ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 35 Nr kol. 625

Jerzy SKRZYPCZYK

TRANSFORMACJA LAPLACE'A DYSTRYBUCJI STOCHASTYCZNYCH

Streszczenie. W oparciu o klasyczną transformatę Laplace'a zdefiniowano szeroką klasę dystrybucji stochastycznych. W naturalny sposób otrzymano uogólnienie transformaty Laplace'a dla tak wprowadzonych dystrybucji. W opracowaniu zastosowano metodę reprezentacji dystrybucji stochastycznych przy pomocy ciągów zwyczajnych procesów stochastycznych, która to metoda jest analogiczna do propozycji C. Swartza definiowania dystrybucji za pomocą przekształcenia Laplace'a.

Zastosowanie tej metody, zaproponowanej po raz pierwszy przez J. Mikusińskiego w pracy dotyczącej ciągowej teorii dystrybucji prowadzi do bardzo prostych i prawie elementarnych dowodów twierdzeń przedstawionej teorii.

1. Oznaczenia i definicje

Oznaczmy przez A klasę wszystkich funkcji $f(z)$, które są analityczne w pewnej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej $\mathrm{Re}\, z > a \geq 0$. Półpłaszczyzna ta może zależeć od funkcji [4].

Przez R oznaczać będziemy zbiór funkcji $p(t)$ o wartościach zespolonych, określonych na $]-\infty,[$ takich, że:

(i) $\mathrm{supp}(p(t)) \subset [0,\infty[$;

(ii) $p \in C^{\infty}(-\infty,\infty)$;

(iii) $p^{(k)}(0) = 0 \ \forall k \geq 0$, gdzie $p^{(k)}(t) = d^k p(t)/dt^k$;

(iv) $\exists C > 0 : p^{(k)}(t) \leq C\exp(kt) \ \forall t \in [0,\infty[, k \geq 0$ [4].

Niech $\underline{\omega}$ będzie przestrzenią zdarzeń elementarnych ω i P będzie miarą probabilistyczną na przeliczalnie addytywnej σ-algebrze podzbiorów borelowskich tej przestrzeni. Trójka uporządkowana oznaczać będzie ustaloną przestrzeń probabilistyczną $(\underline{\omega}, \beta, P)$.

Mierzalną funkcję $f(t,\omega)$ argumentów $t \in]-\infty, \infty[$ $\omega \in \underline{\omega}$ ($t \in K$, K - zbiór liczb zespolonych) o wartościach rzeczywistych lub zespolonych nazywać będziemy procesem stochastycznym. Dwa procesy stochastyczne nazwiemy identycznymi, jeżeli dla prawie wszystkich $\omega \in \underline{\omega}$ posiadają takie same realizacje.

Oznaczymy dalej przez $\mathcal{A}$ klasę procesów stochastycznych $f(z,\omega)$, $z \in K$, których prawie wszystkie realizacje są analityczne w pewnej półpłaszczyźnie $\mathrm{Re}\, z > a \geq 0$. Półpłaszczyzna analityczności może zależeć od realiza-

cji procesu stochastycznego, tzn. dla prawie wszystkich $\omega_0 \in \Omega$ funkcja $f(z,\omega_0)$ jest analityczna w pewnej półpłaszczyźnie $\mathrm{Re}\, z > a(\omega_0) \geq 0$.

Przez $\mathcal{P}$ oznaczać będziemy klasę procesów stochastycznych $f(t, \omega)$ $t \in]-\infty,\infty[$, których prawie wszystkie realizacje są klasy R.

Ciąg $\{f_n(z,\omega)\}$ procesów stochastycznych w $\mathcal{A}$ nazwiemy zbieżnym do procesu $f(z,\omega)$ przy $n \to \infty$ i oznaczać będziemy $f_n(z,\omega) \rightrightarrows f(u,\omega)$ lub $\lim f_n(z,\omega) = f(z,\omega)$, jeżeli dla prawie wszystkich $\omega_0 \in \Omega$ ciąg realizacji $f_n(z,\omega_0)$ jest zbieżny do realizacji $f(z,\omega_0)$ niemal jednostajnie ze względu na t.

Wartość oczekiwaną procesu stochastycznego, tzn. $\int_\Omega f(t,\omega)dP$, oznaczać będziemy przez $\mathcal{E} f(t,\omega)$.

Każda funkcja $x(t) \in R$ posiada transformatę Laplace'a

$$(Lx)(z) = \int_0^\infty x(t)\exp(-zt)dt,$$

która jest elementem A. Zauważmy, że dla prawie wszystkich ω_0 istnieje transformata Laplace'a realizacji $x(t,\omega_0)$ procesu stochastycznego $x(t,\omega)$ należącego do $\mathcal{P}$ oznaczona w zwykły sposób $(Lx)t,\omega))(z,\omega)$. Proces stochastyczny otrzymany w wyniku tak określonej transformaty Laplace'a oznaczymy $(Lx)(z,\omega)$. W dalszych rozważaniach przyjmiemy, że stale bierzemy pod uwagę mierzalną modyfikację tego procesu. Prawie wszystkie realizacje procesu Lx należą do A, stąd wynika, że $Lx \in \mathcal{A}$

2. Dystrybucje stochastyczne i przekształcenie Laplace'a

Definicja 1. Ciąg $\{x_n(t,\omega)\}$ $(x_n(t,\omega) \in \mathcal{P},\ n = 1,2,\ldots)$ procesów stochastycznych nazwiemy podstawowym, jeżeli ciąg procesów $\{Lx_n(z,\omega)\}$ jest zbieżny w $\mathcal{A}$.

Definicja 2. Dwa ciągi podstawowe procesów stochastycznych należących do $\mathcal{P}$ $\{x_n(t,\omega)\}$ i $\{y_n(t,\omega)\}$ nazwiemy równoważnymi, jeżeli

$$\lim Lx_n(z,\omega) = \lim Ly_n(z,\omega).$$

Relacja określona definicją 2 jest relacją równoważności, co pozwala na wprowadzenie w zbiorze ciągów podstawowych klas równoważności ciągów. Tak wprowadzone klasy równoważności ciągów procesów stochastycznych będą nazywane dalej dystrybucjami stochastycznymi i będą oznaczane dużymi literami alfabetu łacińskiego i greckiego: $\Phi(t,\omega)$, $X(t,\omega)$ itd. Jeżeli $\{x_n(t,\omega)\}$ jest ciągiem podstawowym, dystrybucja określona przez $\{x_n\}$

oznaczona będzie $[x_n(t,\omega)]$, przestrzeń dystrybucji stochastycznych oznaczona będzie $\mathcal{S}$.

Jeżeli $X(t,\omega) = [x_n(t,\omega)] \in \mathcal{S}$, transformatę Laplace'a $LX(t,\omega)$ dystrybucji $X(t,\omega)$ zdefiniujemy w sposób następujący:

$$L(X(t,\omega)) = \lim L(x_n(t,\omega)).$$

Definicja ta nie zależy od wyboru ciągu $\{x_n\}$ z odpowiedniej klasy $[x_n(t,\omega)]$.

3. Podstawowe operacje na dystrybucjach stochastycznych

Oznaczmy $X(t,\omega) = [x_n(t,\omega)]$ i $Y(t,\omega) = [y_n(t,\omega)]$. Niech $X, Y \in \mathcal{S}$ i niech $c \in K$.

Definicja 3.

$$X(t,\omega) + Y(t,\omega) \overset{df}{=} [x_n(t,\omega) + y_n(t,\omega)],$$

$$cX(t,\omega) \overset{df}{=} [cx_n(t,\omega)].$$

Zauważmy, że

$$L(X(t,\omega) + Y(t,\omega)) = L(X(t,\omega)) + L(Y(t,\omega)),$$

$$L(cX(t,\omega)) = cL(X(t,\omega)).$$

Łatwo udowodnić inne, mniej elementarne własności przekształcenia Laplace'a:

$$L(X(ct,\omega)) = (1/c)\tilde{X}(z/c,\omega), \quad c \neq 0$$

$$L(X(t-\tau,\omega)) = \exp(-\tau z)\tilde{X}(z,\omega), \quad \tau \geq 0$$

$$L(\exp(ct)X(t,\omega)) = \tilde{X}(z-c,\omega),$$

$$L((-t)^n X(t,\omega)) = \tilde{X}^{(n)}(z,\omega) \quad n \geq 0,$$

gdzie wprowadzono oznaczenie $L(X(t,\omega)) = \tilde{X}(z,\omega)$.

4. Różniczkowanie, całkowanie i zbieżność

Zgodnie z często stosowaną metodą oznaczeń (patrz np. [4]) $x^{(k)}(t)$ i $x^{(-k)}(t)$ oznacza k-tą pochodną i k-tą całkę iterowaną funkcji $x(t)$.

Twierdzenie 1. Jeżeli $\{x_n(t,\omega)\}$ jest ciągiem podstawowym takim, że $\lim Lx_n = g$, wówczas ciąg $\{x_n^{(k)}(t,\omega)\}$ jest ciągiem podstawowym i $\lim L(x^{(k)}(t,\ )) = z^k g \quad k = 0, \pm 1, \pm 2$.

Dowód pomijamy jako bardzo prosty.

Definicja 4. Niech $X(t,\omega) = [x_n(t,\omega)] \in \mathcal{S}$. Pochodną dystrybucji stochastycznej $X(t,\omega)$ oznaczymy $X^{(1)}(t,\omega)$ i zdefiniujemy w sposób następujący:

$$X^{(1)}(t,\omega) = [x_n^{(1)}(t,\omega)].$$

Całką dystrybucji stochastycznej nazwiemy wielkość

$$X^{(-1)}(t,\omega) = \int X(t,\omega)dt = [x_n^{(-1)}(t,\omega)].$$

Wyższe pochodne i całki definiujemy w zwykły sposób.

Zauważmy, że wprost z definicji wynika

$$L(X^{(k)}(t,\omega)) = z^k L(X(t,\omega)) \ \forall\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Twierdzenie 2. Każda dystrybucja stochastyczna jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna.

Zdefiniujemy teraz zbieżność w zbiorze dystrybucji stochastycznych.

Definicja 5. Ciąg $\{X_n(t,\omega)\}$ dystrybucji stochastycznych należących do $\mathcal{S}$ nazwiemy zbieżnym do dystrybucji $X(t,\omega)$ należącej do $\mathcal{S}$, przy $n \to \infty$, jeżeli

$$\lim LX_n(t,\omega) = LX(t,\omega).$$

Przyjmiemy dalej oznaczenie $\lim X_n(t,\omega) = X(t,\omega)$.

Łatwe do udowodnienia są następujące własności dystrybucji.

Twierdzenie 3. Jeżeli $\lim X_n(t,\omega) = X(t,\omega)$, $\lim Y_n(t,\omega) = Y(t,\omega)$ i $c \in K$, wówczas

$$\lim cX_n(t,\omega) = cX(t,\omega),$$

$$\lim (X_n(t,\omega) + Y_n(t,\omega)) = X(t,\omega) + Y(t,\omega).$$

Twierdzenie 4. Jeżeli $\lim X_n(t,\omega) = X(t,\omega)$, wówczas

$$\lim X_n^{(k)}(t,\omega) = X^{(k)}(t,\omega), \ \forall\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Twierdzenie 5. Jeżeli ciąg $\{X_n(t,\omega)\}$ dystrybucji należących do $\mathcal{S}$ posiada własność taką, że $\lim LX_n(t,\omega)$ istnieje w przestrzeni $\mathcal{A}$, wówczas istnieje dystrybucja stochastyczna $X(t,\omega) \in \mathcal{S}$ taka, że $\lim X_n(t,\omega) = X(t,\omega)$.

D o w ó d. Z definicji wynika, że istnieje ciąg podstawowy taki, że $X_n(t,\omega) = [x_{nm}(t,\omega)]$. Oczywiście

$$\lim_{m\to\infty} L(x_{nm}(t,\omega)) = L(X_n(t,\omega)).$$

Ciąg $LX_n(t,\omega)$ jest zbieżny do procesu stochastycznego $g(z,\omega)$ należącego do $\mathcal{A}$. Ciąg $\{Lx_{nm}(t,\omega)\}$ dla prawie wszystkich $\omega_0 \in \omega$ posiada podciąg zbieżny niemal jednostajnie do $g(z,\omega_0)$. Oznaczmy ten podciąg przez $\{Ly_k(t,\omega)\}$. Wówczas $X(t,\omega) = [y_k(t,\omega)]$ posiada własność, że $LX(t,\omega) = g(z,\omega)$ prawie wszędzie.

Wynik ten posiada duże znaczenie dla dalszych badań.

Definicja 6 [4]. Ciąg $[\delta_n]$ funkcji należących do R nazwiemy ciągiem deltowym, jeżeli:

(i) $\delta_n(t) \geq 0$,

(ii) $\operatorname{supp}\delta_n(t) \subset [0, 1/n]$,

(iii) $\int_0^{\infty} \delta_n(t)dt = 1$.

Jeżeli $\{\delta_n\}$ jest ciągiem deltowym, dowodzi się, że:

$$\lim L\delta_n = 1 \quad [4].$$

Stąd wynika, że wszystkie ciągi deltowe są równoważne. Przyjmiemy tradycyjne oznaczenie $\delta = [\delta_n]$, odstępując jeden raz od przyjętej zasady oznaczania dystrybucji stochastycznych.

Twierdzenie 6. Jeżeli proces $f(z,\omega)$ należy do $\mathcal{A}$, wówczas istnieje dystrybucja stochastyczne $X(t,\omega) \in \mathcal{S}$ taka, że

$$L(X(t,\omega) = f(z,\omega).$$

D o w ó d. Zauważmy, że każdy wielomian o współczynnikach losowych jest transformatą pewnej dystrybucji stochastycznej należącej do $\mathcal{S}$. Na mocy twierdzenia 5 wystarczy udowodnić, że każdy proces $f(z,\omega)$ należący do klasy $\mathcal{A}$ jest granicą zbieżnego w $\mathcal{A}$ ciągu wielomianów losowych.

Niech $\{K_n\}$ będzie wstępującym ciągiem zbiorów zwartych, którego sumą jest półpłaszczyzna D analityczności procesu $f(z,\omega)$. Zbudujmy obszar G_n jednospójny z brzegiem kawałkami gładkim $\partial G_n = \gamma_n$ taki, że $K_n \subset G_m \subset D$ ($\subset$ oznacza zawieranie z domknięciem). Z całkowego wzoru Cauchy'ego dla dowolnego punktu $z \in K_n$ mamy

$$f(z,\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\zeta,\omega)}{\zeta - z}\, d\zeta .$$

Na początku pokażemy, że $f(z,\omega)$ można przybliżyć na K_n mierzalnymi funkcjami wymiernymi. W tym celu podzielmy γ_n punktami $\zeta_{n\nu}$ ($\nu=1,2,\ldots,N$) uporządkowanymi zgodnie z porządkiem obchodzenia γ_n, oznaczmy dalej $\gamma_{n\nu}$ część γ_n zawartą między ζ_n i $\zeta_{n(\nu+1)}$, przyjmijmy $\Delta\zeta_{n\nu} = \zeta_{n(\nu+1)} - \zeta_{n\nu}$. Założymy dalej $\zeta_{n(N+1)} = \zeta_{n1}$.

Proces stochastyczny

$$f_{nN}(z,\omega) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{N} \frac{f(\zeta_{n\nu},\omega)}{\zeta_{n\nu} - z}\Delta\zeta_{n\nu}$$

jest mierzalny ze względu na $\omega \in \Omega$. Wynika to z faktu mierzalności $f(z,\omega)$ dla ustalonego t. Łatwo wykazać, że proces $f_{nN}(z,\omega)$ jest zbieżny jednostajnie do $f(z,\omega)$ na K_n przy $N \to \infty$.

Z faktu, że dowolną funkcję postaci $1/(\zeta - z)$, gdzie $\zeta \in \partial G_n$ jest dowolnym punktem, można na K_n przybliżyć jednostajnie wielomianami, wynika, że istnieje ciąg wielomianów mierzalnych zbieżnych jednostajnie do $f(z,\omega)$ na K_n i niemal jednostajnie na D (dla prawie wszystkich $\omega_0 \in \Omega$).

Łatwo sprawdzić, że możliwa jest również inna interpretacja pochodnej procesu stochastycznego o trajektoriach będących dystrybucjami.

<u>Twierdzenie 7</u>. Jeżeli $X(t,\omega) \in \mathcal{S}$ i $h > 0$, wówczas

$$X^{(1)}(t,\omega) = \lim_{h \to 0} (X(t,\omega) - X(t-h,\omega))/h.$$

5. <u>Procesy stochastyczne w zwykłym sensie</u>

Pokażemy, że każdy proces stochastyczny określony na $[0, \infty[$, którego realizacje są funkcjami lokalnie całkowalnymi o wzroście ograniczonym eksponencjalnie, jest w pewnym sensie dystrybucją stochastyczną należącą do

3. Zbiór procesów o podanych wyżej własnościach oznaczymy przez $\mathcal{R}$. Niech $x(t,\omega) \in \mathcal{R}$, wówczas

$$x_n(t,\omega) = \begin{cases} x(t,\omega)^* \delta_n(t) = \int_0^t x(t-x\omega)\delta_n(s)ds, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

jest procesem stochastycznym należącym do $\mathcal{P}$. Łatwo zauważyć, że

$$Lx_n(t,\omega) = Lx(t,\omega).L\delta_n = Lx(t,\omega) \quad \text{i} \quad \lim Lx_n(t,\omega) = Lx(t,\omega).$$

Wynika stąd, że ciąg $\{x_n(t,\omega)\}$ jest ciągiem podstawowym w $\mathcal{P}$ i generuje pewną dystrybucję stochastyczną $[x_n(t,\omega)]$. Element $[x_n(t,\omega)] \in \mathcal{S}$ generowany przez proces $x(t,\omega)$ oznaczymy przez $x^*(t,\omega)$.

Niech $x(t,\omega)$ będzie procesem stochastycznym o różniczkowalnych trajektoriach, takim, że $x^{(1)}(t,\omega) \in \mathcal{R}$, wówczas

$$Lx^{(1)}(t,\omega) = zLx(t,\omega) - x(0,\omega).$$

Z drugiej strony uogólniona pochodna procesu X^* spełnia relację

$$LX^{*(1)}(t,\omega) = \lim Lx_n^{(1)}(t,\omega) = zLx(t,\omega)$$

i jednocześnie

$$L(X^{(1)}(t,\omega))^* = Lx^{(1)}(t,\omega) = zLX^*(t,\omega) - x(0,\omega).$$

Stąd otrzymamy relację pokazującą różnicę między zwykłą i dystrybucyjną pochodną

$$X^{*(1)}(t,\omega) = (x^{(1)}(t,\omega))^* + x(0,\omega) \cdot \delta .$$

6. Wartość oczekiwana dystrybucji stochastycznej

Dużą rolę w analizie probabilistycznej odgrywają wartość oczekiwana i momenty zmiennej losowej (procesu stochastycznego). Nie chcąc wkraczać, ze względu na szczupłość opracowania, w teorię wielowymiarowych dystrybucji stochastycznych, ograniczymy się w tym miejscu do zdefiniowania wartości oczekiwanej dystrybucji stochastycznej.

Przypuśćmy, że istnieje wartość oczekiwana procesu stochastycznego $f(z,\omega)$, oznaczona dalej $\mathcal{E}f(z,\omega)$. Jeżeli $f \in \mathcal{A}$, $\mathcal{E}f$ jest funkcją analityczną należącą do A. Na mocy twierdzenia 6 istnieje jednoznacznie określony element Y przestrzeni $\mathfrak{Z}$ taki, że $LY(t) = \mathcal{E}f(z,\omega)$.

Jeżeli $f(z,\omega) = LX(t,\omega)$, to element Y tak określony nazwiemy wartością oczekiwaną dystrybucji stochastycznej $X(t,\omega)$. Z definicji wynika, że wartość oczekiwana jest dystrybucją. Mamy ponadto

$$L(EX(t,\omega)) = \mathcal{E}(LX(t,\omega)).$$

gdzie $EX(t,\omega)$ oznacza wartość oczekiwaną $X(t,\omega)$. Z własności wartości oczekiwanej pokażemy jedną z najważniejszych.

Twierdzenie 8. Jeżeli $X(t,\omega) \in \mathfrak{Z}$ i istnieje jej wartość oczekiwana, to prawdziwa jest relacja

$$EX^{(k)}(t,\omega) = (EX(t,\omega))^k \quad \forall\, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

D o w ó d. Korzystając z własności dystrybucji, mamy

$$L(EX^{(k)}(t,\omega)) = E(LX^{(k)}(t,\omega)) = z^k E(LX(t,\omega)) = z^k L(EX(t,\omega)).$$

Ze sposobu wprowadzenia klas równoważności wynika natychmiast teza twierdzenia.

7. Splot i równania splotowe

Definicja 7. Niech $X(t,\omega) = [x_n(t,\omega)]$, $Y(t,\omega) = [y_n(t,\omega)]$ będą elementami należącymi do $\mathfrak{Z}$. Splotem dystrybucji stochastycznych $X(t,\omega)$ i $Y(t,\omega)$, oznaczonym dalej $X * Y$, nazwiemy dystrybucję stochastyczną

$$[x_n(t,\omega) * y_n(t,\omega)] = \left[\int_0^t x_n(t-s,\omega) y_n(s,\omega)\, ds.\right]$$

Ponieważ $x_n(t,\omega)\, y_n(t,\omega)$ należy do $\mathfrak{Z}$ i $\lim L(x_n(t,\omega) * y_n(t,\omega)) = \lim (Lx_n(t,\omega).Ly_n(t,\omega)) = LX(t,\omega).LY(t,\omega)$, więc ciąg $\{(x_n\, y_n)(t,\omega)\}$ jest podstawowy i definiuje dystrybucję stochastyczną. Podstawową własnością tak określonego splotu jest relacja

$$L(X(t,\omega) * Y(t,\omega)) = LX(t,\omega).LY(t,\omega).$$

Wynika stąd natychmiast, że zbiór $\mathfrak{Z}$ jest przemienną algebrą nad polem liczb zespolonych (można wprowadzić zmienne losowe) z jedynką (dystrybucja δ) i bez dzielników zera.

Twierdzenie 9. Splot dystrybucji stochastycznych jest ciągłą operacją $\mathfrak{Z} \times \mathfrak{Z}_w \mathfrak{Z}$.

D o w ó d. Zauważmy, że $\lim L(X_n(t,\omega)*Y_n(t,\omega)) = \lim (LX_n(t,\omega) \cdot LY_n(t,\omega)) = LX(t,\omega).LY(t,\omega) = L(X(t,\omega)*Y(t,\omega))$, skąd wynika teza twierdzenia.

W nauce i zastosowaniach często występują tzw. równania splotowe. Należą do nich np. równania całkowe pewnej klasy, równania różniczkowe i inne opisujące układy dynamiczne przyczynowe, stacjonarne. Rozwiązywanie równań splotowych w wersji stochastycznej nie należy do prostych zagadnień.

Weźmy pod uwagę stochastyczne równanie splotowe

$$A(t,\omega)*X(t,\omega) = B(t,\omega) \tag{1}$$

gdzie A i B są znanymi dystrybucjami stochastycznymi.

Twierdzenie 10. Jeżeli $1/LA(t,\omega_0)$ jest dla prawie wszystkich $\omega_0 \in \omega$ elementem przestrzeni $\mathfrak{Z}$, wówczas równanie (1) posiada rozwiązanie należące do $\mathfrak{Z}$.

Przykład. Niech W będzie liniowym operatorem różniczkowym o stałych losowych współczynnikach określonych na $(\omega, \mathfrak{B}, P)$ i niech $B(t,\omega)$ będzie dystrybucją stochastyczną określoną na tej samej przestrzeni probabilistycznej.

Równanie różniczkowe o losowych współczynnikach i dystrybucyjnej prawej stronie

$$W(X) = B(t,\omega), \quad W(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(\omega)x^k, \tag{2}$$

można traktować jako równanie splotowe postaci (1), jeżeli przyjąć, że:

$$A = \sum_{k=0}^{n} a_k(\omega)\delta^{(k)}(t).$$

Jeżeli $1/\sum_{k=0}^{n} a_k(\omega)z^k$ jest prawie wszędzie funkcją analityczną, równanie (2) posiada rozwiązanie będące dystrybucją stochastyczną.

Wnioski

W pracy przedstawiono inne niż spotykane do tej pory ujęcie zagadnień związanych z teorią dystrybucji stochastycznych, por. Urbanik [5], Fernique [1]. Proponowane podejście pozwala na naturalne wprowadzenie przekształcenia Laplace'a i związanego z nim rachunku operatorowego dla uogólnionych funkcji losowych. Wydaje się, że teoria dystrybucji stochastycznych uzyskuje w ten sposób interesujące uzupełnienie.

Zagadnienia dotyczące wielowymiarowych dystrybucji stochastycznych, wyższe momenty i korelacje zostały pominięte i będą omówione w innej pracy.

LITERATURA

[1] Fernique X.: Processus linéaires, processus généralisés, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 17, 1/1967, 1-92.

[2] Mikusiński J.: Une définition de distribution, Bull. Acad. Pol. Sci., Cl. III. 3, 11 (1955), 589-591.

[3] Skrzypczyk J.: Przekształcenie Laplace'a losowych dystrybucji, VII Sympozjum: Drgania w układach fizycznych, Błażejewko k. Kórnika 28-29 maja 1976, 101-101.

[4] Swartz C.: A generalized function calculus based on the Laplace transform, St. Math. 28 (1966-67), 17-30.

[5] Urbanik K.: Generalized stochastic processes, St. Math. 17 (1958), 268-334.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА СТОХАСТИЧЕСКИХ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Р е з ю м е

В работе представлено новый подход к стохастическим обобщенным функциям основанный на преобразовании Лапласа функций медленного роста. Преобразование Лапласа обобщенных стохастических функций получается как натуральное обобщение обычного преобразования Лапласа. Представленный подход согласуется с секвенциальной теорей обобщенных функций Микусинского.

THE LAPLACE TRANSFORM OF GENERALIZED STOCHASTIC FUNCTIONS

S u m m a r y

In the paper we deal with an extension of the concept of stochastic processes utilizing a classical Laplace transform. The classical Laplace transform is extended in a very natural way to a space of generalized stochastic processes. We apply here the method of representation of generalized stochastic processes by means of sequences of ordinary stochastic processes. By the use of this method we get elementary and very simple proofs of theorems of presented theory.