ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 36 Nr kol. 625

Andrzej WAWRZYNEK

FIZYKALNIE I GEOMETRYCZNIE NIELINIOWY PROBLEM ZGINANIA PŁYT WIELOWARSTWOWYCH

II. WARIACYJNE I RÓŻNICZKOWE RÓWNANIA PROBLEMU

Streszczenie. W oparciu o pracę [5] określono wariacyjne i różniczkowe równania problemu zginania płyt wielowarstwowych, złożonych z warstw izotropowych, jednorodnych, fizycznie nieliniowych (ośrodek typu Kauderera), poddanych odkształceniom skończonym, z uwzględnieniem wpływu temperatury.

1. Funkcjonał Reissnera dla płyty wielowarstwowej

Szeroko obecnie stosowane do rozwiązywania problemów mechaniki metody numeryczne narzucają wariacyjny sposób sformułowania zagadnienia. W naszym przypadku wykorzystamy do tego celu dość dokładnie już opisany [1], [2] [4] funkcjonał Reissnera w którego budowie, obok równań równowagi, uwzględnione są również wszystkie warunki brzegowe (w przemieszczeniach i naprężeniach) oraz równania konstytutywne.

Niech rozpatrywana płyta zajmuje obszar walcowy $v = \Omega \times (h_o, h_m)$, ograniczony dwiema równoległymi płaszczyznami $z = h_o$ i $z = h_m$ oraz powierzchnią boczną $\partial v = \partial\tilde{v} \cup \partial\hat{v} = \partial\Omega \times (h_o, h_m)$ ($\partial\Omega = \partial\tilde{\Omega} \cup \partial\hat{\Omega}$, $\partial\tilde{\Omega} \cap \partial\hat{\Omega} = \phi$). Na części brzegu $\partial\hat{v}$ zadane są obciążenia brzegowe $\hat{X}_i$, natomiast na części $\partial\tilde{v}$ - przemieszczenia u^*_α, kąty obrotu elementu normalnego η^*_α, ϕ^*_α.

W całym obszarze płyty działają obciążenia masowe X_i.

Funkcjonał Reissnera opisujący omawiany tutaj problem przyjmuje postać

$$J_R = \iint_\Omega \left\{ \sum_{k=1}^{m} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[A_c^{(k)}(s_e, t_e, \Theta) - s^{(k)}_{\alpha\beta} e^{(k)}_{\alpha\beta} - 2s^{(k)}_{\alpha 3} e^{(k)}_{\alpha 3} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - X_i^{(k)} v_i^{(k)} \right] dz \right\} d\Omega -$$

$$- \int_{\partial\hat{\Omega}} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \hat{X}_i^{(k)} v_i^{(k)} dz \right\} d\hat{\Gamma} -$$

$$
-\int_{\partial\Omega}\left\{\sum_{k=1}^{m}\int_{h_{k-1}}^{h_k}\left[(u_\alpha - u_\alpha^{*})\tilde{s}_{\alpha\beta}^{(k)} + (\eta_\alpha - \eta_\alpha^{*})\tilde{s}_{\alpha\beta}^{(k)} + \right.\right.
$$

$$
\left.\left. + (\varphi_\alpha - \varphi_\alpha^{*})\tilde{s}_{\alpha\beta}^{(k)} + (w - w^{*})\tilde{s}_{\beta}^{(k)}\right]n_\beta dz\right\}\partial\bar{\Gamma} \qquad \partial\Omega = \Gamma . \tag{1.1}
$$

Wprowadzamy dalej następujące wielkości wewnętrzne

$$
N_{\alpha\beta} = \sum_k N_{\alpha\beta}^{(k)}, \qquad M_{\alpha\beta} = \sum_k M_{\alpha\beta}^{(k)},
$$

$$
T_{\alpha\beta} = \sum_k T_{\alpha\beta}^{(k)}, \qquad S_\alpha = \sum_k S_\alpha^{(k)}, \tag{1.2}
$$

$$
Q_\alpha = \sum_k Q_\alpha^{(k)};
$$

gdzie odpowiednio oznaczono przez

$$
N_{\alpha\beta}^{(k)} = \int_{h_{k-1}}^{h_k} s_{\alpha\beta}^{(k)}dz, \qquad M_{\alpha\beta}^{(k)} = \int_{h_{k-1}}^{h_k} s_{\alpha\beta}^{(k)}zdz,
$$

$$
T_{\alpha\beta}^{(k)} = \int_{h_{k-1}}^{h_k} s_{\alpha\beta}f^{(k)}(z)dz, \qquad S_\alpha^{(k)} = \int_{h_{k-1}}^{h_k} f^{(k)}(z)dz,
$$

$$
Q_\alpha^{(k)} = \int_{h_{k-1}}^{h_k} s_{\alpha 3}^{(k)}dz;
$$

a przez

$$
X_\alpha = \sum_k \bar{X}_\alpha^{(k)}, \qquad Z = \sum_k \bar{X}_3^{(k)},
$$

$$
M_\alpha = \sum_k M_\alpha^{(k)}, \qquad T_1 = \sum_k \bar{T}_1^{(k)}; \tag{1.4}
$$

siły masowe, gdzie

$$\bar{X}_{\alpha}^{(k)} = \int_{h_{k-1}}^{h_k} X_{\alpha}^{(k)} dz, \qquad \bar{X}_3^{(k)} = \int_{h_{k-1}}^{h_k} X_3 dz,$$

$$\bar{M}_i^{(k)} = \int_{h_{k-1}}^{h_k} z\, X_i^{(k)} dz, \qquad T_i^{(k)} = \int_{h_{k-1}}^{h_k} X_i^{(k)} f^{(k)}(z) dz, \tag{1.5}$$

Uwzględniając w (1.1) oznaczenia (1.2)-(1.5), otrzymamy następującą postać funkcjonału Reissnera

$$J_R = V_c - \Pi - W = F\left[u_{\alpha}, w, \phi_{\alpha}, s_{\alpha\beta}, s_{\alpha 3}\right], \tag{1.6}$$

w której przyjęto oznaczenia

$$\Pi = \iint_{\Omega} \left[\sum_{k=1}^{m} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left(s_{\alpha\beta}^{(k)} e_{\alpha\beta}^{(k)} + 2 s_{\alpha 3}^{(k)} e_{\alpha 3}^{(k)} \right) dz \right] d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[N_{\alpha\beta} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) + M_{\alpha\beta} (\vartheta_{\alpha,\beta} + \vartheta_{\beta,\alpha}) + \right.$$

$$\left. + T_{\alpha\beta} (\phi_{\alpha,\beta} + \phi_{\beta,\alpha}) + N_{\alpha\beta} w_{,\alpha} w_{,\beta} + S_{\alpha} \phi_{\alpha} \right] d\Omega; \tag{1.7$_1$}$$

$$V_c = \iint_{\Omega} \left[\sum_{k=1}^{m} \int_{h_{k-1}}^{h_k} A_c^{(k)} (s_o, \phi_o, \theta) dz \right] d\Omega; \tag{1.7$_2$}$$

$$W = \iint_{\Omega} \left[\sum_{k=1}^{m} \int_{h_{k-1}}^{h_k} X_i^{(k)} v_i^{(k)} dz \right] d\Omega +$$

$$+ \int_{\partial\hat{\Omega}} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[\hat{\mathfrak{X}}_{\alpha}^{(k)} u_{\alpha} + \hat{\mathfrak{X}} w - M_{n\alpha} (\vartheta_{\alpha} + \phi_{\alpha}) \right] dz \right\} d\hat{\Gamma} +$$

$$+\int_{\partial\Omega}\left\{\sum_{k=1}^{m}\int_{h_{k-1}}^{h_k}\left\{\left[(u_\alpha - u_\alpha^*) + (\eta_\alpha - \eta_\alpha^*) + (\phi_\alpha - \phi_\alpha^*)\right]\tilde{s}_{\alpha\beta}n_\beta +\right.\right.$$

$$\left.\left. + (w_{,} - w^*)\tilde{s}_{\alpha 3}n_\alpha\right\}dz\right\}d\tilde{\Gamma} =$$

$$= \iint_\Omega (X_\alpha u_\alpha + Z w + M_\alpha \eta_\alpha + T_\alpha \phi_\alpha) d\Omega +$$

$$+ \int_{\hat{\Gamma}}\left[\hat{X}_\alpha u_\alpha + \hat{Z} w - \bar{M}_{n\alpha}(\eta_\alpha + \phi_\alpha)\right] d\hat{\Gamma} +$$

$$+ \int_{\tilde{\Gamma}}\left[(u_\alpha - u_\alpha^*)\tilde{N}_{\alpha\beta}n_\beta + (\eta_\alpha - \eta_\alpha^*)\tilde{M}_{\alpha\beta}n_\beta + \right.$$

$$\left. + (\phi_\alpha - \phi_\alpha^*)\tilde{T}_{\alpha\beta}n_\beta + (w - w^*)\tilde{Q}_\alpha n_\alpha\right] d\tilde{\Gamma}. \qquad (1.7)_3$$

Zgodnie z twierdzeniami ekstremalnymi mechaniki ośrodków ciągłych [5], rzeczywisty stan naprężeń i odkształceń określają takie pola naprężeń, odkształceń lub przemieszczeń, dla których funkcjonał Reissnera przyjmuje wartość stacjonarną (por. § 2). Ze względu na bardzo złożoną formę nieliniowości, która tutaj występuje, trudno w chwili obecnej mówić o wykazaniu, że jest to wartość minimalna, czy maksymalna, w zależności od funkcji; zgodnie z ostatnimi badaniami por. np. [3] należy raczej mówić o punkcie siodłowym rozpatrywanego funkcjonału.

2. Równania różniczkowe problemu

Równania płyt warstwowych możemy otrzymać dwiema drogami: wychodząc z równań równowagi Cauchy'ego lub wykorzystując wariacyjne sformułowanie problemu. My wykorzystamy drugą metodę. Równania różniczkowe zginania płyt warstwowych, geometrycznie i fizykalnie nieliniowych otrzymujemy jako równania Eulera dla funkcjonału określonego równaniem (1.6).

Wariacja funkcjonału Reissnera (1.6) względem przemieszczeń ma postać

$$\delta_u J_R = -\iint_\Omega \left[(N_{\alpha\beta,\beta} + X_\alpha)\delta u_\alpha + (M_{\alpha\beta,\beta\alpha} + N_{\alpha\beta}w_{,\alpha}w_{,\beta} +\right.$$

$$\left. + Z + M_{\alpha,\alpha})\delta w + (T_{\alpha\beta,\beta} + T_\alpha)\delta\phi_\alpha\right] d\Omega +$$

$$+ \int_{\partial\hat{\Omega}}\left[(N_{\alpha\beta}n_\beta - \hat{X}_\alpha)\delta u_\alpha - (M_{\alpha\beta,\beta}n_\alpha + N_{\alpha\beta}w_{,\alpha}w_{,\beta} +\right.$$

$$+ \mathcal{Z})\delta w + (M_{\alpha\beta}\eta_{\beta} - \bar{M}_{n\alpha})\delta\eta_{\alpha} +$$

$$+ (T_{\alpha\beta}n_{\beta} - \bar{M}_{n\alpha})\delta\psi_{\alpha}d\hat{\Gamma} = 0; \tag{2.1}$$

zaś wariacja względem naprężeń

$$\delta_s J_R = \iint_{\Omega}\left[\sum_{k=1}^{m}\int_{h_{k-1}}^{h_k}\left(\frac{\partial A_c^{(k)}}{\partial s_{\alpha\beta}^{(k)}}\delta s_{\alpha\beta}^{(k)} - \delta s_{\alpha\beta}^{(k)} e_{\alpha\beta}^{(k)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\frac{\partial A_c^{(k)}}{\partial s_{\alpha 3}^{(k)}}\delta s_{\alpha 3}^{(k)} - 2\delta s_{\alpha 3}^{(k)} e_{\alpha 3}^{(k)}\right)dz\right]d\Omega -$$

$$-\int_{\partial\tilde{\Omega}}\left[(u_{\alpha} - u_{\alpha}^{*})n_{\beta}\delta N_{\alpha\beta} + (\eta_{\alpha} - \eta_{\alpha}^{*})n_{\beta}\delta M_{\alpha\beta} + \right.$$

$$\left. + (\psi_{\alpha} - \psi_{\alpha}^{*})n_{\beta}\delta T_{\alpha\beta} + (w - w^{*})n_{\beta}\delta Q_{\beta}\right]d\tilde{\Gamma} = 0. \tag{2.2}$$

Aby zachodziły równość (2.1) i (2.2), przy dowolnych wariacjach δu_{α}, δw, $\delta\eta_{\alpha}$, $\delta\psi_{\alpha}$, $\delta s_{\alpha\beta}^{(k)}$, $\delta s_{\alpha 3}^{(k)}$, muszą być spełnione równania

$$\begin{gathered} N_{\alpha\beta,\beta} + X_{\alpha} = 0, \\ M_{\alpha\beta,\beta\alpha} + N_{\alpha\beta}w_{,\alpha\beta} + Z + M_{i,i} = 0, \\ T_{\alpha\beta,\beta} - S_{\alpha} + T_{\alpha} = 0, \\ (x_i) \in \Omega; \end{gathered} \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered} N_{\alpha\beta}n_{\beta} = \mathcal{X}_{\alpha} \\ (M_{\alpha\beta} + N_{\alpha\beta}w_{,\beta})n_{\alpha} = \mathcal{Z}, \\ M_{\alpha\beta}n_{\beta} = \bar{M}_{n\alpha}, \\ T_{\alpha\beta}n_{\beta} = \bar{M}_{n\alpha}, \qquad (x_i) \in \partial\hat{\Omega} = \hat{\Gamma}; \end{gathered} \tag{2.4}$$

$$u_{\alpha} = u_{\alpha}^{*}, \quad w = w^{*}, \quad \eta_{\alpha} = \eta_{\alpha}^{*}, \quad \psi_{\alpha} = \psi_{\alpha}^{*}, \qquad (x_i) \in \partial\tilde{\Omega} = \tilde{\Gamma}; \tag{2.5}$$

$$e^{(k)}_{\alpha\beta} = \frac{\partial A^{(k)}_c}{\partial s^{(k)}_{\alpha\beta}}, \quad e^{(k)}_{\alpha 3} = \frac{\partial A^{(k)}_c}{\partial s^{(k)}_{\alpha 3}}, \quad (x_\alpha, z) \in \Omega \times (h_{k-1}, h_k) \tag{2.6}$$

$$(k = 1,2,\dots,m)$$

Widzimy, że otrzymane równania są: a) równaniami problemu zginania płyt warstwowych - (2.3); b) warunkami brzegowymi problemu w naprężeniach - (2.4); c) warunkami brzegowymi w przemieszczeniach - (2.5); d) związkami konstytutywnymi - (2.6).

Należy zaznaczyć, że spełnione są również warunki ciągłości przemieszczeń i naprężeń na granicach warstw, tzn.:

$$v^{(k)}_i \Big|_{z=h_k^-} = v^{(k+1)}_i \Big|_{z=h_k^+},$$

$$s^{(k)}_{\alpha 3} \Big|_{z=h_k^-} = s^{(k+1)}_{\alpha 3} \Big|_{z=h_k^+}, \quad (x_1; x_2) \in \Omega$$

$$(k = 1,2,\dots,m-1).$$

Równania (2.3)÷(2.6) opisują również problem płyt jednowarstwowych. Pokażemy, że z założeń wprowadzonych w części I [5] wynikają równania płyt jednowarstwowych, uwzględniające wpływ odkształceń $e_{\alpha 3}$ na wielkość przemieszczeń, równoważne równaniom (2.3)÷(2.6). W tym przypadku funkcja $f^{(k)}(z)$ redukuje się do postaci

$$f^{(1)}(z) = \frac{f(h_m) - f(h_o)}{h_m - h_o}(z - h_o) =$$

$$= \frac{f(h_m)}{h_m} z, \qquad z \in (-H/2; H/2) \tag{2.7}$$

Wówczas wektor przemieszczenia określony jest następująco

$$v_\alpha = u_\alpha + z\varphi_\alpha, \quad v_3 = w; \tag{2.8}$$

gdzie $\varphi_\alpha = \eta_\alpha + (f(h)/h)\phi_\alpha$, czyli jak w przypadku zadania zginania płyt przy uwzględnieniu hipotezy elementu sztywnego.

Po wprowadzeniu wielkości wewnętrznych i masowych

$$N_{\alpha\beta} = \int_0^h s_{\alpha\beta}\,dz, \quad M_{\alpha\beta} = \int_0^h z\, s_{\alpha\beta}\,dz,$$

$$Q_\alpha = \int_0^h s_{\alpha 3} dz, \quad \overline{X}_\alpha = \int_0^h X_\alpha dz,$$

$$Z = \int_0^h X_3 dz, \quad M_1 = \int_0^h X_1 z\, dz, \tag{2.9}$$

i wykorzystaniu funkcjonału (1.1) otrzymujemy funkcjonał Reissnera w postaci

$$J_R^{(1)} = V_c - \mathfrak{X} - W = F\left[u_\alpha, w, \varphi_\alpha, s_{\alpha\beta}, s_{\alpha 3}\right], \tag{2.10}$$

gdzie

$$\mathfrak{X} = \frac{1}{2}\iint_\Omega \Big[N_{\alpha\beta}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) + M_{\alpha\beta}(\varphi_{\alpha,\beta} + \varphi_{\beta,\alpha}) +$$

$$+ N_{\alpha\beta} w_{,\alpha} w_{,\beta} + Q_\alpha(\varphi_\alpha + w_{,\alpha})\Big] d\Omega, \tag{2.11}$$

$$V_c = \iint_\Omega \int_0^h A_c(s_o, \phi_o, \theta) dz d\Omega, \tag{2.12}$$

$$W = \iint_\Omega (\overline{X}_\alpha u_\alpha + Zw + \overline{M}_\alpha \varphi_\alpha) d\Omega +$$

$$+ \int_{\partial\hat{\Omega}} (\hat{X}_\alpha u_\alpha + Zw - \overline{M}_{n\alpha}\varphi_\alpha) d\hat{\Gamma} + \tag{2.13}$$

$$+ \int_{\partial\tilde{\Omega}} \Big[(u_\alpha - u_\alpha^*) N_{\alpha\beta} n_\beta + (\varphi_\alpha - \varphi_\alpha^*) M_{\alpha\beta} n_\beta +$$

$$+ (w - w^*) Q_\alpha n_\alpha\Big] d\tilde{\Gamma}; \quad \partial\Omega = \Gamma .$$

W tym przypadku równania Eulera dla funkcjonału (2.10) przyjmą postać: równań równowagi wewnętrznej

$$N_{\alpha\beta,\beta} + X_\alpha = 0,$$

$$M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha + M_\alpha = 0, \tag{2.14}$$

$$N_{\alpha\beta} w_{,\alpha\beta} + Q_{\alpha,\alpha} + Z = 0, \qquad (x_i) \in \Omega$$

siłowych warunków brzegowych

$$
\begin{aligned}
& N_{\alpha\beta} n_{\beta} = \mathfrak{X}_{\alpha}, \\
& N_{\alpha\beta} w_{,\alpha} n_{\beta} + Q_{\alpha} n_{\alpha} = \mathfrak{Z}, \qquad\qquad (2.15) \\
& M_{\alpha\beta} n_{\beta} + \overline{M}_{n\alpha} = 0, \qquad (x_i) \in \partial\hat{\Omega} = \hat{\Gamma};
\end{aligned}
$$

warunków brzegowych w przemieszczeniach

$$
\begin{aligned}
& u_{\alpha} = u_{\alpha}^{*}, \qquad \varphi_{\alpha} = \varphi_{\alpha}^{*}, \qquad\qquad (2.16) \\
& w = w^{*}, \qquad (x_i) \in \partial\tilde{\Omega} = \tilde{\Gamma};
\end{aligned}
$$

związków konstytutywnych

$$
e_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_c}{\partial s_{\alpha\beta}}, \qquad e_{\alpha 3} = \frac{\partial A_c}{\partial s_{\alpha 3}}. \qquad\qquad (2.17)
$$

Równania (2.14)÷(2.17) stanowią zupełny układ równań problemu zginania płyt jednowarstwowych, jednorodnych, izotropowych, fizykalnie nieliniowych, poddanych odkształceniom skończonym, z uwzględnieniem wpływu temperatury, przy założeniu hipotezy elementu sztywnego.

LITERATURA

[1] Fung Y.C.: Podstawy mechaniki ciała stałego. PWN, Warszawa 1969.

[2] Reissner E.: On Variational Theorem for Finite Elastic Deformations, J. Math. and Physics, vol. 32 (1953), 129-35.

[3] Sewell M.J.: The Governing Equations and Extremum Principles of Elasticity and Plasticity Generated from a Single Functional, part I J. Struct. Mech. 1(2), (1973), 1-32; part II, ibid. 2, 3 (1973),135-158.

[4] Washizu K.: Variational methods in elasticity and plasticity, Pergamon Press, 1974.

[5] Wawrzynek A.: Fizykalnie i geometrycznie nieliniowy problem zginania płyt wielowarstwowych. Cz. I, ZN Pol. Śl., Mat.-Fiz., w druku.

ФИЗИЧЕСКИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА
ИЗГИБА МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН
II. ВАРИАЦИОННЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ

Р е з ю м е

В работе определено вариационные и дифференциальные уравнения изгиба многослойных пластин, состоящих из изотропных, однородных, физически нелинейных слоев (среда Каудерера), подвергнутых конечным деформациям с учётом влияния температуры.

PHYSICALLY AND GEOMETRICALLY NONLINEAR PROBLEM
OF BENDING OF MULTILAYER PLATES
II. VARIATIONAL AND DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE PROBLEM

S u m m a r y

Basing on the results of the previous paper 5 are introduced variational and differential equations of the problem of bending of multilayer plates composed of uniform isotropic physically nonlinear layers (the medium of Kauderer's type), subjected to finite deformations and thermal effects.