ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 36 Nr kol. 625

Andrzej BARANOWSKI

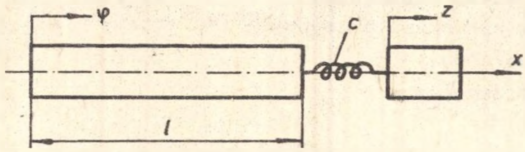
DRGANIA SKRĘTNE UKŁADÓW DYNAMICZNYCH CIĄGŁO-DYSKRETNYCH

Streszczenie. Zbadano problem drgań skrętnych układu dynamicznego, będącego modelem silnika połączonego z nieliniowym odbiornikiem mocy. Analizę przeprowadzono w oparciu o metodę Galerkina.

1. Model i oznaczenia

Do rozważań przyjęto wał jednorodny o stałym przekroju i stałej sprężystości, obciążony momentem skręcającym, rozłożonym równomiernie wzdłuż całej długości wału.

Założono również sprzężenie wału z nieliniowym dyskretnym układem fizycznym, reprezentującym odbiór mocy.



Oznaczenia:

φ, z - współrzędne uogólnione,
l - długość wału,
c - sprężystość połączenia wału i odbiornika mocy,
ρ - gęstość materiału wału,
GI_0 - sztywność skręcania wału,
m(x,t) - jednostkowy moment skręcający.

2. Sformułowanie problemu

Równanie drgań skrętnych wału traktowanego jak układ ciągły można zapisać znanym równaniem różniczkowym cząstkowym (np. [2]):

$$\rho I_0 \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - GI_0 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = m(x,t) \qquad (1)$$

z warunkami brzegowymi:

$$GI_o \frac{\partial\varphi}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0$$

$$GI_o \frac{\partial\varphi}{\partial x}\bigg|_{x=1} = -c(\varphi(1) - z) \tag{2}$$

oraz z warunkami początkowymi:

$$\varphi(x,t)\bigg|_{t=0} = \varphi_1(x)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \varphi_2(x) \tag{3}$$

Traktując odbiornik mocy jak nieliniowy oscylator sprzężony z wałem, można jego dynamikę opisać równaniem postaci:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + f(z, \frac{dz}{dt}, t) = q_1(t) + c(\varphi(1) - z) \tag{4}$$

ze znanymi warunkami początkowymi $z(0)$ i $\frac{dz}{dt}(0)$.

Równanie (1) z warunkami brzegowymi (2) tworzy zagadnienie brzegowe mieszane, niejednorodne.

Dokonując podstawienia:

$$\varphi(x,t) = u(x,t) + z(t)\chi_{[0,1]} \tag{5}$$

gdzie χ - funkcja charakterystyczna, można problem sprowadzić do jednorodnego.

Po przekształceniach równanie (1) przyjmie postać:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = q(x,t) - \frac{d^2z}{dt^2}\chi_{[0,1]} \tag{6}$$

gdzie:

$$k^2 = \frac{G}{\rho}, \quad q(x,t) = \frac{m(x,t)}{\rho I_o}$$

Warunki brzegowe:

$$GI_o \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0$$

$$\left(cu(x,t) + GI_0 \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=1} = 0 \tag{7}$$

Warunki początkowe:

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \varphi_1(x) - z(0)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_2(x) - \frac{dz}{dt}(0) \tag{8}$$

Równanie odbioru mocy:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + f(z, \frac{dz}{dt}, t) = q_1(t) + cu(1,t) \tag{9}$$

Równanie (6) można zapisać w postaci operatorowej, wykorzystując zdefiniowany poniżej operator różniczkowania:

$$E = -\frac{\partial}{\partial x}\left(k^2 \frac{\partial}{\partial x}\right) \quad \forall x \in G$$

gdzie:

$G \subset R^n$ - ograniczony obszar o regularnym brzegu Γ

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$

z dziedziną:

$$M(E) = C^2(\bar{G})$$

Dla rozpatrywanego problemu (6), (7) mamy:

$$G = [0,1], \quad \Gamma_1 = \{x:\ x=1\}, \quad \Gamma_2 = \{x:\ x=0\}$$

oraz

$$D(E) = \left\{ u:\ u \in M(E),\ \left(cu + GI_0 \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{\Gamma_1} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\Gamma_2} = 0 \right\} \tag{10}$$

Równanie (6) przyjmie postać:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Eu = q - \frac{d^2z}{dt^2}\chi_{[0,1]} \tag{11}$$

Dla uogólnienia rozważań można rozszerzyć operator E do tzw. operatora energetycznego, będącego złożeniem trzech operatorów, w postaci [1]:

$$A = L^{*}A_{0}L$$

przeprowadzającego pewną refleksywną przestrzeń Banacha V w sprzężoną do niej V^{*}, przy czym:

$$L \in (V \rightarrow Y)$$

$$A_{0} \in (Y \rightarrow Y^{*})$$

$$L^{*} \in (Y^{*} \rightarrow V^{*})$$

Aby znaleźć rozszerzony operator A, należy określić poszczególne przestrzenie i operatory. Dla rozważanego problemu mamy:

$$V = \left\{ u:\ u \in W^{1,2}(G) \right\}$$

z normą:

$$\| u \| = \left(\int_{G} |\text{grad } u|^{2} dx + \int_{\Gamma_1} |u|^{2} d\sigma \right)^{1/2}$$

przy tym przestrzeń V jest gęsta i ciągła w przestrzeni Hilberta H = $= L^{2}(G)$ oraz zachodzi:

$$V \subset H \subset V^{*}$$

Mamy dalej:

$$Y = L^{2}(G) \times L^{2}(\Gamma_{1})$$

$$Y^{*} = L^{2}(G) \times L^{2}(\Gamma_{1})$$

$$L:\ u \rightarrow \left\{ \frac{\partial u}{\partial x},\ \gamma u \right\}$$

gdzie:

$$\gamma \in (V \rightarrow L^{2}(\Gamma_{1}));$$

$$A_{0}: \left\{ y, u \right\} \rightarrow \left\{ k^{2}_{y},\ cu \right\}$$

Dla tak określonych przestrzeni istnieje operator A, wobec czego równanie (11) przyjmie postać:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Au = q - \frac{d^2z}{dt^2}\chi_{[0,1]} \tag{12}$$

gdzie:

$$q \in X^*$$

$$A \in (X \to X^*)$$

$$X = L^2(S,V) = X^*, \quad S = [0,T]$$

3. Rozwiązanie problemu metodą Galerkina

Wykorzystując operator, można równanie (9) zapisać:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + f(z, \frac{dz}{dt}, t) = q_1(t) + c(\gamma u) \tag{13}$$

Dalej zakłada się, że istnieje operator A_1 spełniający relację:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = A_1(q_1 + c(\gamma u)) \tag{14}$$

Wówczas z (12) i (14) mamy:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Au + A_1(q_1 + c(\gamma u))\chi = q \tag{15}$$

Rozpatrywany problem można rozwiązać metodą Galerkina. W tym celu wybieramy w przestrzeni V (a więc i w H) układ zupełny $\{h_1, h_2, \ldots\}$ elementów liniowo niezależnych. Wówczas H_n oznacza podprzestrzeń liniową, rozpiętą na tych elementach. Stąd:

$$X_n = L^2(S,H_n)$$

$$X_n^* = L^2(S,H_n)$$

Każdemu operatorowi $D \in (X \to X^*)$ można teraz przyporządkować operator $D_n \in (X_n \to X_n^*)$ według następującej definicji:

$$\langle D_n u, v \rangle = \langle Du, v \rangle, \quad \forall v \in X_n \tag{16}$$

Oznaczając:

$$Du = A_1(q_1 + c(\gamma u))\chi_{[0,1]}$$

można, korzystając z definicji (16), znaleźć operator D_n:

$$\langle A_1(q_1 + c(\gamma u))\chi, v \rangle = A_1(q_1 + c(\gamma u))\langle \chi, v \rangle =$$

$$= A_1(q_1 + c(\gamma u))\langle \chi_n, v \rangle = \langle A_1(q_1 + c(\gamma u))\chi_n, v \rangle$$

Stąd:

$$D_n u = A_1(q_1 + c(\gamma u))\chi_n \tag{17}$$

Znając operator D_n, można teraz zamiast równanie (15) napisać układ n-równań Galerkina:

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} + A_n u_n + D_n u_n = q_n$$

lub, wykorzystując (17):

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} + A_n u_n + A_1(q_1 + c(\gamma u_n))\chi_n = q_n \tag{18}$$

Niech dalej z_n będzie z definicji rozwiązaniem następującego równania różniczkowego:

$$\frac{d^2 z_n}{dt^2} + f(z_n, \frac{dz_n}{dt}, t) = q_1 + c(\gamma u_n) \tag{19}$$

Łatwo zauważyć, że zachodzi relacja:

$$\frac{d^2 z_n}{dt^2} = A_1(q_1 + c(\gamma u_n))$$

Stąd wypływa wniosek, że układowi równań (18) odpowiada układ Galerkina 2n równań:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2u_n}{dt^2} + A_n u_n = q_n - \frac{d^2z_n}{dt^2} \\
&\frac{d^2z_n}{dt^2} + f\left(z_n, \frac{dz_n}{dt}, t\right) = q_1 + c(\varphi u_n)
\end{aligned}
\tag{20}
$$

z warunkami początkowymi:

$$
u_n(0) = \varphi_{1n} - z_n(0) \quad i \quad \frac{du_n}{dt}(0) = \varphi_{2n} - \frac{dz_n}{dt}(0)
$$

Otrzymany układ równań (20) ma postać dogodną do obliczeń numerycznych.

LITERATURA

[1] Gajewski H., Groger K., Zacharias K.: Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen. Berlin 1974.

[2] Osiński Z.: Teoria drgań. Warszawa 1978.

КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Р е з ю м е

В статье рассмотрены крутильные колебания валв сопряженного с нелинейной дискретной физической системой. Проблему решено используя метод Галеркина.

TORTIONAL VIBRATIONS OF CONTINUOUS-DISCRETE DYNAMICAL SYSTEMS

S u m m a r y

Tortional vibrations of the shaft connected with a discrete physical system have been considered using the method of Galerkin.