3(x, y) = \frac{\psi_3^{(\alpha-1)}(x, y)}{G^{(\alpha)}}, \\ c_2(x, y) &= \frac{\phi_2^{(\alpha-1)}(x, y)}{2G^{(\alpha)}} + \frac{\bar{\phi}^{(\alpha-1)}(x, y)}{3K^{(\alpha)}}, \\ c_1(x, y) &= \frac{\phi_1^{(\alpha-1)}(x, y)}{2G^{(\alpha)}} + \frac{\bar{\phi}^{(\alpha-1)}(x, y)}{3K^{(\alpha)}}, \\ \phi_1^{(\alpha-1)}(x, y) &= \sum \rho_{\alpha\beta}(x, y) \frac{2\delta_x^{(\beta)} - \delta_y^{(\beta)}}{3}, \\ \phi_2^{(\alpha-1)}(x, y) &= \sum \rho_{\alpha\beta}(x, y) \frac{2\delta_y^{(\beta)} - \delta_x^{(\beta)}}{3}, \end{aligned}$$

$$\psi_3^{(\alpha-1)}(x, y) = \sum \varrho_{\alpha\beta}(x, y) \chi_{xy}^{(\beta)},$$

$$\bar{\psi}^{(\alpha-1)}(x, y) = \sum \mu_{\alpha\beta}(x, y) \frac{\delta_x^{(\beta)} + \delta_y^{(\beta)}}{3},$$

$$\varrho_{\alpha\beta}(x, y) = A_{\alpha\beta} P(x, y, t), \quad \mu_{\alpha\beta}(x, y) = A_{\alpha\beta} Q(x, y, t).$$

Jeżeli odwrócimy związki (2.3), to wówczas otrzymamy równania określające tensor naprężenia

$$\delta_x^{(\alpha)}(x, y) = a(x, y) \varepsilon_x^{(\alpha)} + b(x, y) \varepsilon_y^{(\alpha)} - c(x, y) \chi_T^{(\alpha)} - d_1(x, y),$$

$$\delta_y^{(\alpha)}(x, y) = a(x, y) \varepsilon_y^{(\alpha)} + b(x, y) \varepsilon_x^{(\alpha)} - c(x, y) \chi_T^{(\alpha)} - d_2(x, y), \quad (2.4)$$

$$\tau_{xy}^{(\alpha)}(x, y) = k(x, y) \tau_{xy}^{(\alpha)} - d_3(x, y),$$

gdzie:

$$a(x, y) = \frac{12K^{(\alpha)} G^{(\alpha)} [1 - \varrho_{\alpha\alpha}(x, y)] + [2G^{(\alpha)}]^2 [1 - \mu_{\alpha\alpha}(x, y)]}{3K^{(\alpha)} [1 - \varrho_{\alpha\alpha}(x, y)]^2 + G^{(\alpha)} [1 - \varrho_{\alpha\alpha}(x, y)] [1 - \mu_{\alpha\alpha}(x, y)]},$$

$$b(x, y) = \frac{6K^{(\alpha)} G^{(\alpha)} [1 - \varrho_{\alpha\alpha}(x, y)] - [2G^{(\alpha)}]^2 [1 - \mu_{\alpha\alpha}(x, y)]}{3K^{(\alpha)} [1 - \varrho_{\alpha\alpha}(x, y)]^2 + G^{(\alpha)} [1 - \varrho_{\alpha\alpha}(x, y)] [1 - \mu_{\alpha\alpha}(x, y)]},$$

$$c(x, y) = \frac{18K^{(\alpha)} G^{(\alpha)}}{3K^{(\alpha)} [1 - \varrho_{\alpha\alpha}(x, y)] + 4G^{(\alpha)} [1 - \mu_{\alpha\alpha}(x, y)]},$$

$$d_1(x, y) = \left[ \frac{\psi_1^{(\alpha-1)}(x, y)}{2G^{(\alpha)}} + \frac{\bar{\psi}^{(\alpha-1)}(x, y)}{3K^{(\alpha)}} \right] c(x, y),$$

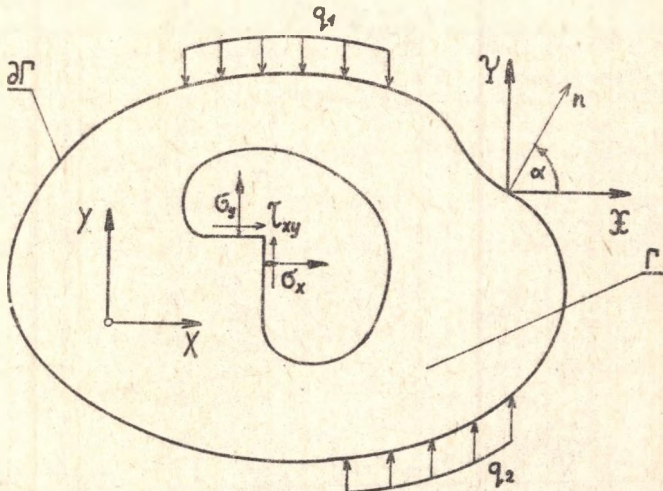
$$d_2(x, y) = \left[ \frac{\psi_2^{(\alpha-1)}(x, y)}{2G^{(\alpha)}} + \frac{\bar{\psi}^{(\alpha-1)}(x, y)}{3K^{(\alpha)}} \right] c(x, y),$$

$$d_3(x, y) = \frac{\psi_3^{(\alpha-1)}(x, y)}{1 - \varrho_{\alpha\alpha}(x, y)} c(x, y).$$



### 3. Zagadnienie tarczowe. Rozwiązanie w naprężeniach

Weźmy pod uwagę tarczę, której warstwa środkowa pokrywa się z płaszczyzną  $(X, Y)$  prostokątnego układu współrzędnych (rys. 1). Zakładamy, że siły obciążające tarczę umiejscowione są w płaszczyźnie  $(X, Y)$  i nie zależą od zmiennej "z"; występujący w niej płaski stan naprężenia i odkształcenia opisany jest współrzędnymi  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \epsilon_x, \epsilon_y, \tau_{xy}$ .



Rys. 1

Wprowadźmy zamiast równań równowagi Cauchy'ego funkcję naprężeń Airy'ego spełniającą te równania tożsamościowo, taką że

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \int_{x_0}^x x dx, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \int_{y_0}^y y dy, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (3.1)$$

z warunkami brzegowymi

$$\sigma_x l + \tau_{xy} m = X, \quad \tau_{xy} l + \sigma_y m = Y, \quad (3.2)$$

w których  $l, m$  są cosinusami kierunkowymi normalnej zewnętrznej  $n$  do brzegu  $\partial\Gamma$  obszaru płaszczyzny środkowej tarczy;  $X, Y$  są siłami powierzchniowymi.

Równania problemu uzyskamy z równań ciągłości de Saint Venanta

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (3.3)$$

Wprowadzając (3.1) do współrzędnych tensora odkształcenia (2.3), a te ostatnie do (3.3), uzyskamy:

$$\begin{aligned} & \nabla^2 \nabla^2 F(\alpha) + B(x, y) \frac{\partial^3 F(\alpha)}{\partial x^3} + C(x, y) \frac{\partial^3 F(\alpha)}{\partial x^2 \partial y} + D(x, y) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \\ & + E(x, y) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + G(x, y) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + H(x, y) \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} + K(x, y) \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} = \\ & = L(x, y) \nabla^2 T(\alpha) + \nabla^2 \left[ \int_{x_0}^x X(\alpha) dx + \int_x^y Y(\alpha) dy \right] - \\ & - A(x, y) \left[ \frac{\partial X(\alpha)}{\partial x} + \frac{\partial Y(\alpha)}{\partial y} + N(x, y) \right], \end{aligned} \quad (3.4)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} A(x, y) &= \frac{9K(\alpha) [1 - \mu_{\alpha\alpha}(x, y)]}{9K(\alpha) [1 - \nu_{\alpha\alpha}(x, y)] + 2G(\alpha) [1 - \mu_{\alpha\alpha}(x, y)]}, \\ B(x, y) &= \frac{2}{a_1(x, y)} \frac{\partial a_1}{\partial x}, \quad C(x, y) = \frac{1}{a_1(x, y)} \frac{\partial k_1}{\partial y} - 2 \frac{\partial b_1}{\partial y}, \\ D(x, y) &= \frac{1}{a_1(x, y)} \frac{\partial^2 a_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 b_1}{\partial y^2}, \quad E(x, y) = \frac{1}{a_1(x, y)} \frac{\partial^2 k_1}{\partial x \partial y}, \\ G(x, y) &= \frac{1}{a_1(x, y)} \frac{\partial^2 a_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 b_1}{\partial x^2}, \quad K(x, y) = \frac{2}{a_1(x, y)} \frac{\partial a_1}{\partial y}, \\ H(x, y) &= \frac{1}{a_1(x, y)} \frac{\partial k_1}{\partial x} - 2 \frac{\partial b_1}{\partial x}, \quad L(x, y) = \frac{-\alpha}{a_1(x, y)}, \\ N(x, y) &= \frac{1}{a_1(x, y)} \left[ \frac{\partial^2 c_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 c_3}{\partial x \partial y} \right]. \end{aligned}$$

Wstawiając do (3.2), por. rys. 2, równania (3.1), uzyskamy

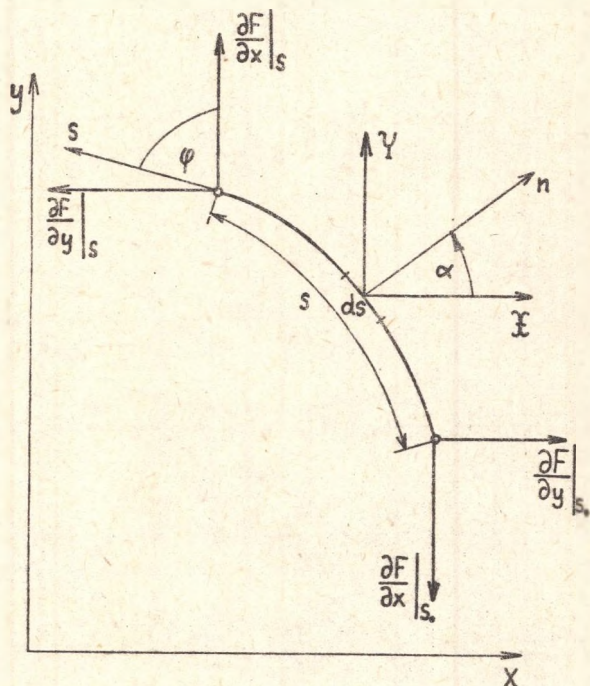
$$X = \frac{d}{ds} \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_s = \int_{s_0}^s X ds + \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{s_0}, \quad \psi = - \frac{d}{ds} \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_s = - \int_{x_0}^s \psi ds + \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{s_0}.$$



Siły działające na brzegu  $\partial\Gamma$ , w punkcie o współrzędnej "s" dla tarczy o obszarze jednoczynnym  $\Gamma$ , są zdefiniowane przez

$$Q = - \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_s \cos \varphi + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_s \sin \varphi = \left. \frac{\partial F}{\partial s} \right|_s, \quad (3.6)$$

$$N = \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_s \sin \varphi + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_s \cos \varphi = \left. \frac{\partial F}{\partial n} \right|_s.$$



Rys. 2

Moment sił działających na brzegu  $\partial\Gamma$  o współrzędnej "s" względem początku układu wynosi

$$M = F = \int_{s_0}^s x X ds - \int_{s_0}^s y Y ds = F \Big|_{s_0}^s - \left( x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} \right) \Big|_{s_0}^s. \quad (3.7)$$

Tak więc dla równania tarczy (3.4) mamy następujące warunki brzegowe, analogicznie jak w teorii sprężystości, por. [3].

$$\left. \frac{\partial F^{(\alpha)}}{\partial n} \right|_{(x,y) \in \partial \Gamma} = N^{(\alpha)}(s), \quad \left. F^{(\alpha)}(s) \right|_{(x,y) \in \partial \Gamma} = M^{(\alpha)}(s). \quad (3.7)$$

#### 4. Równania płyty termolepkosprężystej

Zgodnie z teorią płyt cienkich [3], przyjmujemy następujące założenia:

- 1) powierzchnia środkowa jest nieodkształcalna;
- 2) element normalny do płaszczyzny środkowej pozostaje normalny do powierzchni odkształconej (hipoteza Kirchhoffa);
- 3) teoria jest liniowa geometrycznie;
- 4) na płytę działają siły masowe w kierunku osi Z.

W stronie statycznej przyjmujemy z teorii płyt równania równowagi, por. [4]

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 K}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + q = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y} = Q_1, \quad \frac{\partial M_2}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial x} = Q_2,$$

gdzie:

$$M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, \quad M_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz, \quad K = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz, \quad (4.2)$$

$$Q_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz, \quad Q_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz.$$

W stronie geometrycznej mamy

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \epsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (4.3)$$

gdzie  $w = w(x, y, t)$  oznaczają ugięcie powierzchni środkowej płyty. Ze względu na niewielką grubość "h" płyty, w porównaniu z wymiarami poprzecznymi,

zakładamy, że rozkład temperatury, jako funkcja zmiennej "z" - jest liniowy; wobec tego temperaturę określimy w sposób następujący

$$T(x,y,z,t) = T_{\delta r} - zT(x,y,t). \quad (4.4)$$

W (4.4)  $T_{\delta r}$  oznacza średnią temperaturę w przedziale  $(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2})$ . Dalej przyjmować będziemy, że wszystkie pozostałe wielkości zależą tylko od współrzędnych  $(x,y,t)$ .

Podstawiając do (4.2) współrzędne tensora naprężenia (2.4), uwzględniając dalej związki geometryczne (4.3), a także rozkład temperatury (4.4), wówczas po scałkowaniu względem zmiennej "z" uzyskamy

$$M_1^{(\alpha)} = -\frac{h^3}{12} \left[ a(x,y) \frac{\partial^2 w^{(\alpha)}}{\partial x^2} + b(x,y) \frac{\partial^2 w^{(\alpha)}}{\partial y^2} + c(x,y) \alpha T^{(\alpha)}(x,y) \right] - h_1(x,y),$$

$$M_2^{(\alpha)} = -\frac{h^3}{12} \left[ a(x,y) \frac{\partial^2 w^{(\alpha)}}{\partial y^2} + b(x,y) \frac{\partial^2 w^{(\alpha)}}{\partial x^2} + c(x,y) \alpha T^{(\alpha)}(x,y) \right] - h_2(x,y),$$

$$K^{(\alpha)} = -\frac{h^3}{6} k(x,y) \frac{\partial^2 w^{(\alpha)}}{\partial x \partial y} - h_3(x,y). \quad (4.5)$$

gdzie:

$$h_1(x,y) = \sum \left[ \left[ \frac{\rho_{\alpha\beta}(x,y)}{3G^{(\alpha)}} + \frac{\mu_{\alpha\beta}(x,y)}{9K^{(\alpha)}} \right] M_1^{(\beta)}(x,y) + \left[ \frac{\rho_{\alpha\beta}(x,y)}{6G^{(\alpha)}} + \frac{\mu_{\alpha\beta}(x,y)}{9K^{(\alpha)}} \right] M_2^{(\beta)}(x,y) + \frac{h^3}{12} T^{(\beta)} \right]$$

$$h_2(x,y) = \sum \left[ \left[ \frac{\rho_{\alpha\beta}(x,y)}{3G^{(\alpha)}} + \frac{\mu_{\alpha\beta}(x,y)}{9K^{(\alpha)}} \right] M_2^{(\beta)}(x,y) + \left[ \frac{\rho_{\alpha\beta}(x,y)}{6G^{(\alpha)}} + \frac{\mu_{\alpha\beta}(x,y)}{9K^{(\alpha)}} \right] M_1^{(\beta)}(x,y) + \frac{h^3}{12} T^{(\beta)} \right]$$

$$h_3(x,y) = \sum \frac{\rho_{\alpha\beta}(x,y)}{1 - \rho_{\alpha\beta}(x,y)} K^{(\beta)}(x,y).$$



Wprowadzając (4.5) do równania równowagi rzutów (4.1)<sub>1</sub>, otrzymamy równanie problemu

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 w^{(\alpha)}(x, y) + A(x, y) \frac{\partial^2 w^{(\alpha)}}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 w^{(\alpha)}}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 w^{(\alpha)}}{\partial y^2} = \\ = N(x, y) \nabla^2 \Gamma^{(\alpha)}(x, y) + P(x, y) \Gamma^{(\alpha)}(x, y) + \frac{q^{(\alpha)}(x, y)}{D(x, y)} + R(x, y), \end{aligned} \quad (4.6)$$

gdzie:

$$A(x, y) = \frac{1}{a(x, y)} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial y^2}, \quad B(x, y) = \frac{2}{a(x, y)} \frac{\partial^2 k}{\partial x \partial y},$$

$$C(x, y) = \frac{1}{a(x, y)} \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2}, \quad D(x, y) = \frac{a(x, y) h^3}{12},$$

$$N(x, y) = -\frac{c(x, y)}{a(x, y)} \alpha, \quad P(x, y) = -\frac{1}{a(x, y)} \nabla^2 c(x, y),$$

$$R(x, y) = \frac{1}{D(x, y)} \left[ \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h_3}{\partial x \partial y} \right].$$

#### LITERATURA

- [1] Neuman S.: Niejednorodne zadania termolepkosprężystości, praca mag., maszynopis, Gliwice 1978.
- [2] Nauman S.: Niejednorodne zadania termolepkosprężystości, I. Przestrzenne problemy brzegowe, Zesz. Nauk. Pol. Śl., Mat. Fiz.,
- [3] Fung Y.C.: Podstawy mechaniki ciała stałego. PWN, Warszawa 1969.
- [4] Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S.: Teoria płyt i połwok. Arkady, Warszawa 1962.
- [5] Зевин А.А.: Применение метода конечных сумм к расчёту упругих и стареющих наследственных сред, Прикл. Мех., 9, 12 (1976), 82-88.

## НЕОДНОРОДНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ

## II. ПЛОСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

## Р е з ю м е

Пользуясь методом конечных сумм в статье сформулировано краевые задачи теории пластинок и дисков исходя из физических соотношений между тензорами напряжениями и деформаций для термовязкоупругости.

## HETEROGENEOUS PROBLEMS OF THERMOVISCOELASTICITY

## II. FLAT BOUNDARY PROBLEMS

## S u m m a r y

Heterogeneous flat boundary problems of the theory of plates and discs are formulated with the aid of the method of finite sums, basing on fundamental equations of the theory of plates and discs and the constitutive equations of thermoviscoelasticity.