ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 36 Nr kol. 625

Andrzej WAWRZYNEK

FIZYKALNIE I GEOMETRYCZNIE NIELINIOWY PROBLEM ZGINANIA PŁYT WIELOWARSTWOWYCH

I. RÓWNANIA KONSTYTUTYWNE I POLE PRZEMIESZCZEŃ

Streszczenie. Zdefiniowano pole przemieszczeń płyty wielowarstwowej, obciążonej dowolnym polem sił poprzecznych. Uwzględniono duże ugięcia płyt (zadanie geometrycznie nieliniowe). O związkach konstytutywnych poszczególnych warstw założono, że są typu Kauderera [4]. Oprócz pola sił w płycie uwzględniono również oddziaływanie pola termicznego.

1. Założenia teorii płyt warstwowych

W pracy niniejszej rozpatrujemy teorię płyt warstwowych, złożonych z warstw izotropowych, jednorodnych, z których każda jest o stałej grubości. Nieliniowość fizykalną uwzględniamy przez nieliniową zależność naprężeń od odkształceń; przyjmujemy, że związki te będą słuszne dla ośrodka typu Kauderera. Jednakże o naprężeniach normalnych s_{33} zakładamy, że są niewielkie i zależą liniowo od odkształceń. Za powierzchnię odniesienia przyjmujemy powierzchnię środkową płyty $z = 0$; powierzchnie górna i dolna określone są odpowiednio równaniami $z = h_o = -H/2$ i $z = h_m = H/2$, gdzie: m – liczba warstw; H – grubość całej płyty; powierzchnie graniczne między warstwami opisują równania $z = h_k$ $(k = 1,2,\ldots, m-1)$.

Nieliniowość geometryczną (odkształcenia skończone) uwzględniamy, przyjmując tensor odkształcenia k-tej warstwy płyty jako tensor Greena, tj.:

$$2e_{ij}^{(k)} = v_{i,j}^{(k)} + v_{j,i}^{(k)} + v_{l,i}^{(k)}v_{l,j}^{(k)},$$

$$e_{ij}^{(k)} = f_{ij}^{(k)}(x_1,x_2,z), \quad (x_1,x_2)\in\Omega, \quad z\in(h_{k-1},h_k), \tag{1.1}$$

gdzie:

$e_{ij}^{(k)}$ – tensor odkształcenia Greena,

$v_i^{(k)} = f_i^{(k)}(x_l)$ – przemieszczenie punktu $A(x_l)$ należącego do k-tej warstwy w kierunku osi OX_l.

Przecinek między wskaźnikami dolnymi po prawej stronie rdzenia oznacza różniczkowanie względem zmiennej o indeksie po przecinku, np. $v_{i,j} = \partial v_i / \partial x_j$. Wskaźniki greckie $\alpha, \beta, \ldots$ przyjmują wartość 1,2; natomiast wskaźniki łacińskie - i,j,... - 1,2,3. Obowiązuje konwencja sumacyjna względem indeksów łacińskich i greckich.

W naszych rozważaniach będziemy się posługiwali tensorem naprężenia Kirchhoffa-Trefftza s_{ij}, odniesionym do konfiguracji początkowej, zdefiniowanym następująco:

$$s_{ij} = J^{-1} x_{i,J} x_{j,K} \sigma_{JK}, \tag{1.2}$$

gdzie:

$J = \det \left[x_{i,J}\right]$,

σ_{JK} - tensor naprężenia Eulera, odniesiony do stanu odkształconego.

O poszczególnych warstwach zakładamy, że są ze sobą tak połączone, iż nie zachodzi między nimi poślizg; jest to równoznaczne z nałożeniem na przemieszczenia i naprężenia dodatkowych warunków, stawianych na granicach warstw; mamy mianowicie:

a) dla przemieszczeń

$$v_\alpha^{(k)}\Big|_{z=h_k^-} = v_\alpha^{(k+1)}\Big|_{z=h_k^+}, \qquad v_3^{(k)}\Big|_{z=h_k^-} = v_3^{(k+1)}\Big|_{z=h_k^+},$$
$$(x_1, x_2) \in \Omega \qquad (k = 1,2,\ldots,m-1); \tag{1.3}$$

b) dla naprężeń

$$s_{\alpha 3}^{(k)}\Big|_{z=h_k^-} = s_{\alpha 3}^{(k+1)}\Big|_{z=h_k^+}, \qquad s_{33}^{(k)}\Big|_{z=h_k^-} = s_{33}^{(k+1)}\Big|_{z=h_k^+},$$
$$(k = 1,2,\ldots,m-1); \qquad (x_1, x_2) \in \Omega, \tag{1.4}$$

gdzie:

m - jest liczbą warstw.

Oprócz obciążenia płyty polem sił uwzględniać będziemy również wpływ pola temperatur, o którym zakładamy, że wraz z polem sił realizuje w płycie stan quasi-statyczny (zadanie niesprzężone).

2. Równania konstytutywne

Związki konstytutywne typu Kauderera są określone dla tensora odkształceń infinitesymalnych ($2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$), niemniej jednak założenia, w oparciu o które zostały one wyprowadzone, nie przeszkadzają w przyjęciu analogicznych równań dla teorii odkształceń skończonych, por. [4], co najwyżej może powstać problem opisu analitycznego (dobór współczynników aproksymacji nieliniowej). Zgodnie z tym założeniem przyjmujemy równania tworzące w następującej postaci:

$$s_{ij} = 3K\mathscr{H}(e_o)e_o\delta_{ij} + 2G\gamma(\psi_o^2)(e_{ij} - e_o\delta_{ij}), \tag{2.1}$$

gdzie:

$e_o = \frac{1}{3}e_{kk}$ – średnie wydłużenie względem,

ψ_o – intensywność tensora odkształcenia,

K, G – stałe materiałowe,

$\gamma(\psi_o^2)$ – funkcja odkształcenia postaciowego,

$\mathscr{H}(e_o)$ – funkcja wydłużenia względnego,

e_{ij} – tensor odkształcenia Greena,

s_{ij} – tensor naprężenia Kirchhoffa-Trefftza.

Oczywiście w teorii fizykalnie liniowej: $\gamma(\psi_o^2) \equiv 1$ i $\mathscr{H}(e_o) \equiv 1$, por. [6].

Zgodnie z założeniem z § 1, przyjmować będziemy, że odkształcenia wywołane są siłami, a także polami termicznymi; zatem uwzględniać będziemy również w rozważaniach pole termiczne $\Theta(x,y,z) = T(x,y,z) - T_o$ (T_o=const). Ponieważ rozpatrujemy zadanie, w którym nie ma sprzężenia między polem temperatur i polem przemieszczeń, przyjmujemy, że rozkład temperatury będzie określany z rozwiązania odpowiedniego problemu brzegowego równania przewodnictwa ciepła, co oznacza, iż traktujemy go jako znany. Wobec tego związek (2.1) musimy uzupełnić o człon uwzględniający wpływ temperatury [1].

$$s_{ij} = 3K\mathscr{H}(e_o)e_o\delta_{ij} + 2G\gamma(\psi_o^2)(e_{ij} - e_o\delta_{ij}) -$$
$$- 3K\beta(\Theta\alpha_T)\Theta\alpha_T\delta_{ij}, \tag{2.2}$$

gdzie:

$\alpha_T = \frac{1}{\Theta}\int_{T_o}^{T}\alpha(\xi)d\xi$ – średni współczynnik rozszerzalności liniowej;

$\beta(\Theta\alpha_T)$ – funkcja uwzględniająca nieliniowy efekt pola termicznego w tensorze naprężenia;

T_o – temperatura początkowa stała.

Przyjmując w (2.2) $\mathscr{H}(e_o) \equiv 1$, $\gamma(\psi_o^2)$ 1, $\beta(\Theta\alpha_T) \equiv 1$, otrzymamy równania konstytutywne Duhamela-Neumanna, znane w liniowej termosprężysto [6].

Ze względu na różne własności materiałowe poszczególnych warstw, nie możemy założyć, tak jak w ośrodkach jednowarstwowych, por. np. [3], że rozkład temperatury względem osi z na całej grubości płyty jest liniowy. Proponujemy przyjąć liniowy rozkład temperatury jedynie w obrębie każdej z warstw w postaci

$$\Theta^{(k)}(x_1,x_2,z) = \Theta_o^{(k)}(x_1,x_2) + z\Theta_1^{(k)}(x_1,x_2), \tag{2.3}$$

$$(x_1,x_2)\in\Omega,\quad z\in(h_{k-1},h_k),$$

przy dodatkowych warunkach

$$\Theta^{(k)}\Big|_{z=h_k^-} = \Theta^{(k+1)}\Big|_{z=h_k^+},$$

$$-\lambda^{(k)}\frac{\partial\Theta^{(k)}}{\partial z}\Big|_{z=h_k^-} = -\lambda^{(k+1)}\frac{\partial\Theta^{(k+1)}}{\partial z}\Big|_{z=h_k^+},\quad (x_1,x_2)\in\Omega. \tag{2.4}$$

Na podstawie pracy [1] można przyjąć funkcję $\beta(\Theta\alpha_T)$, uwzględniając nieliniowy wpływ temperatury na tensor naprężenia, w postaci

$$\beta(\Theta\alpha_T)\Theta\alpha_T = \sum_{i=1,3,5,\dots} a_i(\Theta\alpha_T)^i \tag{2.5}$$

Ostatecznie równania (2.2) przyjmują postać

$$s_{\alpha\beta} = 3K\varkappa(e_o)e_o\delta_{\alpha\beta} + 2G\gamma(\phi_o^2)(e_{\alpha\beta} - e_o\delta_{\alpha\beta}) -$$

$$- 3K\beta(\Theta\alpha_T)\Theta\alpha_T\,\delta_{\alpha\beta}$$

$$s_{\alpha 3} = 2G\gamma(\phi_o^2)\,e_{\alpha\beta}, \tag{2.6}$$

$$s_{33} = 3Ke_o + 2G(e_{33} - e_o) - 3K\Theta\alpha_T \cong 0.$$

Odwrotne związki konstytutywne będą miały postać

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{3K}k(\sigma_o)s_o\delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2G}g(t_o^2)(s_{\alpha\beta} - s_o\delta_{\alpha\beta}) -$$

$$- \bar{\beta}(\Theta\alpha_T)\Theta\alpha_T\,\delta_{\alpha\beta}, \tag{2.7}$$

$$e_{\alpha 3} = \frac{1}{2G}\, g(t_o^2)\, s_{\alpha 3};$$

gdzie:

$\sigma_o = \frac{1}{3} s_o$; $s_o = \frac{1}{3} s_{kk}$; $t_o = \tau_o/G$; τ_o - intensywność naprężeń stycznych;

$k(\sigma_o)$ - funkcja średniego naprężenia;

$g(t_o^2)$ - funkcja intensywności naprężeń stycznych.

Ze względu na wariacyjne formułowanie problemu (p.cz.II), wyrazimy związki konstytutywne poprzez energię odkształcenia, którą definiujemy następująco

$$A = \int_0^{e_{ij}} s_{ij}\, de_{ij}. \tag{2.8}$$

Jak pokazano w pracy Kauderara [4]

$$A = A_o + A'; \tag{2.9}$$

przy czym A_o oznacza pracę zmiany objętości; wielkość tę obliczamy z równania

$$A_o = 9K\left[\int_0^{e_o} \varkappa(e)\, e\, de - \beta(\Theta\alpha_T)\Theta\alpha_T e_o\right], \tag{2.10}$$

a A' - pracę zmiany postaci

$$A' = \frac{3}{2} G \int_0^{\phi_o} \phi\, \gamma(\phi^2)\, d\phi. \tag{2.11}$$

Wzór (2.10) różni się od podanego w [4] o człon uwzględniający wpływ temperatury.

Mając określoną energię odkształcenia, związki (2.6) możemy przedstawić w następującej postaci

$$s_{\alpha\beta} = \frac{\partial A(e_o, \phi_o, \Theta)}{\partial e_{\alpha\beta}},$$

$$s_{\alpha 3} = \frac{\partial A(e_o, \phi_o, \Theta)}{\partial e_{\alpha 3}}. \tag{2.12}$$

Teraz już nietrudno określić dopełniającą energię odkształcenia; będzie ona mianowicie równa

$$A_c = A_{c_0} + A'_c, \tag{2.13}$$

gdzie:

$$A_{c_0} = 9K\left[\int_0^{\sigma_0} \sigma k(\sigma)d\sigma - \bar{\beta}(\Theta\alpha_T)\Theta\alpha_T s_0\right],$$

$$A'_c = \frac{3}{2}G\int_0^{t_0} tg(t^2)dt. \tag{2.14}$$

Uwzględniając (2.14) w (2.7), otrzymamy

$$e_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_c(s_0, t_0, \Theta)}{\partial s_{\alpha\beta}},$$

$$e_{\alpha 3} = \frac{\partial A_c(s_0, t_0, \Theta)}{\partial s_{\alpha 3}}. \tag{2.15}$$

3. Analiza pól przemieszczeń

Funkcje określające przemieszczenia płyt warstwowych należy tak konstruować, aby mimo różnych własności fizycznych poszczególnych warstw, spełnione były w każdej z nich równania konstytutywne, jak i warunki ciągłości przemieszczeń (1.3) i naprężeń (1.4). Jednocześnie, w przypadku ograniczenia się do płyt jednowarstwowych winniśmy otrzymać znane już równania teorii płyt; dodatkowo wprowadzone wielkości powinny być - w miarę możliwości - interpretowane fizycznie (por. [5]).

Proponujemy określić pole przemieszczeń k-tej warstwy w następujący sposób

$$v_\alpha^{(k)}(x_1, x_2, z) = u_\alpha(x_1, x_2) + z\eta_\alpha(x_1, x_2) + f^{(k)}(z)\psi_\alpha(x_1, x_2),$$

$$v_3^{(k)}(x_1, x_2, z) = w(x_1, x_2); \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \quad z \in (h_{k-1}, h_k). \tag{3.1}$$

W równaniach (3.1) oznaczono przez: $u_\alpha(x_1, x_2)$ - przemieszczenie punktu $(x_1, x_2, 0)$ w kierunku α-tej osi; $\eta_\alpha(x_1, x_2) = -w_{,\alpha}(x_1, x_2)$ - kąt odkształcenia elementu normalnego płyty jednowarstwowej przy założeniu hipotezy

Kirchhoffa-Love'a; $\psi_\alpha(x_1,x_2)$ - wielkość proporcjonalną do kąta, będącego różnicą kątów odkształcenia elementu normalnego, otrzymanych przy założeniu hipotezy Kirchhoffa-Love'a i hipotezy elementu sztywnego; $(x_1,x_2)\in\Omega$, gdzie $\Omega\subset R^2$, a R^2 jest powierzchnią odniesienia; $f^{(k)}(z)$ - funkcją uwzględniającą wzajemny wpływ różnych warstw na wielkość odkształcenia.

Funkcję $f^{(k)}(z)$ definiujemy następująco

$$f^{(k)}(z) = f(z)\frac{G^{(1)}\gamma^{(1)}}{G^{(k)}\gamma^{(k)}} - \sum_{j=1}^{k-1} f(h_j)\frac{G^{(1)}\gamma^{(1)}}{G^{(j)}\gamma^{(j)}} - \frac{G^{(1)}\gamma^{(1)}}{G^{(1)}\gamma^{(j+1)}}, \quad (k = 1,2,\ldots,m-1), \tag{3.2}$$

gdzie $f(z)$ jest funkcją, której pochodna określa rozkład naprężeń stycznych $s_{\alpha 3}$ lub odkształceń postaciowych $e_{\alpha 3}$.

Zakładamy, że

$$f(h_o) = f'(h_o) = f'(h_m) = 0. \tag{3.3}$$

Tak określone pole przemieszczeń opisuje następujący fakt: element normalny, prostoliniowy przed odkształceniem (lecz przecinający wszystkie warstwy) przestaje nim być po odkształceniu; aby zachować prostoliniowość, w warstwach, proponujemy aproksymować fukcję $f^{(k)}(z)$ łamaną

$$\bar{f}^{(k)}(z) \mathrel{\hat{=}} \frac{f^{(k)}(h_k) - f^{(k)}(h_{k-1})}{h_k - h_{k-1}}(z - h_{k-1}) + f^{(k-1)}(h_{k-1}), \tag{3.4}$$

przy czym $f^{(k)}(h_k)$ są obliczane wg wzoru (4.2).

W przypadku płyty jednowarstwowej równanie (4.1) redukuje się do opisu przemieszczeń, zgodnych z hipotezą elementu sztywnego (por. cz. II).

Teraz określimy składowe tensora odkształcenia, wychodząc z równania (1.1), tj. przyjmujemy

$$2e_{ij}^{(k)} = v_{i,j}^{(k)} + v_{j,i}^{(k)} + v_{l,i}^{(k)}v_{l,j}^{(k)}, \tag{3.5}$$

lub

$$2e_{\alpha\beta}^{(k)} = v_{\alpha,\beta}^{(k)} + v_{\beta,\alpha}^{(k)} + v_{l,\alpha}^{(k)}v_{l,\beta}^{(k)},$$
$$2e_{\alpha 3}^{(k)} = v_{\alpha,3}^{(k)} + v_{3,\alpha}^{(k)} \tag{3.6}$$

W naszych rozważaniach stosujemy teorię dużych ugięć, tzn. uwzględniamy nieliniowe efekty jedynie w odniesieniu do składowej wektora przemieszczenia v_3, a to sprawia, że tensor $e_{ij}^{(k)}$ redukuje się do postaci

$$2e_{\alpha\beta}^{(k)} = v_{\alpha,\beta}^{(k)} + v_{\beta,\alpha}^{(k)} + v_{3,\alpha}^{(k)} v_{3,\beta}^{(k)},$$
$$2e_{\alpha 3}^{(k)} = v_{\alpha,3}^{(k)} + v_{3,\alpha}^{(k)}. \tag{3.7}$$

Podstawiając (3.1) do (3.7), otrzymamy

$$2e_{\alpha\beta}^{(k)} = u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + z(\eta_{\alpha,\beta} + \eta_{\beta,\alpha}) + w_{,\alpha} w_{,\beta} +$$
$$+ f^{(k)}(z)(\phi_{\alpha,\beta} + \phi_{\beta,\alpha}),$$

$$2e_{\alpha 3}^{(k)} = (df^{(k)}(z)/dz)\phi_\alpha = f'^{(k)}(z)\phi_\alpha;$$

Równania te w tradycyjnym zapisie przyjmują postać

$$e_x^{(k)} = \frac{\partial u}{\partial x} + z\frac{\partial \eta_x}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + f^{(k)}(z)\frac{\partial \phi_x}{\partial x},$$

$$e_y^{(k)} = \frac{\partial v}{\partial y} + z\frac{\partial \eta_u}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + f^{(k)}(z)\frac{\partial \phi_y}{\partial y},$$

$$\gamma_{xy}^{(k)} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + z\left(\frac{\partial \eta_x}{\partial y} + \frac{\partial \eta_y}{\partial x}\right) + \tag{3.8}$$
$$+ f^{(k)}(z)\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x}\right) + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\gamma_{xz}^{(k)} = f'^{(k)}(z)\phi_x, \quad \gamma_{yz}^{(k)} = f'^{(k)}(z)\phi_y.$$

W równaniach (3.8) zastąpiono u_α, ψ_α, η_α, $e_{\alpha\beta}$, $e_{\alpha 3}$ odpowiednio przez u, v, ψ_x, ψ_y, η_x, η_y, e_x, e_y, γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}.

Łatwo sprawdzić, że dla równań (3.1) spełnione są obydwa warunki ciągłości (1.3) i (1.4). Jak wynika z definicji pola przemieszczeń (3.1); pierwszy warunek wymaga, aby

$$v_{\alpha}^{(k)}\Big|_{z=h_k^-} = v_{\alpha}^{(k+1)}\Big|_{z=h_k^+}, \qquad (k = 1,2,\dots,m-1), \tag{3.9}$$

gdzie:

$$v_{\alpha}^{(k)}\Big|_{z=h_k^-} = u_{\alpha} + h_k \vartheta_{\alpha} + f^{(k)}(h_k)\phi_{\alpha}$$

$$v^{(k+1)}\Big|_{z=h_k^+} = u_{\alpha} + h_k \vartheta_{\alpha} + f^{(k+1)}(h_k)\phi_{\alpha};$$

lecz

$$f^{(k)}(h_k) = f(h_k)\frac{G^{(1)}\varphi(1)}{G^{(k)}\varphi(k)} + \sum_{j=1}^{k-1} f(h_j)\frac{G^{(1)}\varphi(1)}{G^{(j)}\varphi(j)} - \frac{G^{(1)}\varphi(1)}{G^{(j+1)}\varphi(j+1)},$$

$$f^{(k+1)}(h_k) = f(h_k)\frac{G^{(1)}\varphi(1)}{G^{(k+1)}\varphi(k+1)} + \sum_{j=1}^{k} f(h_j)\frac{G^{(1)}\varphi(1)}{G^{(j)}\varphi(j)} -$$

$$- \frac{G^{(1)}\varphi(1)}{G^{(j+1)}\varphi(j+1)} =$$

$$= f(h_k)\frac{G^{(1)}\varphi(1)}{G^{(k+1)}\varphi(k+1)} + \sum_{j=1}^{k-1} f(h_j)\frac{G^{(1)}\varphi(1)}{G^{(j)}\varphi(j)} - \frac{G^{(1)}\varphi(1)}{G^{(j+1)}\varphi(j+1)} +$$

$$+ f(h_k)\frac{G^{(1)}\varphi(1)}{G^{(k)}\varphi(k)} - \frac{G^{(1)}\varphi(1)}{G^{(k+1)}\varphi(k+1)} = f^{(k)}(h_k);$$

Podkreślone człony uzasadniają równość (3.9); drugi warunek wymaga, aby

$$s_{\alpha 3}^{(k)}\Big|_{z=h_k^-} = s_{\alpha 3}^{(k+1)}\Big|_{z=h_k^+}; \tag{3.10}$$

gdzie:

$$s_{\alpha 3}^{(k)}\Big|_{z=h_k^-} = 2G^{(k)}\varphi^{(k)} e_{\alpha 3}^{(k)}\Big|_{z=h_k^-} =$$

$$= G^{(k)}\gamma^{(k)} \left.\frac{df^{(k)}(z)}{dz}\right|_{z=h_k^-} \psi_\alpha =$$

$$= G^{(1)}\gamma^{(1)} \left.\frac{df(z)}{dz}\right|_{z=h_k^-} = G^{(1)}\gamma^{(1)} f'(h_k)\psi_\alpha,$$

$$\left.s_{\alpha 3}^{(k+1)}\right|_{z=h_k^+} = 2G^{(k+1)}\gamma^{(k+1)} \left.e_{\alpha 3}^{(k+1)}\right|_{z=h_k^+} = \tag{3.10}$$

$$= G^{(k+1)}\gamma^{(k+1)} \left.f'^{(k+1)}(z)\right|_{z=h_k^+} \psi_\alpha =$$

$$= G^{(1)}\gamma^{(1)} \left.f'(z)\right|_{z=h_k^+} \psi_\alpha = G^{(1)}\gamma^{(1)} f'(h_k)\psi_\alpha =$$

$$= \left.s_{\alpha 3}^{(k)}\right|_{z=h_k^-};$$

co wykazano w(3.10).

Jak widać, pole przemieszczeń jest określone funkcję ciągłę zmiennej z, której pierwsza pochodna ma tę własność, że jest ciągła, lecz tylko w obszarze jednej warstwy; ten sam wniosek dotyczy odkształceń i naprężeń.

LITERATURA

[1] Borkowski Sz.: Dynamical equations of physically nonlinear thermoelasticity, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Techn., 9, 24, 1976, 655-662.

[2] Fung Y.C.: Podstawy mechaniki ciała stałego. PWN, Warszawa 1969.

[3] Jędrzejczyk J.: Naprężenia termiczne w płytach fizykalnie nieliniowych, Rozpr. doktorska, 1978, Bibl. Gł. Pol. Śl., Gliwice.

[4] Kauderer H.: Nichtlineare Mechanik, Springer-Verlag Berlin-Gottinger-Meidelberg, 1958.

[5] Andriejew A.H., Niemirowski B.: Ob odnom wariantie teorii uprugich mnogosłojnych anizotropnych płastin, Prikł. Mech., 14, 7, 55-62, (1978).

[6] Nowacki W.: Dynamiczne zagadnienia termosprężystości. PWN, Warszawa 1966.

ФИЗИЧЕСКИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА
ИЗГИБА МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН
I. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ И ПОЛЕ ДЕФОРМАЦИЙ

Р е з ю м е

В работе определено поле деформаций в многослойных пластинах нагруженных произвольным полем поперечных сил, предполагая что определяющие соотношения для индивидуальных слоев являются уравнениями Каудерера. Рассмотрено случай больших изгибов (геометрически нелинейная задача) и действие поля температур.

PHYSICALLY AND GEOMETRICALLY NONLINEAR PROBLEM
OF BENDING OF MULTILAYER PLATES
I. CONSTITUTIVE EQUATIONS AND DISPLACEMENT FIELDS

S u m m a r y

Displacement fields of a multilayer plate loaded with an arbitrary field of transverse force has been defined in this paper. Great deflections of plate have been taken into consideration (geometrically nonlinear problem) and the effects of thermal fields have been also discussed. It was assumed that the constitutive equations of infividual layers are of Kauderer's type.