ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ

Janusz SKOREK

ZASTOSOWANIE METOD STOCHASTYCZNYCH I SPEKTRALNYCH DO ROZWIĄZYWANIA GRANICZNYCH ZAGADNIEŃ ODWROTNYCH PRZEWODZENIA CIEPŁA

P. 3350/94

ENERGETYKA

Z. 119

GLIWICE
1994

Przeprowadzenie części prezentowanych w rozprawie badań było możliwe dzięki finansowemu wsparciu Komitetu Badań Naukowych w ramach Grantu 3 1137 91 01: "Modelowanie numeryczne prostych i odwrotnych zadań przepływu ciepła".

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 1240

P.3350/94

Janusz SKOREK

ZASTOSOWANIE METOD STOCHASTYCZNYCH I SPEKTRALNYCH DO ROZWIĄZYWANIA GRANICZNYCH ZAGADNIEŃ ODWROTNYCH PRZEWODZENIA CIEPŁA

GLIWICE 1994

OPINIODAWCY:

Prof. dr hab. inż. Zygmunt Kolenda
Prof. dr inż. Jan Szargut

KOLEGIUM REDAKCYJNE

REDAKTOR NACZELNY - Prof. dr hab.inż. Jan Bandrowski

REDAKTOR DZIAŁU - Dr hab. inż. Zbigniew Rudnicki
Profesor Politechniki Śląskiej

SEKRETARZ REDAKCJI - Mgr Elżbieta Leśko

REDAKCJA
Mgr Anna Błażkiewicz

REDAKCJA TECHNICZNA
Alicja Nowacka

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

PL ISSN 0372 9796

Wydawnictwo Politechniki Śląskiej
ul. Kujawska 3, 44-100 Gliwice

Nakład 150+83 Ark.wyd. 9 Ark.druk.7,875 Papier offset III x 80g
Oddano do druku 04.05.1993 r. Druk ukończono w maju 1994 r.
Cena 36.000,-

Fotokopie, druk i oprawę wykonano w SC "AMGraf", Gliwice, ul. Jasna 8

Spis treści

Podstawowe oznaczenia 11

1. Wstęp, cel pracy 15

2. Ogólna charakterystyka zagadnień odwrotnych przewodzenia ciepła 19

3. Zastosowanie rachunku wyrównawczego 24
3.1. Podstawy uzgadniania za pomocą rachunku wyrównawczego 27
3.1.1. Kryteria uzgadniania i sformułowanie problemu 27
3.1.2. Klasyczna wersja uzgadniania za pomocą rachunku wyrównawczego . 30
3.1.3. Rozszerzony algorytm uzgadniania za pomocą rachunku wyrównawczego 34
3.2. Rozwiązywanie zadań odwrotnych przewodzenia ciepła 39
3.2.1. Identyfikacja nieustalonego pola temperatury 40
3.2.2. Rozwiązywanie granicznych zagadnień odwrotnych 45
3.2.3. Identyfikacja strumienia ciepła na powierzchni komory spalania 59
3.3. Wnioski 62

4. Zastosowanie metody filtracji dynamicznej 63
4.1. Podstawy teoretyczne metody filtracji dynamicznej 65
4.1.1. Filtr liniowy 69
4.1.2. Filtr nieliniowy 70
4.2. Rozwiązywanie zadań odwrotnych przewodzenia ciepła 72
4.2.1. Identyfikacja nieustalonych pól temperatury 74
4.2.2. Identyfikacja temperatury i warunków brzegowych 80
4.3. Wnioski 85

5. Zastosowanie metody dyskretnej transformacji spektralnej 86
5.1. Podstawy metody dyskretnej transformacji spektralnej 88
5.1.1. Dyskretne zagadnienie własne 90
5.1.2. Diagonalizacja macierzy 92
5.1.3. Dyskretna transformacja spektralna 93
5.1.4. Rozwiązanie równań i retransformacja rozwiązania 95
5.2. Rozwiązanie odwrotnego zagadnienia granicznego 97
5.3. Przykłady obliczeniowe 103
5.4. Wnioski 110

6. Uwagi końcowe 111

Bibliografia 114

Dodatek A 119

Dodatek B 121

Streszczenie 123

Contents

Basic notation 11

1. Introduction, the aim of the work 15

2. General characteristics of the inverse problems of heat conduction 19

3. Applying the least squares adjustment technique 24
3.1. Fundamentals of applying the least squares adjustment technique 27
3.1.1. Criteria of adjustment and problem formulation 27
3.1.2. Classical algorithm of the least squares adjustment technique 30
3.1.3. Enhanced algorithm of the least squares adjustment technique 34
3.2. Solution of the inverse problems of heat conduction 39
3.2.1. Identification of the transient temperature fields 40
3.2.2. Solution of the inverse boundary problems 45
3.2.3. Identification of the heat flux of the surface of a combustion chamber 59
3.3. Conclusions 62

4. Applying dynamic filtering method 63
4.1 Fundamentals of dynamic filtering method 65
4.1.1. Linear filtering 69
4.1.2. Non-linear filtering 70
4.2. Solution of inverse problems of heat conduction 72
4.2.1. Identification of transient temperature fields 74
4.2.2. Identification of temperature and boundary conditions 80
4.3. Conclusions 85

5. Applying discrete spectral transformation 86
5.1. Fundamentals of the discrete spectral transformation 88
5.1.1. Discrete eigenvalue problem 90
5.1.2. Matrix diagonalization 92
5.1.3. Discrete spectral transformation 93
5.1.4. Solution of the equations and retransformation 95
5.2. Solution of the inverse boundary problem 97
5.3. Numerical examples 103
5.4. Conclusions 110

6. Final remarks 111

Bibliography 114

Appendix A 119

Appendix B 121

Summary 124

Содержание

Основные обозначения 11

1. Введение, цель работы 15

2. Общая характеристика обратных проблем теплопроводности 19

3. Применение метода найменьших квадратов 24
3.1. Основы координации методом найменьших квадратов 27
3.1.1. Критерия координации и поставление проблемы 27
3.1.2. Классический алгоритм координации методом найменьших квадратов 30
3.1.3. Развитый алгоритм координации методом найменьших квадратов 34
3.2. Решение обратной проблемы теплопроводности 39
3.2.1. Идентификация нестационарного поля температуры 40
3.2.2. Решение обратных граничных задач 45
3.2.3. Идентификация теплового потока на поверхности камеры сжигания 59
3.3. Выводы 62

4. Применение метода динамической фильтрации 63
4.1. Теоретические основы метода динамической фильтрации 65
4.1.1. Линейный фильтр 69
4.1.2. Нелинейный фильтр 70
4.2. Решение обратных задач теплопроводности 72
4.2.1. Идентификация нестационарного поля температуры 74
4.2.2. Идентификация температуры и граничных условий 80
4.3. Выводы 85

5. Применение дискретной спектральной трансформации 86
5.1. Основы дискретной спектральной трансформации 88
5.1.1. Дискретная собместная проблема 90
5.1.2. Матричная диагонализация 92
5.1.3. Дискретная спектральная трансформация 93
5.1.4. Решение уравнений и ретрансформация 95
5.2. Разрешение граничной обратной проблемы 97
5.3. Нумерические примеры 103
5.4. Выводы 110

6. Заключительные выводы 111

Литература 114

Приложение А 119

Приложение Б 121

Резюме 125

Podstawowe oznaczenia

Symbole macierzy oznaczone są wytłuszczonymi, dużymi literami. Macierze jednokolumnowe (nazywane dalej wektorami kolumnowymi lub wektorami) oznaczono wytłuszczonymi, małymi literami. Nad wielkościami wektorowymi w sensie fizykalnym lub geometrycznym umieszczono nadkreślenia.

Wielkości fizyczne wyrażone są w jednostkach systemu SI lub przedstawione są w postaci bezwymiarowej.

Zmierzony przebieg temperatury w danym punkcie ciała (wykorzystywany jako informacja wejściowa do rozwiązania zagadnienia odwrotnego) nazywany jest zgodnie z przyjętą nomenklaturą *odpowiedzią temperaturową*.

Symbole łacińskie

a - współczynnik wyrównywania temperatury,
a_{kj} - pochodna cząstkowa funkcji warunku względem wielkości mierzonej,
b_{kl} - pochodna cząstkowa funkcji warunku względem wielkości niewiadomej,
$\mathbf{A}$ - macierz główna (lub operator dyskretny, macierz przewodności) układu równań różnicowych, macierz współczynników a_{kj},
$\mathbf{b}$ - wektor kolumnowy wyrazów wolnych układu równań różnicowych,
$\mathbf{B}$ - macierz współczynników b_{kl},
Bi - liczba Biota; $(\mathrm{Bi} = \frac{h\, l_0}{\lambda})$,
$\mathbf{C}$ - macierz skupionych pojemności cieplnych,
c - pojemność cieplna właściwa (ciepło właściwe),
Diag- symbol macierzy diagonalnej,
f_k - funkcja warunku,
Fo - bezwymiarowy czas (liczba Fouriera; $\mathrm{Fo} = \frac{a\,\tau}{l_0^2}$),
$\mathbf{G}$ - macierz kowariancji estymowanych wielkości,
$\mathbf{G}_z$ - macierz kowariancji estymaty wielkości mierzonych,

$\mathbf{G}_{\bar{y}}$ - macierz kowariancji estymaty wielkości niewiadomych,
$\mathbf{G}_{y0}$ - macierz kowariancji wstępnego oszacowania wielkości niewiadomych,
h - współczynnik wnikania ciepła,
$\mathbf{H}$ - macierz wskaźnikowa,
$\mathbf{I}$ - macierz jednostkowa,
k - numer kroku czasu,
$\mathbf{K}$ - macierz wzmocnienia,
l_o - wymiar charakterystyczny,
N - liczba węzłów podziału różnicowego,
n - liczba wielkości niewiadomych w równaniu warunków,
q - gęstość strumienia ciepła,
r - liczba równań warunków,
s - liczba wielkości mierzonych,
S - odchylenie standardowe,
T - temperatura,
T_S - odpowiedź temperaturowa,
$\mathbf{T}$ - macierz kolumnowa (wektor) temperatur w węzłach podziału różnicowego,
$\mathbf{T}_0$ - wektor temperatur początkowych,
$\mathbf{V}$ - macierz kowariancji wyników pomiarów,
$\mathbf{w}_i$ - wektor własny macierzy (operatora dyskretnego),
$\mathbf{w}_k$ - niezgodność równania warunków,
$\mathbf{W}$ - macierz wektorów własnych (*macierz modalna*),
x - wielkość mierzona,
$\bar{x}$ - estymata wielkości mierzonej,
x^0 - wynik pomiaru,
y - wielkość niewiadoma,
$\bar{y}$ - estymata wielkości niewiadomej,
y^0 - wstępne oszacowanie wielkości niewiadomej.

Symbole greckie

β_i - wartość własna macierzy,
Γ - brzeg obszaru rozwiązania,
δ - zakłócenie wyniku pomiaru,
δx - poprawka wielkości mierzonej,
$\delta\bar{x}$ - poprawka estymaty wielkości mierzonej ($\delta\bar{x} = \bar{x}\text{-}x^0$),

δy - poprawka wielkości niewiadomej,
$\delta\bar{y}$ - poprawka estymaty wielkości niewiadomej ($\delta\bar{y} = \bar{y}\text{-}y^0$),
λ - współczynnik przewodzenia ciepła,
ξ - liczba losowa ($\xi \in [0,1]$),
σ - wariancja,
τ - czas,
$\Delta\tau$ - krok czasu,
Φ - macierz przejścia (macierz stanu),
Ω - obszar rozwiązania ograniczony brzegiem Γ.

Indeksy górne

$\bar{}$ - oznacza transformatę lub wielkość estymowaną,
$\dot{}$ - pochodna względem czasu,
$^{(k)}$ - pochodna rzędu k,
^{T} - oznaczenie macierzy transponowanej.

Indeksy dolne

$_i$ - dotyczy numeru punktu węzłowego (numer elementu różnicowego),
$_j$ - dotyczy numeru wielkości mierzonej ($j=1,..,s$),
$_k$ - dotyczy numeru równania warunków ($k=1,\ldots,r$) lub chwili czasu,
$_l$ - dotyczy numeru wielkości niewiadomej ($l=1,\ldots,n$),
$_s$ - dotyczy odpowiedzi temperaturowej.

Inne symbole

∇^2 - operator Laplace'a,
$E\{\ \}$ - symbol wielkości oczekiwanej.

1. Wstęp, cel pracy

Wyznaczenie pola temperatury na podstawie odpowiednio sformułowanego równania różniczkowego wraz z warunkami brzegowymi i warunkiem początkowym (dla zagadnień nieustalonych) oraz znajomości współczynników występujących w opisie zagadnienia jest jednym z podstawowych problemów przewodzenia ciepła. Tak postawione zagadnienia, tzn. wyznaczenie skutków (temperatura, strumień ciepła) na podstawie przyczyn (warunki brzegowe, warunek początkowy), nazywane są zazwyczaj *zagadnieniami prostymi* (lub *zagadnieniami bezpośrednimi*) przewodzenia ciepła (*direct problems, priamyje zadaczi*). Metody rozwiązywania zagadnień prostych są już bardzo szczegółowo sklasyfikowane i przebadane szczególnie pod kątem jednoznaczności i stabilności rezultatów.

Od pewnego czasu obserwuje się znaczny wzrost zainteresowania rozwiązywaniem problemów przewodzenia ciepła sformułowanych odmiennie aniżeli zagadnienia proste. Jeżeli nie są znane wszystkie przyczyny, a są natomiast znane (jako wyniki pomiarów) pewne bezpośrednie lub pośrednie skutki (np. przebiegi temperatury lub strumienia ciepła w pewnych punktach ciała), to tak sformułowany problem nazywany jest *zagadnieniem odwrotnym* (*inverse problem, obratnaja zadacza)*. Ogólną charakterystykę i klasyfikację zagadnień odwrotnych dla problemów przewodzenia ciepła przedstawiono w rozdziale 1.2. W tym miejscu należy tylko stwierdzić, że zagadnienia odwrotne należą do grupy problemów źle uwarunkowanych (*ill-posed problems*). Oznacza to, że zagadnienia te są bardzo czułe na nieuniknione niedokładności (zakłócenia) danych wejściowych (np. wyników pomiarów). Stąd też biorą się bardzo wysokie wymagania odnośnie do metod stosowanych do rozwiązywania zagadnień odwrotnych (nie tak dawno jeszcze uważano, że problemów tych nie da się w ogóle rozwiązać). Podobnie wysokie wymagania stawiane są przed techniką pomiarową wykorzystywaną jako źródło danych do rozwiązywania zadań odwrotnych.

Rosnące gwałtownie zainteresowanie rozwiązywaniem zagadnień odwrotnych czerpie swą inspirację z nowych, a więc atrakcyjnych źródeł poznawczych, lecz także wynika z potrzeb czysto utylitarnych. Zakres dziedzin wiedzy i techniki, w których rozwiązuje się zagadnienia odwrotne, stale się poszerza i obejmuje na przykład geofizykę, meteorologię czy astrofizykę.

Zagadnienia wymiany ciepła to także bardzo szerokie pole stawiania i rozwiązywania zadań odwrotnych. Uwaga ta dotyczy zarówno problematyki bezpośrednio związanej z przepływem ciepła (np. identyfikacja pól temperatury lub parametrów termofizycznych), jak również zagadnień sprzężonych (np. naprężenia cieplne, termodyfuzja).

Niniejsza rozprawa poświęcona jest metodom rozwiązywania zagadnień odwrotnych związanych z identyfikacją pól temperatury i strumieni ciepła w sytuacji, gdy nie są znane warunki brzegowe (wszystkie lub część). Może także nie być znany warunek początkowy. Często bowiem w praktyce nie jest możliwe dokładne określenie warunków brzegowych lub (i) warunku początkowego, a istnieje możliwość przeprowadzenia pomiarów, np. temperatury w wybranych punktach ciała i wybranych momentach czasu. Tak sformułowane zadanie odwrotne zaliczane jest do tzw. *granicznych* zagadnień odwrotnych [13],[18],[22],[65].

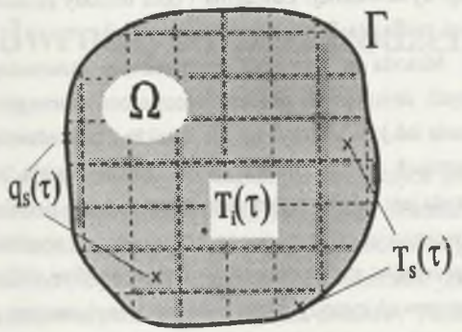
Prace nad rozwiązywaniem zagadnień odwrotnych przewodzenia ciepła są od wielu lat prowadzone w Instytucie Techniki Cieplnej Politechniki Śląskiej w Gliwicach (Kurpisz, Skorek), a wkład autora w te prace jest przedstawiony w skondensowanej formie w prezentowanej rozprawie. Inspirację do podjęcia badań stanowiły, oprócz wzmiankowanych walorów poznawczych, potrzeby utylitarne, takie jak:

- identyfikacja pola temperatury we wlewkach nagrzewanych w piecach wgłębnych [62],[25],
- identyfikacja położenia granicy fazy we wlewkach z ciekłym jądrem [25],
- identyfikacja strumienia ciepła na powierzchni badawczej komory spalania [47].

W poszukiwaniu efektywnych metod rozwiązywania tych problemów zastosowano różne podejście, a w efekcie opracowano lub rozwinięto trzy odmienne metody, których zakres zastosowania nie ogranicza się wyłącznie do granicznych zadań odwrotnych. Dwie z tych metod bazują na teorii estymacji statystycznie optymalnej (rachunek wyrównawczy, filtracja dynamiczna), a trzecia wykorzystuje dyskretną transformację spektralną (w połączeniu z metodą szeregów pochodnych). Obydwie grupy metod, choć bazują na odmiennym podejściu do rozwiązania zagadnienia, łączy sposób sformułowania problemu wyjściowego:

- rozpatruje się *graniczne zagadnienie odwrotne* dotyczące identyfikacji nieustalonego pola temperatury i warunków brzegowych w rozpatrywanym obszarze (rysunek 1.1.),
- przyjmuje się, że do opisu matematycznego pola temperatury stosuje się *metody numeryczne* (przynajmniej ze względu na dyskretyzację obszaru rozwiązania), co w rezultacie prowadzi do standardowego zapisu równań pola temperatury w węzłach podziału różnicowego w postaci następującego równania macierzowego:

$$\mathbf{C}\frac{d\mathbf{T}(\tau)}{d\tau} = \mathbf{A}\,\mathbf{T}(\tau) + \mathbf{b}(\tau) \qquad (1.1)$$



Rys. 1.1. *Schemat ogólny odwrotnego zagadnienia granicznego*

Fig. 1.1. *General scheme of the inverse boundary problem*

Przyjęcie numerycznego podejścia do sformułowania i rozwiązania zagadnienia wynika z kilku przesłanek. W odróżnieniu od metod analitycznych metody numeryczne znacznie rozszerzają zakres możliwych do rozwiązania zagadnień, np. obszary o skomplikowanych kształtach, złożone warunki brzegowe, zagadnienia nieliniowe, sprzężone itd. O wartości i coraz większym powodzeniu metod numerycznych stanowi też coraz doskonalsze oprogramowanie umożliwiające rozwiązywanie coraz to bardziej złożonych problemów. Bardzo istotną zaletą metod numerycznych powszechnie stosowanych do rozwiązywania zagadnień brzegowych przewodzenia ciepła (jak na przykład Metoda Elementów Skończonych, Metoda Bilansów Elementarnych, Metoda Różnic Skończonych czy Metoda Elementów Brzegowych) jest fakt, że dają one bardzo podobne sformułowanie problemu, np. w postaci równania macierzowego (1.1). W efekcie uzyskuje się bardzo pożądaną unifikację zapisu problemu. Ten sam algorytm rozwiązania, np. granicznego zagadnienia odwrotnego, może być na przykład wykorzystywany przez użytkowników posługujących się różnymi metodami numerycznymi.

Na bazie przedstawionych założeń, definiujących bardzo ogólnie rozpatrywany problem, zastosowano z powodzeniem trzy różne metody rozwiązania postawionego zagadnienia odwrotnego. Są to:

- **Metoda rachunku wyrównawczego** (metoda największej wiarygodności). Wkładem autora jest opracowanie metody rozwiązywania zagadnień odwrotnych z wykorzystaniem wszelkiej dostępnej *a priori* informacji o procesie. Podejście takie umożliwia znaczną poprawę stabilności i dokładności wyników rozwiązania problemów słabo uwarunkowanych. Zastosowane podejście ma od strony matematycznej cechy algorytmów regularyzowanych. Zaproponowana metoda może być stosowana do rozwiązywania zagadnień nieustalonych i ustalonych. Metoda dostarcza oceny statystycznej wyników obliczeń, co jest jej istotnym walorem. W zagadnieniach nieustalonych można rozpatrywać równocześnie całą dostępną

informację pomiarową, co zwiększa dokładność rozwiązania (lecz komplikuje algorytm obliczeń). Możliwe jest także przetwarzanie informacji z kroku na krok czasu, tzn. w trybie *on line*, przy czym procedura ta jest tu mniej dogodna aniżeli przy zastosowaniu metody filtracji dynamicznej. Założenia i opis metody rachunku wyrównawczego przedstawiono w rozdziale 3.

- **Metoda filtracji dynamicznej**. Metoda ta jest dość powszechnie stosowanym narzędziem identyfikacji zmiennych opisujących procesy nieustalone (szczególnie w automatyce, procesach sterowania itd.). Wykorzystuje się ją także z powodzeniem do rozwiązywania zadań odwrotnych przewodzenia ciepła (identyfikacja nieustalonych pól temperatury). Metoda jest bardzo efektywna numerycznie i podobnie jak metoda rachunku wyrównawczego dostarcza oceny statystycznej wyników. Świetnie nadaje się do analizy procesów nieustalonych w trybie *on line*. Wkład autora do poszerzenia zakreu zastosowań metody filtracji dynamicznej zawiera się w adaptacji metody do rozwiązywania zagadnienień nieliniowych, tzn. problemów jednoczesnej identyfikacji pola temperatury i warunków brzegowych. Autor zastosował również metodę filtracji do rozwiązania granicznych zagadnień odwrotnych. Założenia i opis metody filtracji dynamicznej przedstawiono w rozdziale 4.
- **Metoda dyskretnej transformacji spektralnej DTS**. Autor po raz pierwszy wykorzystał metodę dyskretnej transformacji spektralnej, wraz z koncepcją metody szeregów pochodnych, do sformułowania modelu odwrotnego zagadnienia granicznego. Dzięki takiemu właśnie podejściu udało się autorowi znacznie uprościć opis matematyczny problemu w stosunku do innych rozwiązań bazujących na koncepcji szeregów pochodnych. Uzyskano uniwersalną postać algorytmu rozwiązania zarówno zagadnień jednowymiarowych, jak i wielowymiarowych. Metoda zapewnia dużą stabilność rezultatów bez jednak bezpośredniej możliwości ich oceny statystycznej. Założenia i opis metody DTS przedstawiono w rozdziale 5.

Żadna z zastosowanych metod nie jest uniwersalnym narzędziem rozwiązywania wszelkich zagadnień definiowanych jako graniczne zagadnienie odwrotne. Każda natomiast z tych metod ma takie obszary zastosowań, gdzie jest z pewnych względów bardziej efektywna niż pozostałe. Przy omawianiu poszczególnych metod przeprowadzono analizę ich efektywności oraz wskazano zasadnicze zalety i wady.

Przy opracowaniu modeli matematycznych analizowanych w pracy zagadnień stosowano metodę bilansów elementarnych *(Control Volume Method)* [55],[57] oraz sporadycznie metodę elementów skończonych. Wybór konkretnej metody nie ma tu właściwie żadnego znaczenia, o ile tylko prowadzi do sformułowania analizowanego zagadnienia w postaci (1.1).

2. Ogólna charakterystyka zagadnień odwrotnych przewodzenia ciepła

Zakres problematyki zagadnień odwrotnych jest tak szeroki, że dokonanie jakiejkolwiek ich szczegółowej klasyfikacji jest z góry skazane na niepowodzenie. Trudności te dotyczą zresztą samej już definicji zagadnienia odwrotnego. Jedną z najprostszych definicji podaje Kozdoba [18] określając zagadnienie odwrotne jako takie, w którym poszukuje się pewnych przyczyn na podstawie niektórych skutków. Tichonow [64] definiuje zagadnienia odwrotne jako problemy, w których identyfikowane (poszukiwane) wielkości nie są pomiarowo bezpośrednio dostępne, a są wyznaczane pośrednio na podstawie pomiarów innych wielkości zależnych od wielkości poszukiwanych. Definicje te określają zasadniczy sens problemów odwrotnych, chociaż w wielu przypadkach granica pomiędzy sformułowaniem zadania bezpośredniego i odwrotnego może być niezbyt wyraźna.

Klasyfikacja zagadnień odwrotnych przewodzenia ciepła jest oczywiście dość umowna. Jeden z możliwych schematów przedstawiono w [22] i [57]:

- identyfikacja pól temperatury i warunków brzegowych (zagadnienie graniczne),
- identyfikacja parametrów termofizycznych ciała (zagadnienie współczynnikowe),
- identyfikacja wydajności i rozkładu wewnętrznych źródeł ciepła,
- identyfikacja warunków początkowych (zagadnienie retrospektywne).

Przedstawiona lista nie wyczerpuje oczywiście całości problematyki rozwiązywanych zagadnień, tym bardziej że wiele z nich trudno wprost zakwalifikować do którejkolwiek z grup (np. dynamicznie rozwijane metody identyfikacji pól temperatury ze zmianą fazy [15],[68],[71],[72]).

Problemy będące przedmiotem prezentowanej pracy należy zakwalifikować do grupy zadań granicznych oraz w pewnych przypadkach do grupy zadań retrospektywnych.

Podstawową cechą charakteryzującą matematyczne sformułowanie zagadnienia odwrotnego jest *słabe uwarunkowanie* problemu. Oznacza to, że rozpatrywany problem jest bardzo czuły na wszelkie zakłócenia danych wejściowych. Nawet nieznaczne zmiany danych wejściowych mogą spowodować bardzo znaczne zmiany wyników. Z taką sytuacją mamy praktycznie zawsze do czynienia w przypadku rozwiązywania zagadnień odwrotnych. Podstawowym źródłem niedokładności danych wejściowych są tutaj błędy pomiarowe towarzyszące zawsze wynikom eksperymentu. Następnym źródłem niedokładności jest nieunikniona rozbieżność

pomiędzy modelem matematycznym analizowanego procesu a rzeczywistym przebiegiem procesu. Niedokładności danych wejściowych i opisu analizowanego procesu tworzą swoisty *szum* informacyjny. W przypadku zadań słabo uwarunkowanych szum ten przenosi się we wzmocnionej postaci na rozwiązanie problemu (w przeciwieństwie do zagadnień bezpośrednich, gdzie niedokładności danych wejściowych są zazwyczaj przez rozwiązanie tłumione).

Złe uwarunkowanie zadań odwrotnych stawia bardzo wysokie wymagania przed metodami używanymi do ich rozwiązywania. Uwaga ta dotyczy przy tym zarówno strony matematycznej, jak i stosowanej techniki pomiarowej. O ile przed techniką pomiarową stawiane jest zadanie minimalizacji błędów pomiarowych, *to podstawowym zadaniem metod matematycznych jest uzyskanie rozwiązania stabilnego numerycznie, a więc w konsekwencji złagodzenie skutków słabego uwarunkowania.* Poprawa stabilności rezultatów jest więc zasadniczym wymaganiem stawianym przed metodami rozwiązywania zagadnień odwrotnych, gdyż do modelowania samych procesów cieplnych stosuje się zazwyczaj te same techniki co przy rozwiązywaniu zagadnień prostych.

Rozwiązując zadania odwrotne należy zawsze mieć na uwadze fakt, że zasadniczą informacją wejściową jest tu obarczona szumem (zakłóceniami) informacja pomiarowa. W przypadku gdy stosunek zasadniczego sygnału do błędu jest bardzo niekorzystny, to nawet zastosowanie najlepszych nawet metod rozwiązania nie da wiarygodnych rezultatów.

Wyniki pomiarów wykorzystywane do rozwiązania danego zadania odwrotnego przedstawiają na ogół różną wartość użyteczną. Miarą tej wartości nie jest wyłącznie wielkość błędu pomiaru zależna od stosowanej techniki pomiarowej. Wartość ta zależy także od np. położenia punktu pomiarowego, rodzaju mierzonej wielkości czy typu zjawiska. Szczególne wymagania są tu narzucone przez zjawiska nieustalone, gdzie wyraźnie rysuje się problem wyboru optymalnego położenia punktu pomiarowego (z uwagi na tłumienie sygnału wejściowego) czy problem doboru optymalnego kroku próbkowania.

Jeżeli będziemy abstrahować od wielkości błędu pomiarowego, to za miarę wartości danej informacji pomiarowej można uznać współczynnik zdefiniowany jako pochodna wielkości identyfikowanej y_i względem wielkości mierzonej x_j.[1]

$$z_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \tag{2.1}$$

[1] Odwrotność współczynnika z_{ij} jest tzw. *współczynnikiem wrażliwości* [3] wykorzystywanym w technice rozwiązywania zadań odwrotnych nazywanej metodą *współczynników wrażliwości*.

Im większa jest wartość współczynnika z_{ij}, tym silniejsza jest zależność pomiędzy wielkością identyfikowaną i mierzoną, i tym samym większa jest wartość numeryczna danego pomiaru. W przypadku np. identyfikacji nieustalonego strumienia ciepła na wewnętrznej ścianie pieca grzewczego największą wartość będą miały wyniki pomiarów temperatury w punktach ściany usytuowanych jak najbliżej jej powierzchni. W miarę oddalania się od powierzchni ściany wpływ oddziaływania strumienia ciepła wnikającego do ściany na pole temperatury jest coraz to mniejszy. Na wielkość współczynnika z_{ij} wpływa więc wyraźnie położenie punktu pomiarowego, a ponadto moment czasu, w którym dokonuje się pomiaru.

Przedstawiona analiza ma oczywiście wyłącznie charakter jakościowy. Pamiętając jednak o wszystkich ostrych wymaganiach stawianych metodom rozwiązywania zagadnień odwrotnych należy zawsze dążyć do takiej organizacji pomiarów, aby uzyskiwane rezultaty miały jak największą wartość z punktu widzenia zastosowanej metody rozwiązywania problemu.

Wzrost zainteresowania odwrotnymi zagadnieniami przewodzenia ciepła owocuje gwałtownie zwiększającą się liczbą prac badawczych. Pojawia się coraz więcej monografii poświęconych tej tematyce jak np. [1],[2],[3],[14],[18],[27],[65],[66],[67], a także wiele publikacji o charakterze przeglądowym [12],[22],[64]. Zakres rozważanej tematyki i spektrum stosowanych metod rozwiązywania problemów jest na tyle szerokie, że jest trudno przedstawić wyczerpująco i precyzyjnie ich klasyfikację (tym bardziej że w przeciwieństwie do zagadnień prostych w znacznie większym stopniu stosuje się tu metody analityczne).

Za pracami [1],[13],[22] można podać następujące metody (i grupy metod) stosowane do rozwiązywania granicznych zagadnień odwrotnych przewodzenia ciepła (te zadania są bowiem zasadniczym celem rozważań prezentowanej pracy):

- *metoda regularyzacji* rozwinięta przez Tichonowa i Alifanowa [2],[4],[65],[66],
- *metoda współczynników wrażliwości* rozwinięta przez Becka [3],
- metoda przewidywania rozwiązania w postaci szeregów wywodząca się od Burgraffa [7],[21],
- metody stochastyczne (np. metoda filtracji dynamicznej [27] czy rachunku wyrównawczego [61]),
- metody oparte na teorii potencjałów [13] (stosowane najczęściej do zagadnień ustalonych),
- inne, polegające np. na modyfikacji rozwiązania uzyskanego dla zagadnienia prostego.

Bardzo często stosowane jest podejście polegające na łączeniu ze sobą różnych metod rozwiązywania w celu poprawy stabilności rezultatów. Podejście takie reprezentują również metody prezentowane w niniejszej pracy, przy czym ograniczono się do analizy zagadnień sformułowanych w sposób dyskretny pod względem obszaru rozwiązania.

Specyfika i dodatkowe trudności związane nieodłącznie z zagadnieniami odwrotnymi narzucają też odpowiednie wymagania odnośnie do metod rozwiązywania tych problemów. Beck [3] sformułował listę kryteriów, którym powinna odpowiadać efektywna metoda rozwiązywania zagadnień odwrotnych:

- identyfikowane temperatury i strumienie ciepła powinny być dokładne, jeżeli dane pomiarowe są dokładne,
- metoda powinna mieć bazę statystyczną,
- metoda powinna dopuszczać wykorzystanie pomiarów z dowolnej liczby punktów pomiarowych,
- metoda powinna być mało czuła na błędy pomiarowe,
- metoda powinna być stabilna dla małych czasów,
- nie powinna być wymagana informacja o dokładnym czasie rozpoczęcia procesu,
- metoda nie powinna być ograniczona do ustalonej liczby obserwacji,
- analizie mogą być poddawane ciała o złożonej strukturze,
- współczynniki mogą być zmienne z temperaturą,
- metoda powinna być łatwa do weryfikacji obliczeniowej,
- koszt obliczeń powinien być umiarkowany,
- metoda powinna dopuszczać skokowo zmienną w czasie zmianę temperatury.

Opracowanie metody, która bezwarunkowo spełnia wszystkie przedstawione kryteria, jest jeszcze sprawą otwartą. Należy jednak pamiętać, że dla każdego indywidualnego zagadnienia pewne z przedstawionych kryteriów mogą mieć jedynie drugorzędne znaczenie (np. jeśli warunki narzucają położenie punktów pomiarowych, to metoda nie musi dopuszczać wykorzystania informacji pochodzącej z dowolnej liczby punktów pomiarowych). Ponadto część z przedstawionych kryteriów ma charakter raczej jakościowy aniżeli ilościowy.

Metody prezentowane w pracy w znacznym stopniu odpowiadają większości przedstawionych kryteriów. Na uwagę zasługuje fakt, że zastosowanie w dwóch z trzech prezentowanych metod podejścia stochastycznego prowadzi do uzyskania wprost oceny statystycznej rezultatów. Istnienie takiej oceny ma w przypadku zagadnień odwrotnych znaczenie szczególne. Należy bowiem pamiętać, że przy rozpatrywaniu zadań odwrotnych wielkości identyfikowane są w zasadzie niedostępne pomiarowo, a więc ocena statystyczna staje się bardzo istotną miarą pewności uzyskanych wyników.

Z zastosowaniem konkretnej metody rozwiązania wiąże się problem weryfikacji dokładności metody, co w przypadku zagadnień odwrotnych ma szczególnie istotne znaczenie. Jak już bowiem wspomniano, zadania odwrotne niosą ze sobą dwa zasadnicze rodzaje niedokładności informacji wejściowej: nieścisłości modelu zjawiska i błędy pomiarowe. O ile błędy pomiarów da się oszacować stosunkowo dokładnie, to ocena niedokładności modelu matematycznego jest w zasadzie niemożliwa do przeprowadzenia

(szczególnie w ujęciu ilościowym). Z tego też względu weryfikację metod rozwiązywania zadań odwrotnych przeprowadza się zasadniczo wyłącznie na podstawie eksperymentu obliczeniowego (symulacyjnego). Pozwala to na wyeliminowanie z rozważań trudnych do wyznaczenia niedokładności modelu. Podejście takie pozwala więc w miarę precyzyjnie oszacować czułość metody ze względu na błędy pomiarowe.

W pracy zastosowano jednolity system weryfikacji obliczeniowej analizowanych metod. Wyniki pomiarów symulowano opierając się na wynikach rozwiązania zagadnienia prostego odpowiadającego zagadnieniu odwrotnemu. Do wyników tych dodawany jest składnik symulujący błąd pomiaru:

$$x_i^0 = x_i + 2(0.5 - \xi)\delta \tag{2.2}$$

gdzie:

x_i^0 - symulowany wynik pomiaru (odpowiedź temperaturowa),
x_i - wartość dokładna (w sensie modelu matematycznego),
δ - maksymalne zakłócenie pomiaru,
ξ - liczba losowa z zakresu [0,1].

Podczas analizy danego problemu stosowano zawsze tę samą sekwencję liczb losowych, co stwarzało możliwość porównywania różnych wariantów obliczeniowych. Z tego samego powodu normowano (o ile było to tylko możliwe) zakres zmienności temperatury w procesie w przedziale [0,1]. W takim przypadku przyjmowano do analizy trzy wartości zakłócenia δ: 0.005, 0.01 i 0.05. Wprowadzenie takich założeń (spotykane w literaturze) pozwala w miarę obiektywnie porównywać ze sobą wyniki uzyskiwane za pomocą różnych metod.

W celu ułatwienia porównania wyników obliczeń zastosowano pewną standaryzację przykładów obliczeniowych z wykorzystaniem wielkości bezwymiarowych. Warunki brzegowe trzeciego rodzaju zostały scharakteryzowane liczbą Biota Bi. Czas jest opisany za pomocą bezwymiarowej liczby Fouriera Fo. Temperaturę wyrażano (tam gdzie było to tylko możliwe) w postaci bezwymiarowej, przy czym w takich przypadkach zakres zmienności temperatury wynosił $T \in [0:1]$.

3. Zastosowanie rachunku wyrównawczego

Modele matematyczne procesów fizycznych zawierają w sobie zazwyczaj pewne dane wejściowe pochodzące bezpośrednio lub pośrednio z pomiarów. W sytuacji gdy znany jest model matematyczny zjawiska i znane są także wyniki pomiarów pewnych wielkości wchodzących w skład opisu matematycznego, może wystąpić *nadmiar informacji* o zjawisku. Nadmiar informacji objawić się może tym, że liczba niewiadomych stanie się mniejsza aniżeli liczba niezależnych równań modelu.

Nadmiar informacji o procesie można wykorzystać do wyznaczenia bardziej wiarygodnych wartości zarówno wielkości niewiadomych, jak i mierzonych, a także pewnych parametrów występujących w modelu procesu. Zarówno bowiem model matematyczny, jak i wielkości pomiarowe nie są absolutnie dokładne. Niedokładności modelu matematycznego są najczęściej wynikiem braku możliwości uwzględnienia wszystkich czynników mających wpływ na przebieg zjawiska. Często też w celu uniknięcia nadmiernych trudności matematycznych wprowadza się uproszczenia modelu. Często też niedokładność modelu wynika po prostu z niedostatecznej wiedzy o rzeczywistym przebiegu procesu i o czynnikach wpływających na ten przebieg. Niedokładności pomiarów są związane najczęściej z klasą użytych przyrządów pomiarowych. Wynik pomiaru może być także zakłócony przez obecność samego przyrządu pomiarowego lub przez inne zjawiska towarzyszące analizowanemu procesowi.

Wystąpienie nadmiaru informacji daje szansę zwiększenia dokładności poszukiwanych wielkości (a także innych parametrów) w stosunku do sytuacji, gdy dostępna informacja o procesie (tzw. minimalny zasób informacji) pozwala wyznaczyć te wielkości w sposób jednoznaczny.

Zagadnienie wyznaczania najbardziej wiarygodnych ocen poszukiwanych wielkości w sensie przyjętego z góry kryterium jakości nosi nazwę *uzgadniania*. Do najbardziej znanych i najbardziej efektywnych metod uzgadniania należy *rachunek wyrównawczy* zaliczany do grupy metod stochastycznych bazujących na *estymacji statystycznie optymalnej* (estymacja Bayesa). Nazwa rachunek wyrównawczy oddaje w sposób najbardziej wyraźny istotę samej metody, która od strony matematycznej nazywana jest najczęściej metodą *największej wiarygodności* [9]. U podstaw metody leży powszechnie znana zasada najmniejszych kwadratów.

Obliczenia prowadzone za pomocą rachunku wyrównawczego dotyczą, najogólniej rzecz ujmując, dwóch rodzajów wielkości: niewiadomych (nie podlegających pomiarom) oraz mierzonych. Wielkości te są ze sobą powiązane równaniami modelu matematycznego tzw. *równaniami warunków*. W odróżnieniu jednak od klasycznych zagadnień algebry wielkości podlegające uzgadnianiu są traktowane jak zmienne losowe, o pewnym przyjętym rozkładzie prawdopodobieństwa (zazwyczaj przyjmuje się, że jest to *rozkład normalny*). W zależności od postaci równań warunków można wyróżnić liniowe lub nieliniowe problemy wyrównawcze.

Obliczenia prowadzone za pomocą rachunku wyrównawczego mogą służyć do realizacji następujących celów:

- jednoznaczne wyznaczenie najbardziej prawdopodobnych ocen wielkości niewiadomych,
- poprawa dokładności wielkości mierzonych,
- kontrola dotrzymania założonej dokładności pomiarów,
- ocena dokładności skorygowanych wyników pomiaru i niewiadomych,
- kontrola dopuszczalności przyjętych założeń upraszczających model matematyczny procesu.

W przypadku rozwiązywania zadań odwrotnych znaczenie ma w zasadzie jedynie pierwszy z wymienionych celów. Ograniczenia narzucone na warunki pomiarowe (najczęściej nie ma możliwości powtórzenia identycznych warunków realizacji procesu) bardzo ograniczają tu ewentualną weryfikację dokładności wyników pomiarów czy weryfikację modelu matematycznego.

Zakres zastosowań rachunku wyrównawczego jest bardzo szeroki i obejmuje np. geodezję (gdzie znalazł pierwsze swe zastosowania), kartografię, astronomię, nawigację itd.

Od wielu lat jest też rachunek wyrównawczy stosowany w szeroko rozumianej technice cieplnej. W tej dziedzinie znaczny wkład w rozwój teorii metody i rozszerzenie jej możliwości aplikacyjnych wniósł Szargut i jego współpracownicy: Kolenda i Styrylska [58],[59],[54],[56]. Rozwiązywane problemy dotyczyły między innymi problemów uzgadniania bilansów energii i substancji [59],[61], uzgadniania wieloetapowego i wielogrupowego [54], wyznaczania współczynników równań empirycznych [60] czy analizy regresji [58].

Tak jak większość metod, u podstaw których leży zasada estymacji średniokwadratowej, rachunek wyrównawczy może być także stosowany jako narzędzie łagodzenia skutków złego uwarunkowania, przy czym efektywność metody zależy tu silnie od rodzaju rozważanego problemu oraz od sformułowania algorytmu samej metody. Cecha łagodzenia skutków złego uwarunkowania umożliwia zastosowanie rachunku wyrównawczego do rozwiązywania

zagadnień odwrotnych, a w tym zagadnień odwrotnych przewodzenia ciepła. Zakres zastosowań rachunku wyrównawczego jest w tej dziedzinie coraz szerszy i obejmuje zadania sformułowane zarówno analitycznie, jak i numerycznie.

W pracy [36] zastosowano rachunek wyrównawczy do identyfikacji pola temperatury w elektrodzie elektrolizera aluminium przy istnieniu nadmiaru informacji pomiarowej. W pracach [21] i [23] przedstawiono możliwość zastosowania rachunku wyrównawczego do poprawy wyników rozwiązania odwrotnego zadania granicznego opartego na koncepcji szeregów pochodnych. W pracach [35] i [37] zastosowano metodę estymacji średniokwadratowej do rozwiązania zadań granicznych wykorzystując do sformułowania problemu metodę elementu brzegowego. Estymację średniokwadratową wykorzystuje się także do rozwiązywania nadokreślonych układów równań jak np. przy rozwiązywaniu pewnych odwrotnych zadań współczynnikowych [33]. W cytowanych pracach wykorzystuje się te algorytmy estymacji, które bazują na najprostszych kryteriach uzgadniania: prostej minimalizacji średniokwadratowej bądź minimalizacji ważonej po wariancjach wyników pomiarów [5], [58]. Jak wykazują jednak badania, te wersje algorytmów nie zawsze dają zadowalające rezultaty [61]. Polepszenie stabilności rozwiązania można uzyskać, jeżeli zastosuje się jako kryterium uzgadniania ważoną minimalizację średniokwadratową rozszerzoną także na wielkości niewiadome. Od strony matematycznej nadaje to metodzie cechy algorytmów regularyzowanych, co przyczynia się do poprawy stabilności rozwiązania. Podejście takie (oprócz modyfikacji algorytmu uzgadniania) wymaga określenia dodatkowych informacji statystycznych o wielkościach niewiadomych. W większości problemów fizycznych można do tego celu wykorzystać całą dostępną *a priori* informację o procesie i opisujących go wielkościach. Założenia matematyczne tej wersji estymacji optymalnej opisane są np. w monografiach [9] i [32]. Rozszerzoną wersję metody zastosowano do rozwiązywania odwrotnych zadań współczynnikowych przewodzenia ciepła [33] czy odwrotnych zadań z dziedziny geofizyki [32]. Autor zastosował z powodzeniem to podejście do rozwiązywania granicznych zadań odwrotnych przewodzenia ciepła [39], [44], [46], [47], [52], [61] dotyczących identyfikacji pól temperatury i warunków brzegowych.

W dalszej części zostaną przedstawione podstawowe założenia algorytmów rachunku wyrównawczego oraz wyniki zastosowania tej metody do rozwiązywania odwrotnych zagadnień granicznych. Przy omawianiu założeń rachunku wyrównawczego ograniczono się do przypadku uzgadniania jednoetapowego. Ten bowiem typ uzgadniania, tzn. na podstawie jedego zbioru wyników pomiarów i przy niezmiennym układzie równań warunków, ma najczęściej miejsce dla rozpatrywanych zagadnień.

3.1. Podstawy uzgadniania za pomocą rachunku wyrównawczego

3.1.1. Kryteria uzgadniania i sformułowanie problemu

Problem uzgadniania z zastosowaniem rachunku wyrównawczego wymaga sformułowania modelu matematycznego analizowanego procesu. W przypadku modeli dyskretnych opis modelu sprowadza się najczęściej do układu równań nieliniowych w następującej ogólnej postaci:

$$f_k(x_1, x_2, \ldots x_s, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0 \tag{3.1}$$

gdzie $k=1,2,\ldots,r$.

Równanie (3.1) może w ogólnym przypadku zawierać s wielkości mierzonych x_i oraz n wielkości niewiadomych (poszukiwanych) y_j. Dokładne wartości zarówno wielkości niewiadomych, jak i wielkości mierzonych są niedostępne. Znane są natomiast wyniki pomiarów x_j^0, które są jednak zawsze obarczone błędami wynikającymi z niedoskonałości eksperymentu pomiarowego. Skończona dokładność pomiarów uniemożliwia więc dokładne wyznaczenie wielkości mierzonych x. Jest natomiast możliwe wyznaczenie *estymaty* (oceny) $\bar{x}$, która przybliża wartości x najlepiej w sensie pewnego przyjętego z góry kryterium. Jeśli przyjmiemy, że kryterium tym jest minimalizacja następującej formy kwadratowej:

$$(\bar{x} - x^0)^T (\bar{x} - x^0) \Rightarrow \min \tag{3.2}$$

to uzyskana estymata $\bar{x}$ jest optymalna w sensie najmniejszych kwadratów. Kryterium (3.2) służy do wyznaczenia estymaty $\bar{x}$ w najprostszym przypadku, gdy kolejne wyniki pomiarów dotyczą tej samej wielkości, pomiary mają tę samą dokładność i na wielkości mierzone nie są narzucone żadne więzy w postaci równań warunków.

Bardziej ogólna jest sytuacja, gdzie poszukujemy pewnych wielkości z_i $(j=1,2,\ldots,n)$ będących funkcjami wielkości mierzonych x:

$$z_i = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_s) \tag{3.3}$$

Ponieważ dokładne wartości z_j nie są dostępne, więc istnieje różnica pomiędzy dokładną (nieznaną) wartością z_j a wartością funkcji predykcji:

$$\left.\begin{aligned} z_1 - F_1(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_s^0) &= \delta z_1 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ z_n - F_n(x_1^0, x_2, \ldots, x_s^0) &= \delta z_n \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

Jeżeli spełniona jest równość $n=s$ (tzw. przypadek *deterministyczny*), to optymalne estymaty $\tilde{z}$ sprowadzają do zera każdą z reszt δz_j. Jeżeli wystąpi nadmiar informacji pomiarowej, tzn. $s>n$, to optymalną estymatę wyznacza się [6],[9] z warunku minimalizacji formy kwadratowej:

$$[z - F(x^0)]^T V^{-1} [z - F(x^0)] \Rightarrow \min \tag{3.5}$$

gdzie V jest macierzą kowariancji wielkości mierzonych.

Wyznaczanie optymalnej oceny z warunku minimalizacji formy kwadratowej (3.5) wywodzi się jeszcze od Gaussa. Inna, bardziej ogólna, choć dająca identyczne rezultaty metoda wyznaczania ocen optymalnych polega na poszukiwaniu ekstremum tzw. *funkcji wiarygodności* [9].

W zagadnieniach przepływu ciepła najczęściej występuje sytuacja, kiedy wielkości opisujące proces (temperatura, strumień ciepła) są bezpośrednio dostępne pomiarowo (w równaniu predykcji mamy więc $z_j = x_j$), natomiast równanie więzów przybiera postać (3.1) i zawiera oprócz wielkości mierzonych także wielkości niewiadome. Zazwyczaj zasadniczym celem uzgadniania jest w takim wypadku wyznaczenie ocen wielkości niewiadomych. Jeżeli występuje nadmiar informacji, to optymalne oceny wielkości mierzonych $\tilde{x}_j$ oraz niewiadomych $\tilde{y}_l$ wyznacza się z warunku minimalizacji formy kwadratowej (3.5) przy spełnieniu równań więzów w postaci:

$$f_k(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots \tilde{x}_s, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots \tilde{y}_n) = 0 \tag{3.6}$$

Zagadnienie opisane zależnościami (3.5) oraz (3.6) definiuje klasyczne podejście do problemu uzgadniania za pomocą rachunku wyrównawczego (patrz rozdział 3.1.2).

Założenia uogólnionego algorytmu rachunku wyrównawczego zastosowanego w pracy do rozwiązywania granicznych zagadnień odwrotnych przedstawiono w rozdziale 3.1.3.

Z zastosowaniem rachunku wyrównawczego wiąże się nierozerwalnie problem sformułowania równań więzów nałożonych na wielkości opisujące podlegające procesowi uzgadniania (niewiadome i mierzone). W omawianych zagadnieniach równania więzów są po prostu równaniami modelu matematycznego opisującego pole temperatury w analizowanym ciele (np. w postaci (3.1)). W ogólnym przypadku równania te mogą być nieliniowe. Rozwiązanie nieliniowego problemu wyrównawczego polega najczęściej na linearyzacji równań więzów i rozwiązaniu problemu liniowego z zastosowaniem procedury iteracyjnej. Należy jednak pamiętać, że proces linearyzacji wnosi do obliczeń uzgadniających pewne błędy.

Równanie więzów (3.1) nie jest spełnione, jeżeli w miejsce wielkości mierzonych x oraz niewiadomych y podstawimy wyniki pomiarów x^0 oraz pewne oszacowanie wielkości niewiadomych y^0:

$$f_k(x^0, y^0) = w_k \tag{3.7}$$

Uzgadnianie polega na znalezieniu takich poprawek $\delta\tilde{x}$ oraz $\delta\tilde{y}$, które minimalizują formę kwadratową (3.5) i spełniają następujące równanie:

$$f_k(x^0 + \delta\tilde{x}, y^0 + \delta\tilde{y}) = 0 \tag{3.8}$$

Jeśli funkcje f_k są różniczkowalne, to można je zlinearyzować poprzez rozwinięcie w szereg Taylora w otoczeniu znanych wartości x^0 i y^0 pomijając przy tym wyrazy zawierające pochodne rzędu wyższego niż jeden:

$$f_k(x^0 + \delta\tilde{x}, y^0 + \delta\tilde{y}) = f_k(x^0, y^0) + \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\right]^0 \delta\tilde{x}_j + \sum_{l=1}^{n} \left[\frac{\partial f_k}{\partial y_l}\right]^0 \delta\tilde{y}_l \tag{3.9}$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$a_{kj} = \left[\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\right]^0 \delta\tilde{x}_j \; ; \qquad b_{kl} = \left[\frac{\partial f_k}{\partial y_l}\right]^0 \delta\tilde{y}_l \tag{3.10}$$

oraz wykorzystując (3.7) i (3.8) otrzymuje się liniowe sformułowanie zagadnienia uzgadniania w postaci:

$$\mathbf{A}\,\delta\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\,\delta\bar{\mathbf{y}} = -\mathbf{w} \tag{3.11}$$

Liniowe równanie macierzowe (3.11) jest podstawowym równaniem więzów występującym w większości problemów rozwiązywanych za pomocą rachunku wyrównawczego. Oznacza to równocześnie, że model matematyczny analizowanego procesu musi być również sprowadzony do postaci (3.11), aby można było zastosować obliczenia uzgadniające. Narzucony formalizm postaci równań więzów ma z jednej strony cechy pozytywne ze względu na unifikację zapisu matematycznego, lecz może także w pewnych przypadkach prowadzić do bardzo złożonych algorytmów obliczeniowych.

Stochastyczne podejście do wielkości opisujących dany proces wiąże się z problemem określenia wariancji wyników pomiarów w celu zbudowania macierzy kowariancji **V** występującej w minimalizowanej formie kwadratowej (3.5). Zasady statystyki wymagają w tym przypadku powtórzenia pomiarów tej samej wielkości z zachowaniem identycznych warunków pomiarowych. W przypadku analizowanych nieustalonych problemów przewodzenia ciepła spełnienie takich warunków jest praktycznie niemożliwe. W tej sytuacji przyjęto powszechnie szacować wariancję pojedynczego pomiaru na podstawie dokładności przyrządów i metod pomiarowych. Ponadto przyjmuje się, że estymowane wielkości są wielkościami losowymi o rozkładzie normalnym. Założenie takie jest wymagane przez teorię metody, choć należy przyznać, że nie zawsze można mieć pewność co do jego słuszności.

W następnych rozdziałach przedstawiono dwa podstawowe algorytmy uzgadniania z zastosowaniem rachunku wyrównawczego: wersję klasyczną i rozszerzoną. Dla uproszczenia zapisu w obydwu przypadkach analizie poddano przypadek z równaniami więzów w postaci liniowej (3.11). Dla nieliniowych równań więzów należy bowiem i tak przeprowadzić procedurę linearyzacyjną (3.9) w celu utworzenia modelu liniowego.

3.1.2. Klasyczna wersja uzgadniania za pomocą rachunku wyrównawczego

Zastosowanie metod numerycznych do modelowania zagadnień granicznych przewodzenia ciepła prowadzi najczęściej do powstania modelu liniowego, w którym oprócz identyfikowanych wielkości (temperatura w punktach węzłowych podziału dyskretnego, warunki brzegowe, strumienie ciepła) i innych parametrów, występują również wielkości mierzone (odpowiedź temperaturowa). W takim przypadku układ równań modelu (układ równań więzów) może być zapisany w następującej standardowej postaci:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{c} = \mathbf{0} \tag{3.12}$$

gdzie:

A - macierz współczynników (o rozmiarach $r \cdot s$),

B - macierz współczynników (o rozmiarach $r \cdot n$),

x - wektor wielkości mierzonych (o długości s),

y - wektor wielkości niewiadomych (o długości n),

c - wektor stałych współczynników (o długości r).

Postawione zadanie polega na wyznaczeniu za pomocą rachunku wyrównawczego najbardziej wiarygodnych ocen (w sensie aproksymacji średniokwadratowej) wielkości mierzonych **x** i niewiadomych **y** powiązanych równaniami więzów (3.12). Proces uzgadniania jest możliwy, jeżeli spełnione są następujące dodatkowe warunki dotyczące relacji pomiędzy liczbą równań r, liczbą wielkości mierzonych s oraz liczbą wielkości niewiadomych n:

$$n < r < n+s \qquad oraz \qquad r < s \tag{3.13}$$

Jeżeli do równania (3.12) podstawi się wyniki pomiarów $\mathbf{x}^0$ oraz wstępnie oszacowane wielkości niewiadome $\mathbf{y}^0$, to otrzymamy:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^0 + \mathbf{B}\mathbf{y}^0 + \mathbf{c} = \mathbf{w} \tag{3.14}$$

gdzie **w** jest wektorem niezgodności równań warunków.

Optymalne poprawki (estymaty) wielkości mierzonych $\delta\bar{\mathbf{x}}$ i wielkości niewiadomych $\delta\bar{\mathbf{y}}$ minimalizują formę kwadratową:

$$\delta\mathbf{x}^T \mathbf{V}^{-1}\,\delta\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{s} \delta x_{ii}^2\, V_{ii}^{-1} \;\Rightarrow\; \min \tag{3.15}$$

oraz spełniają równania warunków, tzn.:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}^0 + \delta\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{B}(\mathbf{y}^0 + \delta\bar{\mathbf{y}}) + \mathbf{c} = \mathbf{0} \tag{3.16}$$

W wyniku rozwiązania problemu optymalizacyjnego (3.15) i (3.16) otrzymuje się następujące zależności określające estymaty poprawek wielkości mierzonych $\delta\bar{\mathbf{x}}$ i wielkości niewiadomych $\delta\bar{\mathbf{y}}$ [6],[9]:

$$\delta\bar{\mathbf{x}} = -\mathbf{V}\mathbf{A}^T\mathbf{F}^{-1}\left[\mathbf{w} - \mathbf{B}(\mathbf{B}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{w}\right] \tag{3.17}$$

$$\delta\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y}^0 - (\mathbf{B}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{w} \tag{3.18}$$

gdzie $\mathbf{F}$ jest macierzą kwadratową o postaci $\mathbf{F}=\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{A}^T$.

Estymaty wielkości mierzonych $\bar{\mathbf{x}}$ i wielkości niewiadomych są określone zależnościami:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}} &= \mathbf{x}^0 + \delta\bar{\mathbf{x}}\\ \bar{\mathbf{y}} &= \mathbf{y}^0 + \delta\bar{\mathbf{y}}\end{aligned} \tag{3.19}$$

Z uwagi na liniowy charakter problemu można zależności (3.17) i (3.18) przekształcić do takiej postaci, w której nie występuje wstępne oszacowanie wielkości niewiadomych $\mathbf{y}^0$. Postępowanie takie upraszcza obliczenia, przy czym w pierwszej kolejności musi być wyznaczona estymata wielkości niewiadomych $\bar{\mathbf{y}}$:

$$\bar{\mathbf{y}} = -(\mathbf{B}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{x}^0 + \mathbf{c}) \tag{3.20}$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^0 - \mathbf{V}\mathbf{A}^T\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{x}^0 + \mathbf{B}\bar{\mathbf{y}} + \mathbf{c}) \tag{3.21}$$

Możliwość wyeliminowania z rozważań wstępnego oszacowania wielkości niewiadomych $\mathbf{y}^0$ wynika z faktu, że dla zagadnienia liniowego estymaty $\bar{\mathbf{x}}$ i $\bar{\mathbf{y}}$ nie zależą od $\mathbf{y}^0$.

Macierze kowariancji estymaty wielkości niewiadomych $\mathbf{G}_y$ oraz wielkości mierzonych $\mathbf{G}_x$ są zdefiniowane w następujący sposób:

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_y &= E\{(\mathbf{y}-\bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}-\bar{\mathbf{y}})^T\}\\ \mathbf{G}_x &= E\{(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})^T\}\end{aligned} \tag{3.22}$$

gdzie $E\{..\}$ oznacza symbol wielkości oczekiwanej. Wykorzystując prawo propagacji błędów [6],[9] oraz zależności (3.20) i (3.21) otrzymuje się następujące zależności określające macierze kowariancji $\mathbf{G}_x$ i $\mathbf{G}_y$ optymalnych ocen $\bar{\mathbf{x}}$ i $\bar{\mathbf{y}}$:

$$\mathbf{G}_y = (\mathbf{B}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \tag{3.23}$$

$$\mathbf{G}_x = \mathbf{V} - \mathbf{V}\mathbf{A}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} + \mathbf{V}\mathbf{A}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{G}_y\mathbf{B}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} \tag{3.24}$$

Macierze kowariancji $\mathbf{G}_x$ i $\mathbf{G}_y$ są symetryczne (co wynika z postaci zależności (3.22) i (3.23)), a ich obliczenie należy rozpoczynać od wyznaczenia macierzy kowariancji wielkości niewiadomych $\mathbf{G}_y$. Unika się w ten sposób dwukrotnego powtarzania operacji macierzowych występujących w zależności (3.22).

Ze względu na swą ogólność prezentowany algorytm jest najczęściej stosowany jako narzędzie uzgadniania przy obliczeniach numerycznych przewodzenia ciepła. Z drugiej jednak strony przy rozpatrywaniu tych właśnie zagadnień napotyka się na poważne trudności obliczeniowe. Dyskretne modele pól temperatury wykorzystywane do rozwiązywania odwrotnych zagadnień przewodzenia ciepła zawierają zazwyczaj znacznie więcej wielkości niewiadomych aniżeli mierzonych (występuje więc sytuacja, gdy $n>>s$). Jednocześnie liczba równań modelu r zbliżona jest do liczby niewiadomych. Zachodzi więc sytuacja, gdzie spełniony jest pierwszy z warunków (3.13), a nie jest spełniony drugi warunek. W takim przypadku macierz $\mathbf{F}=\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{A}^T$ jest osobliwa i nie jest możliwa inwersja macierzy $\mathbf{F}$. Uzgadnianie jest jednak możliwe, jeśli przekształci się układ równań (3.12), tak aby był spełniony warunek $r<s$. Przekształcenie układu polega najczęściej na częściowej lub całkowitej eliminacji niewiadomych w celu zmniejszenia liczby niewiadomych i liczby równań w układzie [58]. Eliminacja niewiadomych pociąga jednak za sobą dodatkowe komplikacje, przez co zwiększa się nakład pracy związany z wykorzystaniem algorytmu.

Dodatkowe niekorzystne cechy algorytmu mogą się uwidocznić przy rozwiązywaniu zagadnień źle uwarunkowanych (jak na przykład granicznych zadań odwrotnych przewodzenia ciepła). Przeprowadzone eksperymenty numeryczne wykazują [52],[61], że w wielu przypadkach wyniki estymacji charakteryzują się nadmierną niepewnością ocen $\bar{\mathbf{x}}$ i $\bar{\mathbf{y}}$ wyrażającą się bardzo dużymi elementami macierzy kowariancji $\mathbf{G}_x$ i $\mathbf{G}_y$. Wynika to stąd, że rozwiązywane zagadnienia optymalizacyjne charakteryzują się bardzo płaskim ekstremum, przez co są bardzo czułe na zakłócenia danych wejściowych. Ważona estymacja średniokwadratowa nie jest w stanie (w przypadku złego uwarunkowania problemu) zapewnić dostatecznej stabilności rezultatów.

Jakość estymacji można poprawić poprzez modyfikację zagadnienia optymalizacyjnego, polegającą na wprowadzeniu do rozwiązania członu stabilizującego. Koncepcję tę realizuje rozszerzony algorytm uzgadniania za pomocą rachunku wyrównawczego.

3.1.3. Rozszerzony algorytm uzgadniania za pomocą rachunku wyrównawczego

Jak już wspomniano, dyskretne modele matematyczne granicznych zadań odwrotnych przewodzenia ciepła zawierają najczęściej znacznie więcej wielkości niewiadomych aniżeli mierzonych. Ten niekorzystny stosunek wywiera wpływ na strukturę równań modelu, a tym samym wpływa na stopień złego uwarunkowania problemu. Praktyczne możliwości poprawy złego uwarunkowania poprzez zwiększenie liczby punktów pomiarowych oraz dokładności pomiarów są zazwyczaj ograniczone możliwościami technicznymi. Ponadto należy pamiętać, że nie jesteśmy w stanie wyeliminować niedokładności samego modelu, a więc zwiększanie dokładności pomiarów ma sens do pewnej (trudnej jednak do określenia) granicy.

Do łagodzenia skutków złego uwarunkowania można jednak wykorzystać dostępną *a priori* informację o wielkościach niewiadomych. W każdym procesie fizycznym da się bowiem ocenić *a priori* wartości poszukiwanych wielkości niewiadomych y_0 oraz macierz kowariancji $\mathbf{G}_{y0}$ wstępnego oszacowania niewiadomych. Oszacowanie to musi opierać się na obiektywnych informacjach dotyczących rozpatrywanych wielkości oraz analizowanego procesu. Elementy diagonalnej macierzy $\mathbf{G}_{y0}$ można w tym przypadku interpretować jako oczekiwane maksymalne wartości rozrzutu wokół wartości średniej y_0. Macierz $\mathbf{G}_{y0}$ jest więc w pewnym sensie odpowiednikiem macierzy kowariancji wyników pomiarów **V**. Wielkości niewiadome są bowiem w tym ujęciu traktowane jak wielkości "mierzone" o wartościach y_0 oraz o macierzy kowariancji $\mathbf{G}_{y0}$. Jeżeli np. należy oszacować nieznaną początkową temperaturę gorącego wlewka stalowego załadowanego do pieca wgłębnego, to przyjęcie wartości $y_0 = T_0 = 1000K$ oraz $G_{y0} = 800K$ jest całkowicie uzasadnione fizykalnie. Temperatura początkowa gorącego wlewka nie może być bowiem większa od $1000K + 800K = 1800K$ (tzn. więcej niż wynosi temperatura ciekłej stali) i niższa aniżeli $1000K - 800K = 200K$.

W pracy [44] autor zaproponował wykorzystanie macierzy $\mathbf{G}_{y0}$ do stabilizacji algorytmu rozwiązywania odwrotnych zadań granicznych przewodzenia ciepła. Koncepcja ta została z powodzeniem zastosowana do rozwiązywania różnych zagadnień uzgadniania, np. [39], [43], [46], [47], [52] i [58].

Zaproponowane podejście wymaga sformułowania problemu uzgadniania w innej postaci, niż przedstawiono w rozdziale 3.2.1. Wszystkie wielkości niewiadome i mierzone występujące w opisie zagadnienia najdogodniej jest połączyć w celu utworzenia jednego wektora wielkości "mierzonych" $\mathbf{x}^e$:

$$\mathbf{x}^e = [\mathbf{x}\ ,\ \mathbf{y}]^T \tag{3.25}$$

Podobnie należy utworzyć macierz blokową $\mathbf{A}^e$ o rozmiarach $r(n+s)$, w której skład wchodzą macierze **A** i **B** występujące w równaniu (3.12):

$$\mathbf{A}^e = [\mathbf{A}\ ,\ \mathbf{B}] \tag{3.26}$$

Wykorzystując (3.25) i (3.26) uzyskuje się następującą postać równania (3.12):

$$\mathbf{A}^e \mathbf{x}^e + \mathbf{c} = \mathbf{0} \tag{3.27}$$

Uzgodnienie układu (3.27) jest możliwe, jeżeli spełniony jest warunek [6],[58]:

$$r < n + s \tag{3.28}$$

Dla większości rozpatrywanych granicznych zagadnień odwrotnych uzyskuje się układy równań warunków o postaci (3.27), dla których warunek (3.28) jest spełniony bez potrzeby wykonywania dodatkowych skomplikowanych przekształceń układu równań warunków.

W podobny sposób definiuje się macierz kowariancji $\mathbf{V}^e$ wektora wyników pomiarów:

$$\mathbf{V}^e = \begin{vmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{y0} \end{vmatrix} \tag{3.29}$$

Jeśli do równania (3.27) podstawi się wyniki pomiarów $\mathbf{x}^0$ oraz wyniki wstępnego oszacowania wielkości niewiadomych $\mathbf{y}^0$ (wchodzące w skład rozszerzonego wektora wielkości mierzonych $\mathbf{x}^e$), to równanie to nie będzie zazwyczaj spełnione:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x}_0^e + \mathbf{c} = \mathbf{w} \tag{3.30}$$

Poszukujemy takich poprawek $\delta\mathbf{x}^e$, które spełniają układ równań warunków (3.29) i jednocześnie minimalizują formę kwadratową:

$$\delta\mathbf{x}^{eT}\mathbf{V}^e\,\delta\mathbf{x}^e = [\delta\mathbf{x}\ ,\delta\mathbf{y}] \begin{bmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{y0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x} \\ \delta\mathbf{y} \end{bmatrix} = \delta\mathbf{x}^T\mathbf{V}\,\delta\mathbf{x} + \delta\mathbf{y}^T\mathbf{G}_{y0}\,\delta\mathbf{y} \Rightarrow \min \tag{3.31}$$

Rozwiązaniem tak postawionego zadania optymalizacji jest estymata $\bar{\mathbf{x}}^e$ rozszerzonego wektora wyników pomiarów $\mathbf{x}^e$:

$$\bar{\mathbf{x}}^e = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} \\ \bar{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \mathbf{x}^{0e} - \mathbf{V}^e\mathbf{A}^{eT}(\mathbf{A}^e\mathbf{V}^e\mathbf{A}^{eT})^{-1}(\mathbf{A}^e\mathbf{x}^{0e} + \mathbf{c}) \tag{3.32}$$

gdzie $\mathbf{x}^{0e} = [\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0]^T$.

Macierz kowariancji $\mathbf{G}_x^e$ estymaty $\bar{\mathbf{x}}^e$ dana jest następującą zależnością:

$$\mathbf{G}_x^e = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_x & \mathbf{G}_{xy} \\ \mathbf{G}_{xy}^T & \mathbf{G}_y \end{bmatrix} = \mathbf{V}^e - \mathbf{V}^e\mathbf{A}^{eT}(\mathbf{A}^e\mathbf{V}^e\mathbf{A}^{eT})^{-1}\mathbf{A}^e\mathbf{V}^e \tag{3.33}$$

W celu porównania zależności określających wyniki estymacji uzyskanych przy zastosowaniu algorytmu klasycznego i rozszerzonego należy wykonać wszystkie operacje na macierzach blokowych występujących w zależnościach (3.32) i (3.33). Estymata wielkości niewiadomych $\bar{\mathbf{y}}$ dana jest zależnością:

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y}^0 + \delta\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y}^0 - \mathbf{G}_{y0}\mathbf{B}^T(\mathbf{F} + \mathbf{B}^T\mathbf{G}_{y0}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{x}^0 + \mathbf{B}\mathbf{y}^0 + \mathbf{c}) \tag{3.34}$$

Zależność (3.34) można przekształcić (patrz Dodatek B) do następującej postaci:

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y}^0 + \delta\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y}^0 - (\mathbf{G}_{y0}^{-1} + \mathbf{B}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{x}^0 + \mathbf{B}\mathbf{y}^0 + \mathbf{c}) \tag{3.35}$$

lub

$$\bar{\mathbf{y}} = \left(\mathbf{I} - (\mathbf{G}_{y0}^{-1} + \mathbf{B}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{B}\right)\mathbf{y}^0 - (\mathbf{G}_{y0}^{-1} + \mathbf{B}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{x}^0 + \mathbf{c}) \tag{3.36}$$

gdzie $\mathbf{F}=\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{A}^T$.

Macierz kowariancji wielkości niewiadomych $\mathbf{G}_{\bar{y}}$ wyraża się zależnością

$$\mathbf{G}_{\bar{y}} = \mathbf{G}_{y0} - \mathbf{G}_{y0}\mathbf{B}^T(\mathbf{F} + \mathbf{B}^T\mathbf{G}_{y0}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{G}_{y0} \tag{3.37}$$

Po przekształceniach (patrz dodatek B) otrzymuje się ostatecznie:

$$\mathbf{G}_{\bar{y}} = (\mathbf{G}_{y0}^{-1} + \mathbf{B}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \tag{3.38}$$

Estymata wielkości mierzonych $\bar{\mathbf{x}}$ oraz macierz kowariancji wielkości mierzonych $\mathbf{G}_{\bar{x}}$ dane są zależnościami:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^0 + \delta\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^0 - \mathbf{V}\mathbf{A}^T(\mathbf{F} + \mathbf{B}^T\mathbf{G}_{y0}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{x}^0 + \mathbf{B}\mathbf{y}^0 + \mathbf{c}) \tag{3.39}$$

$$\mathbf{G}_{\bar{x}} = \mathbf{V} - \mathbf{V}\mathbf{A}^T(\mathbf{F} + \mathbf{B}^T\mathbf{G}_{y0}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} \tag{3.40}$$

Różnice pomiędzy klasyczną a rozszerzoną wersją uzgadniania są najwyraźniej widoczne, jeśli porówna się wyniki estymacji wielkości niewiadomych (ocena tych wielkości jest podstawowym celem obliczeń). Zasadnicza różnica dotyczy głównie postaci macierzy kowariancji wielkości niewiadomych $\mathbf{G}_{\bar{y}}$ (zależności (3.23) i (3.38)). Jeżeli elementy macierzy kowariancji wstępnego oszacowania wielkości niewiadomych dążą do nieskończoności (co oznacza brak jakiejkolwiek informacji *a priori* o wielkościach niewiadomych), to algorytm uogólniony ma tę samą postać co jego wersja klasyczna:

$$\lim_{\mathbf{G}_{x0}\to\infty} (\mathbf{G}_{y0}^{-1} + \mathbf{B}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{B})^{-1} = (\mathbf{B}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \tag{3.41}$$

Z zależności (3.41) wynika, że algorytm rozszerzony zawsze daje lepsze oszacowanie elementów macierzy kowariancji $\mathbf{G}_{\bar{y}}$ aniżeli wersja klasyczna. Jeżeli bowiem elementy macierzy $\mathbf{G}_{y0}$ mają skończoną wartość, to z zależności (3.38) wynika, że jej elementy muszą być mniejsze aniżeli elementy macierzy $(\mathbf{B}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{B})^{-1}$ określającej macierz kowariancji $\mathbf{G}_{\bar{y}}$ dla algorytmu klasycznego.

Czułość algorytmu uzgadniania na zakłócenie danych wejściowych, którymi są wyniki pomiarów $\mathbf{x}^0$, można analizować obliczając pochodną poszukiwanej estymaty $\bar{\mathbf{y}}$ względem wektora wyników pomiarów $\mathbf{x}^0$. Różniczkując zależność (3.20) otrzymujemy w przypadku algorytmu klasycznego:

$$\frac{\partial\bar{\mathbf{y}}}{\partial\mathbf{x}^0} = (\mathbf{B}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A} \tag{3.42}$$

Dla algorytmu rozszerzonego różniczkowanie zależności (3.36) daje:

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial x^0} = (G_{y0}^{-1} + B^T F^{-1} B)^{-1} B^T F^{-1} A \qquad (3.43)$$

Przy analizie zależności (3.42) i (3.43) uwidacznia się stabilizujący wpływ elementu G_{y0}. W przypadku algorytmu klasycznego (i dla danych macierzy **A** i **B**) czułość algorytmu na zakłócenie danych wejściowych zależy tylko od wartości elementów macierzy kowariancji **V**. Dla większości zagadnień źle uwarunkowanych stabilność algorytmu jest często zbyt mała.

Element G_{y0}^{-1} występujący w wyrażeniu (3.43) powoduje zmniejszenie czułości algorytmu rozszerzonego na zakłócenia danych wejściowych i poprawia stabilność metody. Szacowanie elementów macierzy G_{y0} musi być jednak przeprowadzane bardzo uważnie. Dobór małych elementów tej macierzy (duża pewność oszacowania) poprawia zdecydowanie stabilność metody, ale nie można wykluczyć sytuacji, że metoda będzie zbieżna do złego rozwiązania. Może to wystąpić, jeżeli oszacowanie y^0 będzie jednocześnie dalekie od rozwiązania dokładnego. Jak wynika bowiem z zależności (3.36), określającej estymatę $\bar{y}$, wartość $\bar{y}$ zależy również od oszacowania y^0 (w przeciwieństwie do metody klasycznej, gdzie estymata $\bar{y}$ nie zależy od oszacowania y^0 - zależność (3.20)). Oszacowanie elementów macierzy G_{y0} oraz wektora y^0 wpływa bowiem następująco na przebieg estymacji:

- zmniejszanie elementów macierzy kowariancji G_{y0} zmniejsza czułość na zakłócenie danych wejściowych (ekstremum funkcji (3.31) staje się więc bardziej ostre),
- niedokładności oszacowania wektora y^0 odsuwają ekstremum funkcji (3.31) od rozwiązania dokładnego.

Podczas praktycznej realizacji metody należy (w sytuacjach wątpliwych) przyjmować zawyżone wartości macierzy G_{y0}. Pozwala to uniknąć rozwiązań przeszacowanych (tzn. niedokładnych, lecz o dużej pewności oszacowania). Dotyczy to szczególnie sytuacji, gdy nie ma możliwości weryfikacji dokładności wyników.

Wykorzystanie rozszerzonej wersji rachunku wyrównawczego wymaga więc pewnej ostrożności przy oszacowaniu wartości i macierzy kowariancji elementów wektora y^0. Optymalny dobór tych wielkości jest od strony matematycznej sprawą bardzo trudną i zależną od rodzaju rozwiązywanego problemu. Dla typowych problemów technicznych oszacowanie takie powinno się w pierwszym rzędzie opierać na dostępnych przesłankach fizykalnych.

Poprawę dokładności obliczeń można też uzyskać stosując procedurę iteracyjną ze względu na początkowe oszacowanie wektora y^0 oraz macierzy kowariancji G_{y0}.

3.2. Rozwiązywanie zadań odwrotnych przewodzenia ciepła

Rachunek wyrównawczy (podobnie jak i inne metody estymacji statystycznie optymalnej) może być zastosowany do rozwiązywania tych problemów, w których występuje nadmiar informacji. W przypadku zadań odwrotnych dodatkowe informacje o procesie są dostarczane przez eksperyment pomiarowy. Istnienie nadmiaru informacji nie jest oczywiście warunkiem koniecznym do uzyskania rozwiązania zagadnienia odwrotnego. Do rozwiązania zagadnień odwrotnych, podobnie jak i zagadnień prostych, wystarcza tzw. minimalny zbiór informacji. Rzecz jest jednak w tym, że opierając się na minimalnym zbiorze informacji trudno jest uzyskać stabilne, mało czułe na zakłócenia danych wejściowych rozwiązania zadania odwrotnego. Sensowne wykorzystanie nadmiaru informacji może znacznie poprawić stabilność takiego rozwiązania. Szansę taką daje między innymi rachunek wyrównawczy.

W pracy zastosowano rachunek wyrównawczy do rozwiązywania odwrotnych granicznych zagadnień przewodzenia ciepła. Eksperymenty numeryczne wykazały tu zdecydowaną wyższość algorytmu rozszerzonego nad klasyczną wersją metody. Algorytm rozszerzony pozwala uzyskać lepszą stabilność wyników, co ma bardzo istotne znaczenie dla zagadnień słabo uwarunkowanych. W takich bowiem przypadkach nawet nieznaczne polepszenie metody może doprowadzić do znacznej poprawy rezultatów. Zastosowanie rozszerzonej wersji algorytmu pozwala również w wielu przypadkach uprościć procedurę budowania równań warunków i przestrzegania ograniczeń narzuconych na liczbę równań czy liczbę wielkości niewiadomych i mierzonych (warunki (3.13)). Wynika to z możliwości traktowania pewnych wielkości niewiadomych jako mierzone, przez co uzyskuje się korzystne zmiany w strukturze macierzy współczynników występujących w równaniach warunków.

Rozszerzoną wersję algorytmu rachunku wyrównawczego zastosowano z powodzeniem do rozwiązywania zagadnień identyfikacji nieustalonych pól temperatury przy znanych warunkach brzegowych i nieznanym warunku początkowym (rozdział 3.2.1), a także do rozwiązywania odwrotnych zadań granicznych polegających na identyfikacji pola temperatury i nieznanych warunków brzegowych (rozdział 3.2.2). W rozdziale 3.2.3 przedstawiono przykład zastosowania opracowanej metody do estymacji zmiennego w czasie strumienia ciepła na powierzchni eksperymentalnej komory spalania.

3.2.1. Identyfikacja nieustalonego pola temperatury

Przedmiotem rozważań jest identyfikacja nieustalonego pola temperatury, w sytuacji gdy nie jest znany warunek początkowy, a znane są warunki brzegowe (nie jest to więc klasyczne odwrotne zagadnienie graniczne, a raczej zagadnienie retrospektywne). Praktycznym przykładem może tu być identyfikacja pola temperatury wlewka w momencie załadowania do pieca wgłębnego na podstawie obserwacji temperatury powierzchni od momentu wyjęcia z wlewnicy. Nie jest tu znany początkowy rozkład temperatury we wlewku, warunki brzegowe dają się natomiast oszacować dość dokładnie.

Budowę algorytmu w każdym przypadku rozpoczyna się od utworzenia równań warunków, którymi są równania dyskretnego modelu pola temperatury w N węzłach podziału różnicowego:

$$\mathbf{T}_{k+1} = \mathbf{P}\,\mathbf{T}_k + \mathbf{c}_k \tag{3.44}$$

gdzie $\mathbf{T}_{k+1}$ i $\mathbf{T}_k$ są wektorami temperatur węzłowych w chwili czasu $\tau+\Delta\tau$ oraz τ. Przyjmijmy, że w dowolnej chwili czasu k w l węzłach obszaru dokonuje się pomiaru temperatury. Uzyskana w ten sposób odpowiedź temperaturowa (wyniki pomiarów) tworzy l-elementowy wektor $\mathbf{x}_{k+1}$. Pozostałe N-l temperatur węzłowych traktuje się jako wielkości niewiadome. Pomiędzy wektorem wielkości mierzonych x a wektorem temperatur węzłowych T daje się ustanowić następującą relację:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{H}\,\mathbf{T}_{k+1} \tag{3.45}$$

gdzie H jest macierzą wskaźnikową (o rozmiarach $n \cdot N$), zawierającą wyłącznie elementy 0 lub 1. Wykorzystując (3.45) można równanie (3.44) zapisać w postaci:

$$\mathbf{H}\,\mathbf{T}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{HP}\,\mathbf{T}_k + \mathbf{Hc}_k \tag{3.46}$$

W celu uzyskania nadmiaru informacji należy wykorzystać wyniki pomiarów z kilku chwil czasu (jest to w zasadzie wymóg klasycznej wersji algorytmu uzgadniania). Równania pola temperatury dla kolejnych chwil czasu zawierają nowe niewiadome temperatury $\mathbf{T}_k$ (k=0,1,..p). Wprowadzenie do rozwiązania zbyt dużej liczby zmiennych jest jednak niepożądane ze względów obliczeniowych. Niedogodności tej można uniknąć poprzez eliminację temperatur $\mathbf{T}_k$ (k=1,2,...,p), tzn. wszystkich z wyjątkiem początkowego rozkładu temperatury $\mathbf{T}_0$. Podstawiając $\mathbf{y}^0 = \mathbf{T}_0$ otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= \mathbf{HPy}^0 + \mathbf{Hc}_0 \\
\mathbf{x}_2 &= \mathbf{HPPy}^0 + \mathbf{Hc}_1 + \mathbf{HPc}_0 \\
&\cdot = \cdot \\
&\cdot = \cdot \\
\mathbf{x}_p &= \mathbf{HP}^{(p)}\mathbf{y}^0 + \mathbf{H}\sum_{i=1}^{p-1} \mathbf{P}^{(i)}\mathbf{c}_{p-i-1}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

gdzie $\mathbf{P}^{(i)}$ oznacza i-tą potęgę macierzy P, a p oznacza całkowitą liczbę kroków czasu.

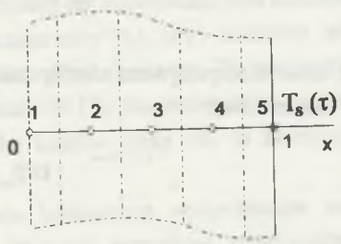
Celem zapisania równań warunków w standardowej dla uzgadniania postaci (3.12) lub (3.27) należy wyznaczyć macierze współczynników A i B wykorzystując do tego celu równanie (3.47). W rezultacie otrzymujemy:

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} \qquad \mathbf{B} = -\begin{bmatrix} \mathbf{HP} \\ \mathbf{HPP} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{HP}^{(p)} \end{bmatrix} \tag{3.48}$$

gdzie I jest macierzą jednostkową.

Na podstawie utworzonych macierzy A i B można rozwiązać problem identyfikacji posługując się opisanymi algorytmami uzgadniania. Jako przykład rozpatrzono problem identyfikacji symetrycznego pola temperatury w płycie jednowymiarowej, przy czym obliczenia przeprowadzono za pomocą klasycznej i rozszerzonej wersji algorytmu uzgadniania.

Podział różnicowy płyty przedstawiono na rysunku 3.1. Na powierzchni płyty przyjęto warunek brzegowy trzeciego rodzaju scharakteryzowany liczbą Biota Bi=0.5 oraz temperaturą płynu T_{pl}=0. Początkowy rozkład temperatury $\mathbf{T}_0$=$\mathbf{y}_0$ jest nieznany. Znany jest przebieg temperatury (tzn. odpowiedź temperaturowa) w jednym punkcie usytuowanym na brzegu płyty. Wyniki pomiarów symulowano na podstawie rozwiązania zagadnienia prostego ze znaną początkową temperaturą $\mathbf{T}_0$=$\mathbf{y}_0$=1. Odpowiedź temperaturową zakłócano losowo za pomocą zależności (2.2) błędem o maksymalnej wartości δ=0.01. Elementy macierzy kowariancji V przyjęto równe V_{ii}=(0.025)^2. Wartość bezwymiarowego kroku czasu wynosi ΔFo=0.1. W przypadku algorytmu rozszerzonego oszacowano początkowy rozkład tempe-



Rys. 3.1. *Podział różnicowy płyty*
Fig. 3.1. *Discretization of the plane wall*

ratury $y^0=0.75$, a elementy diagonalne macierzy kowariancji $\mathbf{G}_{y0}$ przyjęto równe 0.5. Tak przyjęte oszacowanie jest więc stosunkowo odległe od wartości rzeczywistych.

Rozwiązanie zadania rozpoczyna się od sformułowania równań dyskretnego modelu pola temperatury w węzłach płyty. Do tego celu wykorzystano metodę bilansów elementarnych. W pierwszym etapie uzyskuje się następujące równania pola temperatury:

$$\begin{aligned}
\frac{dT_1}{d\tau} &= d_{11}T_1 + d_{12}T_2 \\
\frac{dT_2}{d\tau} &= d_{21}T_1 + d_{22}T_2 + d_{23}T_3 \\
&\cdots \\
\frac{dT_5}{d\tau} &= d_{54}T_4 + d_{55}T_5 + \gamma_5
\end{aligned} \tag{3.49}$$

gdzie γ_5 jest współczynnikiem uwzględniającym wpływ warunku brzegowego. Po zastosowaniu do aproksymacji pochodnych temperatury względem czasu (lewe strony równania (3.49)) metody ilorazu różnicowego wstecznego (schemat niejawny) otrzymuje się układ równań w następującej postaci:

$$\begin{aligned}
(1 + d_{11})T_{1,k+1} + d_{12}T_{2,k+1} &= T_{1,k} \\
d_{21}T_{1,k} + (1 + d_{22})T_{2,k+1} + d_{23}T_{3,k+1} &= T_{2,k} \\
&\cdots \\
d_{54}T_{4,k+1} + (1 + d_{55})T_{5,k+1} &= T_{5,k} + \gamma_5
\end{aligned} \tag{3.50}$$

gdzie k oznacza rozpatrywaną chwilę czasu. Równanie (3.50) wygodnie jest przedstawić w postaci macierzowej:

$$\mathbf{D}\,\mathbf{T}_{k+1} = \mathbf{T}_k + \gamma_k \tag{3.51}$$

gdzie $\mathbf{D}$ jest kwadratową macierzą współczynników.

W chwili czasu $k+1$ dokonuje się pomiaru temperatury w wybranych węzłach płyty. W analizowanym przykładzie jest to węzeł nr 5, tzn. $T_{5,k+1}=x_{5,k+1}$.

Równania (3.50) są podstawą do utworzenia równań warunków. W przedstawionej postaci równania te zawierają jednak dużą liczbę zmiennych: $n=5$ temperatur węzłowych w chwili czasu k oraz $n=5$ temperatur węzłowych w chwili czasu $k+1$. W sumie w $n=5$ równaniach

występuje $2n$-1 wielkości niewiadomych i jedna wielkość mierzona. Rozszerzona wersja rachunku wyrównawczego dopuszcza wykorzystanie równań więzów w takiej postaci, lecz z drugiej strony zbyt duża liczba zmiennych bardzo komplikuje realizację numeryczną metody. W celu zmniejszenia liczby zmiennych można przekształcić układ (3.51) rozwiązując go ze względu na temperatury w kroku czasu k (np. wykorzystując macierz odwrotną $\mathbf{D}^{-1}$, co jednak nie jest metodą polecaną z uwagi na duży czas obliczeń). Uzyskuje się w ten sposób następujące równanie:

$$\mathbf{T}_{k+1} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{T}_k + \mathbf{D}^{-1}\gamma_k = \mathbf{P}\mathbf{T}_k + \mathbf{c}_k \tag{3.52}$$

W wyniku takiego przekształcenia każde z równań układu (3.52) zawiera wszystkie temperatury węzłowe dotyczące kroku czasu k i oczywiście tylko jedną temperaturę z kroku czasu $k+1$. Do dalszych rozważań wystarczy więc wykorzystać wyłącznie te równania, w których występują mierzone temperatury (w rozpatrywanym przykładzie temperatura $T_{5,k+1}$:

$$T_{5,k+1} = p_{51}T_{1,k} + p_{52}T_{2,k} + p_{53}T_3 + p_{45}T_{4,k} + p_{55}T_{5,k+1} + c_{5,k}$$

lub (3.53)

$$x_{5,k+1} - \sum_{j=1}^{5} p_{5j}y_{j,k} - c_{5,k} = 0$$

gdzie: $x_{5,k+1}= T_{5,k+1}$ oraz $y_{j,k} = T_{j,k}$ $(j=1,2,\ldots,5)$.

Równanie (3.53) może być już wprost wykorzystane do identyfikacji pola temperatury $\mathbf{T}_k$ (a więc na przykład początkowego rozkładu temperatury $\mathbf{T}_0$), przy założeniu jednak że wykorzystana zostanie rozszerzona wersja rachunku wyrównawczego. (W przypadku wersji klasycznej metody nie jest bowiem spełniony warunek (3.13). Zastosowanie tej wersji metody jest możliwe, o ile rozpatrzy się większą liczbę kroków czasu lub (i) zwiększy liczbę punktów pomiarowych).

Metoda rachunku wyrównawczego umożliwia jednoczesne wykorzystanie informacji pomiarowych z wielu chwil czasu. Kolejne równania warunków wyprowadza się w identyczny sposób jak równanie (3.53) eliminując przy tym wszystkie nieznane temperatury węzłowe z wyjątkiem temperatur początkowych. Proces eliminacji wygodnie jest prowadzić opierając się na ogólnym schemacie (3.47). W tym celu należy jeszcze zdefiniować macierz wskaźnikową $\mathbf{H}$, która w rozpatrywanym przykładzie przybiera postać:

$$\mathbf{H} = [0,0,0,0,1] \tag{3.54}$$

Opierając się na algorytmie (3.47) oraz wykorzystując macierz **H** tworzy się macierze współczynników **A** i **B** (zależność (3.48)) stanowiące podstawę algorytmu uzgadniania i identyfikacji pola temperatury w płycie.

W tablicy 3.1 przedstawiono wyniki estymacji temperatury w węźle o numerze 1. W tym węźle położonym najdalej od punktu pomiarowego wyniki estymacji są bowiem najgorsze. Zestawiono wyniki uzyskane za pomocą algorytmu klasycznego i rozszerzonego: estymatę $\tilde{T}_1$ oraz odchylenie standardowe S_1 estymaty $\tilde{T}_1$ ($S_1 = (G_{y11})^{0.5}$). O dokładności obliczeń świadczy nie tylko różnica pomiędzy wartością dokładną a estymowaną, lecz również wartość odchylenia standardowego uzyskanej estymaty $\tilde{T}_1$. Należy bowiem pamiętać, że wartość odchylenia standardowego jest miarą wiarygodności uzyskanych ocen.

Tablica 3.1

Wyniki identyfikacji temperatury w płycie

Fo	Wartość dokładna T_5	Wynik pomiaru $x_5=T_5+\delta$	Temperatura T_1, $\tilde{T}_1$, odchylenie standardowe $S_{\tilde{T}}$						
			Wartość dokładna T_1(Fo)	Algorytm klasyczny			Algorytm rozszerzony		
				$\tilde{T}_1$(Fo)	$S_{\tilde{T}}$	$\tilde{T}_1$(Fo) $\delta=0$	$\tilde{T}_1$(Fo)	$S_{\tilde{T}}$	$\tilde{T}_1$(Fo) $\delta=0$
0.0	1.0	-	1.000	43.1	1090.	1.000	0.863	0.459	0.881
0.1	0.871	0.876	0.988	7.6	168.	0.988	0.945	0.125	0.953
0.2	0.806	0.814	0.965	2.08	27.	0.965	0.948	0.058	0.951
0.3	0.761	0.770	0.935	1.15	4.8	0.935	0.928	0.036	0.927
0.4	0.724	0.724	0.902	0.956	1.0	0.902	0.896	0.027	0.896
0.5	0.692	0.699	0.867	0.888	0.3	0.867	0.865	0.023	0.863
0.6	0.663	0.661	0.832	0.845	0.14	0.832	0.832	0.020	0.830

Z danych przedstawionych w tablicy 3.1 wynika, że zastosowanie algorytmu klasycznego daje wyniki odległe od rzeczywistych i o bardzo dużej niepewności oszacowania (bardzo duże wartości S_1). Dokładność oszacowania poprawia się przy tym dla kolejnych kroków czasu.

Zdecydowanie lepsze rezultaty otrzymuje się stosując algorytm rozszerzony. Jest to szczególnie widoczne, jeśli weźmie się pod uwagę wartości odchylenia standardowego S_1. Dla ostatnich kroków czasu wartości estymaty $\tilde{T}_1$ są już podobne, natomiast odchylenie standardowe oceny S_1 jest w przypadku algorytmu rozszerzonego prawie o rząd mniejsze.

Widoczne są też wyraźnie (szczególnie dla pierwszych kilku kroków czasu) stabilizujące własności algorytmu rozszerzonego, podczas gdy rezultaty uzyskane za pomocą wersji klasycznej są zupełnie niedokładne.

Ciekawe jest również porównanie wyników obliczeń uzyskane przy założeniu, że nie występuje zakłócenie odpowiedzi temperaturowej, tzn. $\delta=0$ (pozostałe wielkości pozostają bez zmian). Dla algorytmu klasycznego estymata $\tilde{T}_1$ jest równa wartości dokładnej. W przypadku algorytmu rozszerzonego uzyskuje się natomiast tylko poprawę dokładności estymacji temperatury T_1. Należy tu jednak pamiętać, że w obydwu przypadkach nie ulegają zmianie macierze kowariancji $\mathbf{G}_y$, których postać nie zależy od wektora wyników pomiarów (patrz zależności (3.23) i (3.38)). Tak więc w sensie wiarygodności wyniki uzyskane za pomocą algorytmu klasycznego są tu również zdecydowanie gorsze. Dla algorytmu rozszerzonego uwidacznia się tu jego charakterystyczna cecha numeryczna: poprawa stabilności i wiarygodności ocen może spowodować pewne przesunięcie rozwiązania w kierunku oszacowanych ocen początkowych. Z tego też powodu ocena początkowa $\mathbf{G}_{y0}$ powinna być dostatecznie ostrożna (tzn. nie powinna być zbyt optymistyczna), gdyż może to prowadzić do niewłaściwych rezultatów obliczeń.

3.2.2. Rozwiązywanie granicznych zagadnień odwrotnych

Rozwiązanie odwrotnego zagadnienia granicznego polega na identyfikacji pola temperatury i nieznanych warunków brzegowych na konturze ciała. Problem ten ma szerokie znaczenie praktyczne. Bardzo często bowiem zachodzi konieczność wyznaczenia pola temperatury w obszarze, w sytuacji gdy występują trudności z określeniem warunków brzegowych (a także warunku początkowego). Możliwe jest natomiast przeprowadzenie pomiarów temperatury w pewnych punktach ciała. Przykładem może tu być wyznaczanie przebiegów temperatury podczas nagrzewania wsadu w piecach hutniczych, wyznaczanie temperatury w ściance cylindra silnika itp. Celem zasadniczym może też być wyznaczenie warunków brzegowych w celu określenia na przykład współczynnika wnikania ciepła czy zmian strumienia ciepła na powierzchni ciała.

Zastosowanie rachunku wyrównawczego do rozwiązania odwrotnych zadań granicznych przebiega podobnie jak w przypadku problemu identyfikacji pola temperatury (rozdział 3.2.1). W pierwszej kolejności należy utworzyć równania warunków, a następnie zastosować procedurę uzgadniania.

Z uwagi na dużą różnorodność problematyki nie jest możliwe stworzenie jednolitego, uniwersalnego sformułowania matematycznego dla odwrotnych zadań granicznych. Znaczna część zagadnień musi być tu rozpatrywana indywidualnie.

Jako przykład rozwiązania zadania granicznego przeanalizowano problem identyfikacji nieustalonego pola temperatury oraz nieustalonego strumienia ciepła na brzegu ciała. Zakłada się przy tym, że znane są przebiegi temperatury w wybranych punktach ciała usytuowanych w jego wnętrzu lub na brzegu. Warunek początkowy może (lecz nie musi) pozostać nieznany. Dla tak postawionego problemu rzeczywiste warunki brzegowe są sprowadzone do warunku brzegowego drugiego rodzaju. Pole temperatury w ciele jest więc wymuszane przez nieznany strumień ciepła $q(\tau,\bar{r})$ na brzegu ciała. Strumień $q(\tau,\bar{r})$ jest funkcją czasu oraz współrzędnych geometrycznych. Przy takich założeniach dyskretny model matematyczny pola temperatury w węzłach podziału różnicowego ciała (przy zastosowaniu na przykład metody bilansów elementarnych) można zapisać w postaci następującego równania macierzowego:

$$\mathbf{T}_{k+1} = \mathbf{P}\,\mathbf{T}_k + \mathbf{R}\,\mathbf{q}_{k+1} + \mathbf{c}_k \tag{3.55}$$

gdzie **P** i **R** są macierzami znanych współczynników, a wektor **c** zawiera te wielkości, które nie podlegają identyfikacji. Zakładamy, że w obszarze rozwiązania wyróżniono N węzłów różnicowych oraz N_q odcinków brzegu z nieznanym warunkiem brzegowym $q(\tau)$. Odnośnie do punktów pomiaru temperatury zakładamy jedynie, że pokrywają się one z węzłami podziału różnicowego ciała. W każdej chwili czasu k dokonuje się pomiaru temperatury w s punktach. Pomiędzy odpowiedzią temperaturową $\mathbf{x}_k(\tau)$ a temperaturą w węzłach podziału różnicowego obowiązuje więc zależność (3.45).

Mnożąc równanie (3.55) przez macierz wskaźnikową **H** uzyskuje się równanie określające wektor odpowiedzi temperaturowej we wszystkich punktach pomiarowych:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{H}\,\mathbf{T}_{k+1} = \mathbf{HPT}_k + \mathbf{HRq}_{k+1} + \mathbf{Hc}_k \tag{3.56}$$

Równania (3.56) zapisane dla kolejnych chwil czasu k=0,1,...,p zawierają niewiadome temperatury węzłowe $\mathbf{T}_k$, oraz strumienie ciepła na brzegu ciała $\mathbf{q}_k$. Każde z równań (3.56) zawiera więc $N+N_q$ niewiadomych wielkości. Celowe jest zatem wyeliminowanie części z nich: na przykład wszystkich temperatur węzłowych z wyjątkiem początkowego rozkładu temperatury $\mathbf{T}_0$. Podstawiając $\mathbf{y}^0 = \mathbf{T}_0$ otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= \mathbf{HPy}^0 + \mathbf{HRq}_1 + \mathbf{Hc}_0 \\
\mathbf{x}_2 &= \mathbf{HPPy}^0 + \mathbf{Hq}_2 + \mathbf{HRq}_1 + \mathbf{Hc}_1 + \mathbf{HPc}_0 \\
&\cdots \\
\mathbf{x}_p &= \mathbf{HP}^{(p)}\mathbf{y}^0 + \mathbf{H}\sum_{i=1}^{p-1}\left(\mathbf{R}^{(i)}\mathbf{q}_{p-i-1} + \mathbf{P}^{(i)}\mathbf{c}_{p-i-1}\right)
\end{aligned} \tag{3.57}$$

gdzie $\mathbf{P}^{(i)}$ i $\mathbf{R}^{(i)}$ oznacza i-tą potęgę macierzy **P** i **R**, a p oznacza liczbę kroków czasu.

Równanie macierzowe (3.57) jest punktem wyjścia do utworzenia równania warunków w postaci (3.12). Wektor wielkości mierzonych **x** o długości $p \cdot s$ oraz wektor wielkości niewiadomych **y** o długości $(N+pN_q)$ dane są zależnościami:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \left[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p\right]^T \\
\mathbf{y} &= \left[\mathbf{y}^0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_p\right]^T
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Macierz **A** jest macierzą jednostkową o rozmiarach $(p \cdot s)(p \cdot s)$, a **B** macierzą blokową o rozmiarach $(p \cdot s)(N+pN_q)$. Postać macierzy **B** jest zazwyczaj bardzo złożona (szczególnie dla zagadnień wielowymiarowych) choć w strukturze macierzy występują pewne prawidłowości.

Opierając się na równaniu (3.57) oraz wykorzystując rozszerzony algorytm rachunku wyrównawczego przeprowadzono szereg obliczeń testujących zaproponowaną metodę. Zrezygnowano ze stosowania wersji klasycznej algorytmu, gdyż (jak wykazały obliczenia) uzyskuje się zazwyczaj gorsze wyniki aniżeli dla algorytmu rozszerzonego.

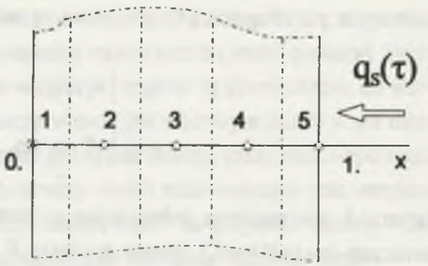
W dalszej kolejności zostaną przedstawione rezultaty rozwiązania dwóch odwrotnych zagadnień granicznych. Pierwsze z analizowanych zagadnień zostało zaproponowane przez Becka w pracy [3] jako swoisty test efektywności metod rozwiązywania granicznych zadań odwrotnych. Problem polega na identyfikacji nieustalonego strumienia ciepła na jednym z brzegów płyty jednowymiarowej (rysunek 3.2). W rzeczywistości, tzn. w zagadnieniu prostym, jeden z brzegów jest zaizolowany, a na drugim brzegu strumień ciepła zmienia się w czasie zgodnie z zależnością:

$$q_s(\mathrm{Fo}) = \begin{cases} \mathrm{Fo} & \text{, dla } 0. < \mathrm{Fo} < 0.6 \\ 1.2 - \mathrm{Fo} & \text{, dla } 0.6 < \mathrm{Fo} < 1.2 \end{cases} \tag{3.59}$$

Zadanie odwrotne polega na wyznaczeniu przebiegu strumienia ciepła q_s(Fo) na podstawie pomiaru temperatury na zaizolowanym brzegu płyty (węzeł nr 1). Początkowy rozkład temperatury w płycie jest znany i wynosi $\mathbf{T}_0$=0. Krok całkowania podług czasu ΔFo=0.1.

Tak postawiony problem stawia bardzo duże wymagania przed metodą zastosowaną do jego rozwiązania. Przyczynia się do tego nieliniowy przebieg strumienia ciepła oraz duże opóźnienie sygnału temperaturowego w punkcie pomiarowym. Odpowiedź temperaturowa jest symulowana na podstawie rozwiązania zagadnienia prostego dla problemu sformułowanego dyskretnie.

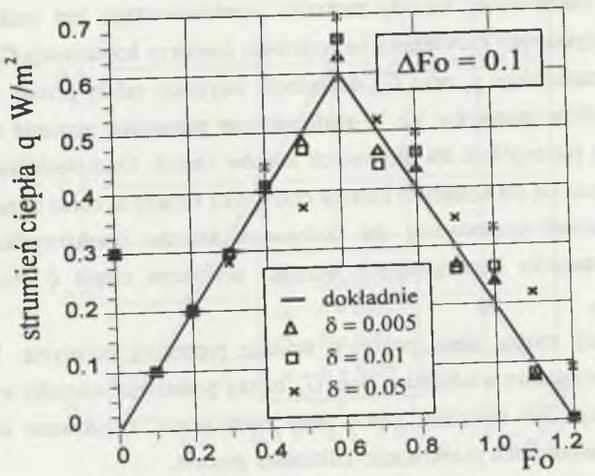
Podczas testowania metod stochastycznych odrębny problem stanowi sensowny dobór zakłócenia δ i błędów wyników pomiarów V_{ii}. Wielkości te mają w zasadzie podobne znaczenie, lecz muszą być wykorzystane równocześnie do symulacji zaburzenia odpowiedzi temperaturowej. (W metodach deterministycznych symulację zaburzenia odpowiedzi temperaturowej wystarczy oprzeć wyłącznie na zakłóceniu δ). W tej sytuacji zakłócenie δ można traktować jako różnicę pomiędzy wartością dokładną a mierzoną, natomiast błąd pomiaru V_{ii} jako możliwy zakres rozrzutu wyniku pomiaru. Tak więc zakłócenie δ nie powinno być większe aniżeli błąd pomiaru V_{ii}, pomijamy bowiem zgodnie z przyjętymi założeniami statystycznymi możliwość wystąpienia błędów systematycznych. W dalszym ciągu przyjęto zasadę, że całkowite zaburzenie odpowiedzi temperaturowej pochodzi w połowie od zakłócenia δ oraz w połowie od błędu V_{ii}. Omawiany problem nie występuje oczywiście w zagadnieniach praktycznych, gdzie szacuje się tylko błąd średni.



Rys. 3.2. *Geometria zadania granicznego*
Fig. 3.2. *Geometry of the boundary problem*

Na rysunku 3.3 oraz w tablicy 3.2 przedstawiono wyniki estymacji strumienia ciepła dla trzech wartości zakłócenia δ. Linia ciągła na rysunku oznacza dokładny przebieg strumienia ciepła $q_s(\tau)$. W tablicy 3.2 przedstawiono także obliczone wartości odchylenia standardowego $S_{\bar{q}}$ estymaty $\bar{q}$. Początkowe oszacowanie strumienia q przyjęto stałe dla całego przedziału czasu (q^0=0.3), podobnie jak w przypadku elementów macierzy kowariancji G_0 (G_{0ii}=0.3). Przyjęte oszacowanie obejmuje więc cały przedział zmienności strumienia ciepła.

Uzyskane wyniki estymacji można uznać za zadowalające, szczególnie dla zakłócenia δ = 0.005 i 0.01. Charakterystyczne jest pogarszanie się jakości estymacji dla ostatnich kroków czasu. Jest to spowodowane tym, że wartości poszukiwanego strumienia dla kolejnych kroków czasu są wyznaczane na podstawie coraz mniej pewnego oszacowania pola temperatury. Taki właśnie przebieg estymacji występuje wszędzie tam, gdzie estymowane wielkości dotyczące kolejnych kroków czasu są od siebie niezależne.



Rys. 3.3. *Estymacja strumienia ciepła na powierzchni płyty*
Fig. 3.3. *Estimation of the heat flux on the surface of the plane wall*

Tablica 3.2

Wyniki estymacji strumienia ciepła na powierzchni płyty
(jeden punkt pomiarowy: nr 1)

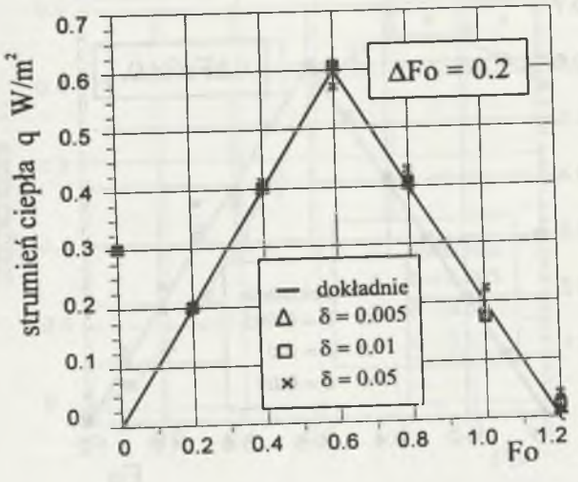
Fo	Strumień ciepła q, $\bar{q}$, odchylenie standardowe $S_{\bar{q}}$					
	Wartość dokładna q(Fo)	δ = 0.005		δ = 0.01		δ = 0.05	
		$\bar{q}$(Fo)	$S_{\bar{q}}$	$\bar{q}$(Fo)	$S_{\bar{q}}$	$\bar{q}$(Fo)	$S_{\bar{q}}$
0.1	.1	.100	.0002	.100	.0005	.101	.0025
0.2	.2	.201	.0011	.201	.0023	.206	.0113
0.3	.3	.298	.0032	.296	.0065	.281	.0321
0.4	.4	.405	.0070	.409	.0141	.442	.0684
0.5	.5	.485	.0129	.470	.0257	.373	.1173
0.6	.6	.630	.0209	.658	.0416	.696	.1673
0.7	.5	.467	.0311	.442	.0608	.518	.2062
0.8	.4	.435	.0421	.462	.0811	.497	.2308
0.9	.3	.270	.0528	.261	.0996	.349	.2455
1.0	.2	.241	.0623	.263	.1148	.332	.2544
1.1	.1	.076	.0701	.081	.1262	.218	.2601
1.2	.0	.004	.0758	.002	.1342	.089	.2634

Dużą zaletą zastosowanej metody rachunku wyrównawczego jest możliwość oceny wiarygodności uzyskanego rozwiązania na podstawie macierzy kowariancji $\mathbf{G}_y$. Dla danego oszacowania początkowego $\mathbf{y}_0$ oraz G_{y0} dokładność estymacji zależy przede wszystkim od dokładności wyników pomiarów V_{ii}. W analizowanym przypadku pewność estymacji jest stosunkowo duża (szczególnie dla pierwszych kroków czasu). Odchylenie standardowe $S_{\bar{q}}$ estymaty $\bar{q}$ zwiększa się dla kolejnych kroków czasu, lecz zmiany są coraz to mniejsze. Duża względna niepewność oszacowania dla końcowych kroków czasu wynika głównie z niekorzystnego stosunku bezwzględnych wartości strumienia ciepła $\bar{q}$ oraz odchylenia standardowego $S_{\bar{q}}$.

Jakość estymacji można nieco poprawić stosując procedurę iteracyjną. W kolejnych iteracjach jako początkowe wielkości $\mathbf{y}_0$ oraz G_{y0} należy podstawiać wartości wyznaczone w poprzedniej iteracji. Jak wykazały jednak testy numeryczne, uzyskiwane w ten sposób zwiększenie dokładności nie przekraczało kilkunastu procent.

Na dokładność estymacji wpływ mają różne czynniki. Dla analizowanego przykładu oprócz dokładności pomiarów i początkowego oszacowania znaczny wpływ na jakość estymacji wywiera położenie i liczba punktów pomiarowych. Także wielkość kroku próbkowania ΔFo ma wpływ na przebieg estymacji, przy czym poprawę wyników uzyskiwano dla kroków czasu większych od analizowanej wartości ΔFo=0.1.

Na rysunku 3.4 oraz w tablicy 3.3 przedstawiono wyniki estymacji strumienia ciepła uzyskane dla kroku ΔFo = 0.2. Widoczne jest pewne zwiększenie dokładności estymacji w stosunku do kroku próbkowania ΔFo=0.1. Poprawa dokładności estymacji wynika tu z dwóch przesłanek. Dla większych wartości kroku ΔFo zmiany mierzonej temperatury są większe, co zmniejsza złe uwarunkowanie operacji różniczkowania temperatury względem czasu. Ponadto, do analizy tego samego przedziału czasu wymagana jest mniejsza liczba kroków próbkowania, co również przyczynia się do osiągnięcia większej końcowej jakości estymacji. Należy tu jednak podkreślić, że przyjęcie nadmiernie dużych wartości kroku ΔFo może spowodować utratę informacji o rzeczywistych zmianach mierzonej temperatury i przyczynić się do zafałszowania przebiegu estymowanych wielkości. Podobną prawidłowość obserwuje się także w przypadku innych metod jak na przykład metody dyskretnej transformacji spektralnej opisanej w rozdziale 5.

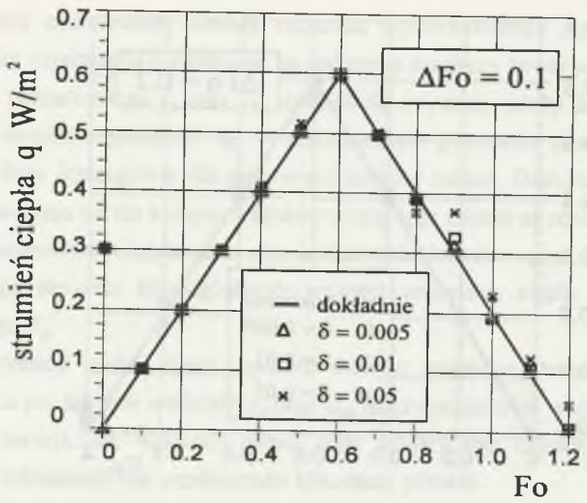


Rys. 3.4. *Estymacja strumienia ciepła na powierzchni płyty*
Fig. 3.4. *Estimation of the heat flux on the surface of the plane wall*

Tablica 3.3

Wyniki estymacji strumienia ciepła na powierzchni płyty
(1 punkt pomiarowy: nr 1; ΔFo = 0.2)

Fo	Strumień ciepła q, $\bar{q}$, odchylenie standardowe $S_{\bar{q}}$						
	Wartość dokładna q(Fo)	δ = 0.005		δ = 0.01		δ = 0.05	
		$\bar{q}$(Fo)	$S_{\bar{q}}$	$\bar{q}$(Fo)	$S_{\bar{q}}$	$\bar{q}$(Fo)	$S_{\bar{q}}$
0.2	.2	.200	.0005	.200	.0010	.202	.0049
0.4	.4	.401	.0019	.402	.0039	.412	.0198
0.6	.6	.597	.0051	.594	.0102	.574	.0491
0.8	.4	.406	.0094	.412	.0187	.441	.0854
1.0	.2	.184	.0135	.168	.0269	.221	.1153
1.2	.0	.025	.0167	.050	.0331	.083	.1409



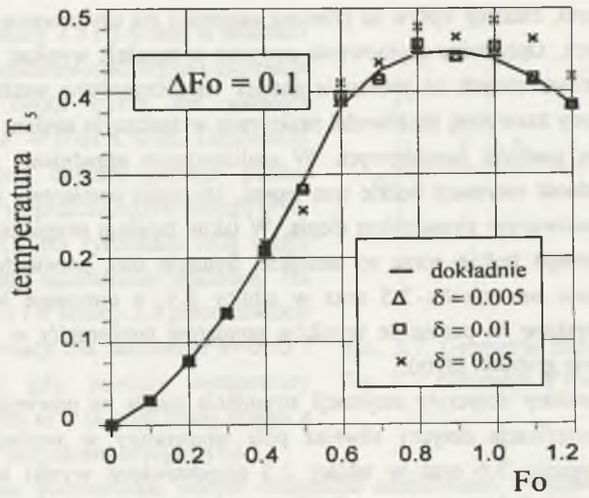
Rys. 3.5. *Estymacja strumienia ciepła na powierzchni płyty*

Fig. 3.5. *Estimation of the heat flux on the surface of the plane wall*

Tablica 3.4

Wyniki estymacji strumienia ciepła na powierzchni płyty (jeden punkt pomiarowy: nr 3)

Fo	Strumień ciepła q, $\bar{q}$, odchylenie standardowe S_q						
	Wartość dokładna q(Fo)	δ = 0.005		δ = 0.01		δ = 0.05	
		$\bar{q}$(Fo)	S_q	$\bar{q}$(Fo)	S_q	$\bar{q}$(Fo)	S_q
0.1	.1	.001	.0002	.100	.0004	.102	.0018
0.2	.2	.200	.0007	.200	.0014	.201	.0071
0.3	.3	.300	.0018	.300	.0036	.299	.0178
0.4	.4	.401	.0035	.402	.0070	.412	.0343
0.5	.5	.502	.0058	.504	.0116	.517	.0572
0.6	.6	.600	.0088	.599	.0176	.593	.0843
0.7	.5	.500	.0121	.499	.0241	.501	.1115
0.8	.4	.395	.0153	.391	.0302	.368	.1332
0.9	.3	.314	.0179	.327	.0353	.358	.1493
1.0	.2	.195	.0200	.193	.0392	.261	.1607
1.1	.1	.104	.0214	.107	.0431	.149	.1684
1.2	.0	.004	.0223	.009	.0440	.058	.1718



Rys. 3.6. *Estymacja temperatury na powierzchni płyty*

Fig. 3.6. *Estimation of the temperature on the surface of the plane wall*

Tablica 3.5

Wyniki estymacji temperatury na powierzchni płyty (jeden punkt pomiarowy: nr 1)

Fo	Temperatura T, $\bar{T}$, odchylenie standardowe S_T						
	Wartość dokładna T_5(Fo)	δ = 0.005		δ = 0.01		δ = 0.05	
		$\bar{T}_5$(Fo)	S_T	$\bar{T}_5$(Fo)	S_T	$\bar{T}_5$(Fo)	S_T
0.1	.029	.029	.0001	.029	.0001	.029	.0007
0.2	.076	.076	.0003	.077	.0006	.078	.0032
0.3	.136	.136	.0008	.135	.0017	.132	.0084
0.4	.207	.208	.0018	.209	.0035	.218	.0172
0.5	.289	.285	.0031	.282	.0062	.257	.0286
0.6	.382	.388	.0049	.395	.0098	.411	.0405
0.7	.425	.419	.0071	.414	.0141	.435	.0503
0.8	.445	.452	.0094	.457	.0183	.477	.0572
0.9	.448	.443	.0117	.441	.0222	.465	.0619
1.0	.438	.447	.0136	.454	.0253	.485	.0652
1.1	.417	.414	.0151	.416	.0277	.463	.0674
1.2	.385	.385	.0162	.383	.0293	.418	.0687

Jak już wspomniano, znaczny wpływ na przebieg estymacji ma usytuowanie i położenie punktów pomiarowych. Optymalne usytuowanie powinno w zasadzie wynikać z rozważań teoretycznych przeprowadzonych na podstawie analizy współczynników wrażliwości [3]. Z drugiej jednak strony zazwyczaj możliwości praktyczne w znacznym stopniu ograniczają swobodną lokalizację punktów pomiarowych. W analizowanym zagadnieniu jest sprawą oczywistą, że dokładność estymacji będzie tym lepsza, im punkt pomiarowy znajdzie się bliżej brzegu z poszukiwanym strumieniem ciepła. W takim bowiem przypadku tłumienie sygnału temperaturowego będzie coraz to mniejsze. Sytuację taką potwierdzają wyniki obliczeń przedstawione na rysunku 3.5 oraz w tablicy 3.4, a dotyczące identyfikacji strumienia ciepła uzyskane na podstawie wyników pomiarów temperatury w węźle nr 3 (położonym w połowie grubości płyty).

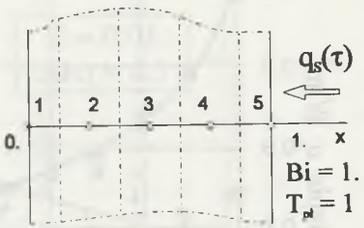
Przedstawione rezultaty dotyczyły estymacji strumienia ciepła na powierzchni płyty. Przeprowadzona identyfikacja dotyczy również pola temperatury w węzłach podziału różnicowego. Na rysunku 3.6 oraz w tablicy 3.5 przedstawiono wyniki identyfikacji temperatury na powierzchni płyty oparte na pomiarze temperatury przeprowadzonym w węźle nr 1 (dla kroku próbkowania $\Delta Fo = 0.1$). Uzyskane rezultaty dowodzą, że dokładność estymacji temperatury jest zdecydowanie większa aniżeli dokładność estymacji strumienia ciepła (rysunek 3.3 i tablica 3.2). Fakt ten ma swoje uzasadnienie matematyczne. Strumień ciepła w danym punkcie ciała jest proporcjonalny do gradientu temperatury w tym punkcie. Operacja różniczkowania jako słabo uwarunkowana, a przeprowadzona na niedokładnych wartościach, zwiększa niedokładność wyniku, jakim jest obliczony strumień ciepła.

Kolejny przykład dotyczy identyfikacji pola temperatury i strumienia ciepła na powierzchni płyty jednowymiarowej z warunkiem brzegowym trzeciego rodzaju (drugi brzeg płyty zaizolowany). Podział różnicowy obszaru przedstawiono na rysunku 3.7. Tym razem przeanalizowano dokładniej wpływ początkowego oszacowania identyfikowanych wielkości na dokładność estymacji.

Odpowiedź temperaturowa jest zakłócana błędem o wartości maksymalnej $\delta = 0.005, 0.01$ i 0.05. Krok próbkowania wynosi $\Delta Fo = 0.1$. Początkowy rozkład temperatury w płycie jest wyrównany i wynosi $T_0 = 0$. Warunek brzegowy trzeciego rodzaju jest scharakteryzowany liczbą Biota $Bi = 1$ oraz temperaturą płynu $T_{pl} = 1$. Przy takich założeniach strumień ciepła na brzegu płyty zmienia się od wartości 1 do 0 (dla $Fo \to \infty$).

Oszacowana wartość początkowa nieznanego strumienia ciepła jest stała i wynosi $q_0=y_0=0.5$. Szczegółowej analizie poddano natomiast wpływ oszacowania macierzy kowariancji wielkości niewiadomych G_{y0}. Obliczenia przeprowadzono dla następujących wartości elementów $G_{y0}=(S_{q0})^2$: $S_{q0}\to\infty$ (brak jakiejkolwiek informacji o przedziale zmienności strumienia ciepła), $S_{q0} = 0.5$, $S_{q0} = 0.25$, $S_{q0} = 0.05$ (zdecydowanie przeszacowana ocena możliwego przedziału zmienności strumienia ciepła).

Na rysunkach 3.8 i 3.9 oraz w tablicach 3.6 i 3.7 przedstawiono wyniki estymacji strumienia ciepła $q_s(Fo)$ dla wartości zakłócenia $\delta = 0.01$ i 0.05. Odpowiedź temperaturowa dotyczy jednego punktu położonego na przeciwległym brzegu płyty (węzeł nr 1). Na rysunkach linią ciągłą przedstawiono rozwiązanie dokładne. Na rysunku 3.10 i w tablicy 3.8 przedstawiono wyniki estymacji dla zakłócenia $\delta=0.05$ i w sytuacji gdy pomiary temperatury dotyczą węzła nr 3 (a więc bliżej brzegu z nieznanym warunkiem brzegowym).

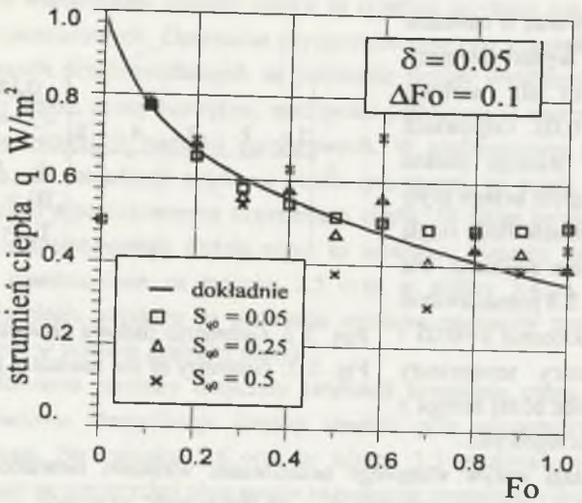


Rys. 3.7. *Geometria zadania granicznego*
Fig. 3.7. *Geometry of the boundary problem*

Obliczenia potwierdzają wpływ wstępnego oszacowania wielkości niewiadomych (a szczególnie elementów macierzy kowariancji G_{y0}) na dokładność estymacji. Zbyt duże wartości S_{y0} powodują, że estymaty $\bar{y}$ są bardzo niepewne, bowiem charakteryzują się dużymi wartościami odchylenia standardowego $S_{\bar{y}}$ (tablice 3.6, 3.7 i 3.8). Dla wartości $S_{q0}=0.5$, a więc takiej, która obejmuje cały fizykalnie możliwy (dla liczby Biota $Bi=1$) zakres zmienności identyfikowanego strumienia ciepła, uzyskano zadowalającą dokładność estymacji (zwłaszcza w pierwszych pięciu krokach czasu). Dokładność estymacji zwiększa się oczywiście wraz ze zmniejszaniem wartości oszacowania S_{y0}. Nieuzasadnione przyjęcie zbyt małych wartości S_{y0} (a więc przeszacowanie oceny początkowej) może jednak prowadzić do niewłaściwych rezultatów. W efekcie uzyskuje się rozwiązanie o dużej wiarygodności (małe wartości $S_{\bar{y}}$), lecz zbieżne do niewłaściwego rozwiązania. Sytuację taką przedstawiono na prezentowanych wykresach dla $S_{y0}=0.05$ (dla ostatnich kroków czasu rozwiązanie odchyla się wyraźnie od wartości dokładnych).

Wartość zakłócenia δ wpływa na wyniki obliczeń estymaty $\bar{y}$, choć nie ma oczywiście wpływu na zmianę macierzy kowariancji $G_{\bar{y}}$. Tak więc różnica pomiędzy estymatą $\bar{y}$ a rozwiązaniem dokładnym (symulowanym) tylko częściowo określa dokładność estymacji. Miarą dokładności są także elementy macierzy kowariancji $G_{\bar{y}}$ estymaty $\bar{y}$. Rozwiązanie $\bar{y}_i$ może się bowiem z równym prawdopodobieństwem znajdować w przedziale $\bar{y}_i$-$S_{\bar{y}i}$: $\bar{y}_i$+$S_{\bar{y}i}$.

Podobnie jak w poprzednich przykładach dokładność estymacji silnie zależy od usytuowania punktów pomiarowych. Przeniesienie punktu pomiarowego z węzła nr 1 do węzła nr 3 zwiększa wyraźnie dokładność estymacji (rysunek 3.10 i tablica 3.8)

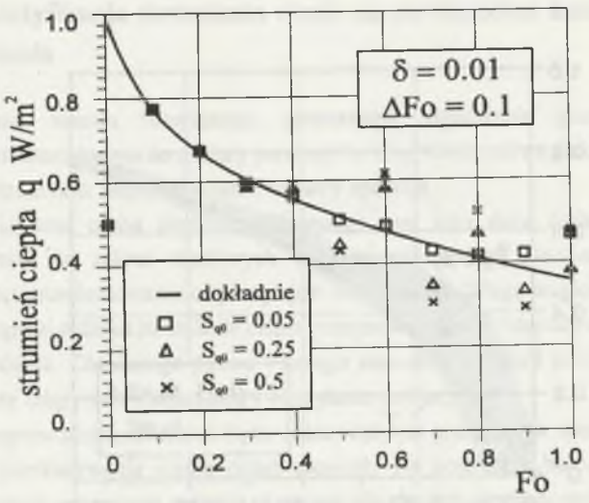


Rys. 3.8. *Estymacja strumienia ciepła na powierzchni płyty*
Fig. 3.8. *Estimation of the heat flux on the surface of the plane wall*

Tablica 3.6

Wyniki estymacji strumienia ciepła na powierzchni płyty
(zakłócenie δ=0.01, jeden punkt pomiarowy: nr 1)

Fo	Strumień ciepła q, $\bar{q}$, odchylenie standardowe S_q						
	Wartość dokładna q(Fo)	$S_{\varphi 0} = 10.^8$		$S_{\varphi 0} = 0.25$		$S_{\varphi 0} = 0.05$	
		$\bar{q}$(Fo)	S_q	$\bar{q}$(Fo)	S_q	$\bar{q}$(Fo)	S_q
0.1	.772	.774	13.6	.774	.0038	.773	.0038
0.2	.670	.676	18.0	.675	.0136	.670	.0123
0.3	.605	.586	17.3	.588	.0306	.596	.0230
0.4	.556	.594	14.9	.585	.0514	.560	.0305
0.5	.514	.424	16.3	.449	.0721	.506	.0345
0.6	.477	.633	15.1	.584	.0902	.490	.0368
0.7	.443	.279	26.9	.350	.1049	.430	.0382
0.8	.412	.556	19.7	.474	.1165	.418	.0393
0.9	.383	.260	20.1	.336	.1260	.420	.0415
1.0	.357	.497	18.8	.394	.1471	.466	.0465

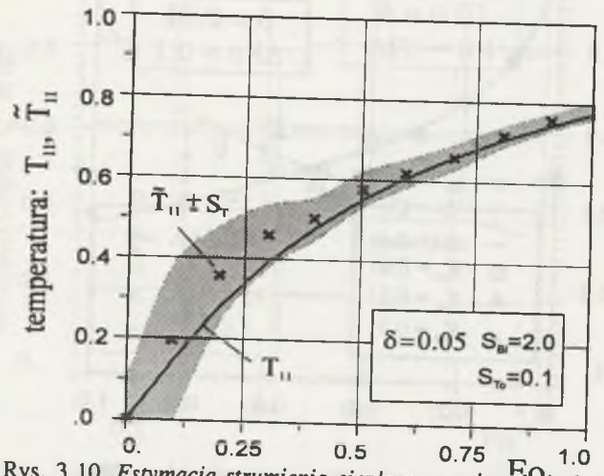


Rys. 3.9. *Estymacja strumienia ciepła na powierzchni płyty*
Fig. 3.9. *Estimation of the heat flux on the surface of the plane wall*

Tablica 3.7

Wyniki estymacji strumienia ciepła na powierzchni płyty
(zakłócenie δ=0.05, jeden punkt pomiarowy: nr 1)

Fo	Strumień ciepła q, $\bar{q}$, odchylenie standardowe S_q						
	Wartość dokładna q(Fo)	$S_{\varphi 0} = 10.^8$		$S_{\varphi 0} = 0.25$		$S_{\varphi 0} = 0.05$	
		$\bar{q}$(Fo)	S_q	$\bar{q}$(Fo)	S_q	$\bar{q}$(Fo)	S_q
0.1	.772	.782	13.6	.782	.0199	.774	.0171
0.2	.670	.699	18.0	.688	.0614	.655	.0336
0.3	.605	.512	17.3	.560	.1150	.580	.0408
0.4	.556	.747	14.9	.579	.1527	.544	.0432
0.5	.514	.065	16.3	.475	.1726	.514	.0445
0.6	.477	1.256	15.1	.551	.1840	.502	.0455
0.7	.443	-.371	26.9	.409	.1913	.487	.0465
0.8	.412	1.135	19.7	.443	.1968	.487	.0477
0.9	.383	-.230	20.1	.434	.2080	.489	.0488
1.0	.357	1.054	18.8	.459	.2330	.497	.0497



Rys. 3.10. *Estymacja strumienia ciepła na powierzchni płyty*
Fig. 3.10. *Estimation of the heat flux on the surface of the plane wall*

Tablica 3.8

Wyniki estymacji strumienia ciepła na powierzchni płyty (zakłócenie $\delta=0.01$, dwa punkty pomiarowe: nr 1 i 3)

Fo	Strumień ciepła q, $\bar{q}$, odchylenie standardowe S_q						
	Wartość dokładna q(Fo)	$S_{q0} = 10.^8$		$S_{q0} = 0.25$		$S_{q0} = 0.05$	
		$\bar{q}$(Fo)	S_q	$\bar{q}$(Fo)	S_q	$\bar{q}$(Fo)	S_q
0.1	.772	.782	3.74	.774	.0027	.724	.0027
0.2	.670	.694	3.16	.668	.0081	.668	.0078
0.3	.605	.553	3.18	.605	.0163	.605	.0141
0.4	.556	.642	2.83	.562	.0229	.561	.0196
0.5	.514	.319	2.44	.521	.0299	.519	.0236
0.6	.477	.758	4.89	.469	.0364	.471	.0266
0.7	.443	.223	2.83	.441	.0423	.436	.0288
0.8	.412	.601	4.84	.393	.0476	.403	.0306
0.9	.383	.232	5.65	.410	.0525	.403	.0320
1.0	.357	.564	2.44	.347	.0577	.408	.0362

3.2.3. Identyfikacja strumienia ciepła na powierzchni komory spalania

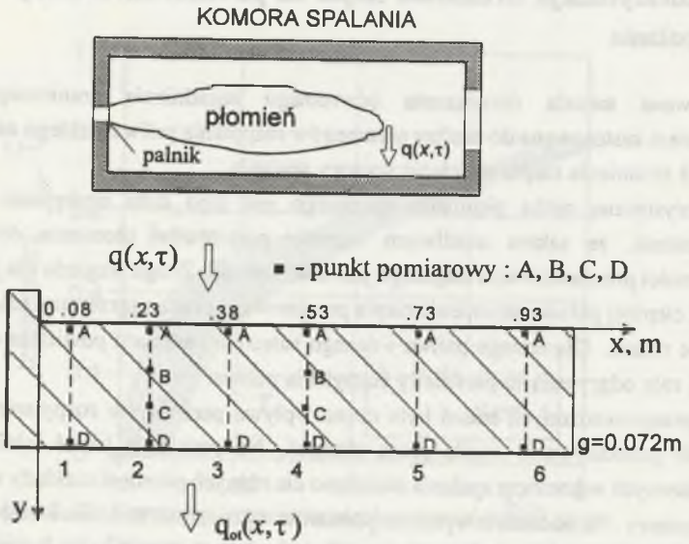
Proponowana metoda rozwiązania odwrotnego zagadnienia granicznego została z powodzeniem zastosowana do analizy parametrów rozpylania paliwa ciekłego na podstawie identyfikacji strumienia ciepła w ścianie komory spalania.

Charakterystyczną cechą płomienia olejowego jest jego duża emisyjność. Praktyka pokazuje jednak, że zakres możliwych wartości parametrów płomienia decydujących o intensywności promieniowania cieplnego jest dość szeroki. Z tego względu dla jednakowej wydajności cieplnej palnika strumienie ciepła przejmowane przez nagrzewany materiał mogą się znacznie różnić. Dla danego paliwa i danego stosunku nadmiaru powietrza do spalania decydującą rolę odgrywają tu parametry rozpylania paliwa.

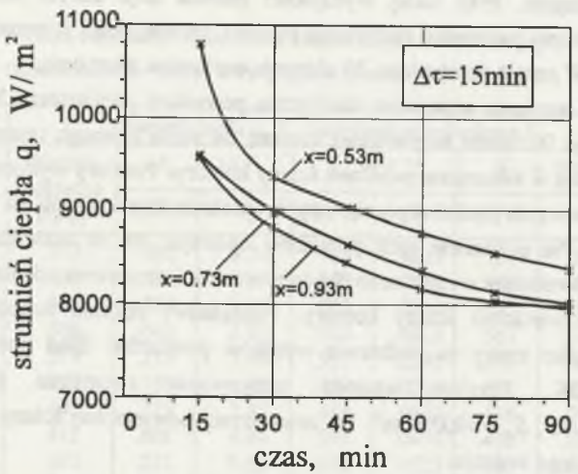
Celem przeprowadzonych badań była ocena wpływu parametrów rozpylania paliwa na efektywność przekazywania ciepła przez płomień. Na podstawie badań laboratoryjnych przeprowadzonych w komorze spalania określono dla różnych płomieni rozkłady temperatury w ścianie komory. Na podstawie wyników pomiarów wyznaczono strumienie ciepła w ścianie komory. Identyfikację strumieni ciepła przeprowadzono rozwiązując zagadnienie odwrotne za pomocą zaprezentowanej metody estymacji statystycznie optymalnej.

W laboratoryjnej komorze spalania o wydajności cieplnej około 50 kW spalano olej napędowy w palniku gazodynamicznym, w którym paliwo ciekłe rozpylane jest za pomocą strumienia powietrza. Przy stałej wydajności palnika oraz stałym stosunku nadmiaru powietrza zmieniano parametry rozpylania poprzez zmianę ilości i temperatury powietrza rozpylającego. W sumie przebadano 20 różnych wariantów płomienia.

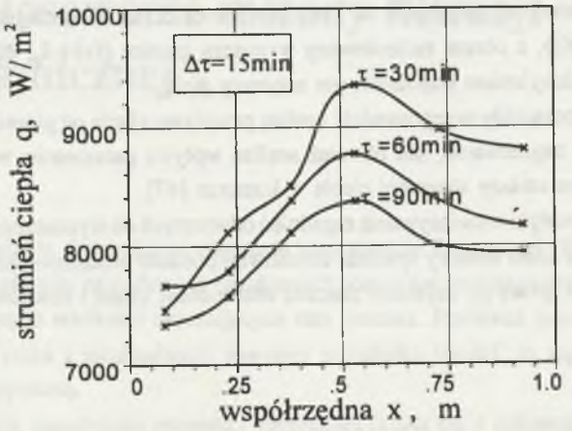
Dla każdego wariantu stosowano identyczną procedurę pomiarową. W czasie jednego cyklu trwającego 90 minut nagrzewano komorę od stanu zimnego rejestrując co $\Delta\tau=15$ minut temperaturę w kilkunastu punktach ściany komory. Pomiary wykonywano za pomocą termopar (usytuowanie punktów pomiarowych w ścianie komory spalania przedstawiono na rysunku 3.11). Na podstawie tych pomiarów opierając się na rozwiązaniu granicznego zagadnienia odwrotnego wyznaczono średnie wartości strumienia ciepła wnikającego do wewnętrznej powierzchni ściany komory. Początkowy rozkład temperatury w ścianie przyjmowano jako znany na podstawie wyników pomiarów. Błąd pomiaru temperatury wynosił $V_{ii}=3$K. Przyjęte wstępne oszacowania strumienia ciepła wynosiły: $q_0(\tau)=10000$W/m^2, $S_{q0}=5000$W/m^2. Na zewnętrznej powierzchni ściany przyjęto warunek brzegowy trzeciego rodzaju.



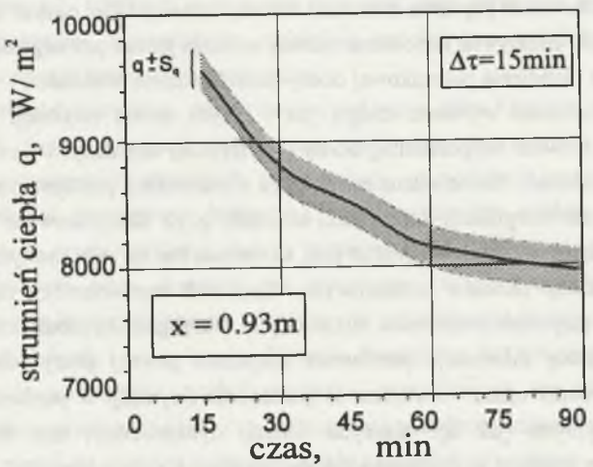
Rys. 3.11. *Usytuowanie punktów pomiarowych w ścianie komory spalania*
Fig. 3.11. *Location of sensors in the wall of a combustion chamber*



Rys. 3.12. *Rozkład strumienia ciepła na ścianie komory*
Fig. 3.12. *Distribution of the heat flux on the wall of a chamber*



Rys. 3.13. *Rozkład strumienia ciepła na ścianie komory*
Fig. 3.13. *Distribution of the heat flux on the wall of a chamber*



Rys. 3.14. *Rozkład strumienia ciepła na ścianie komory*
Fig. 3.14. *Distribution of the heat flux on the wall of a chamber*

Na rysunkach 3.12 i 3.13 przedstawiono typowe rozkłady identyfikowanego strumienia ciepła w funkcji czasu dla różnych punktów położonych na ścianie komory. Uzyskano stosunkowo dużą dokładność estymacji, co ilustruje rysunek 3.14. Linia ciągła przedstawia obliczoną estymatę $\bar{q}(\tau)$, a obszar zacieniowany wyznacza granice $\bar{q}(\tau)+S_{\bar{q}}$, $\bar{q}(\tau)-S_{\bar{q}}$, gdzie $S_{\bar{q}}$ jest obliczonym odchyleniem standardowym estymaty $\bar{q}(\tau)$.

Uzyskane wyniki pozwoliły przeprowadzić analizę przepływu ciepła od płomienia do ścian komory w czasie jej nagrzewania, jak również analizę wpływu parametrów rozpylania na jakościowe i ilościowe zmiany strumieni ciepła w komorze [47].

Wykorzystanie metodyki rozwiązywania zagadnień odwrotnych do wyznaczenia strumienia ciepła na powierzchni ścian komory spalania umożliwiło ponadto przeprowadzenie badań w stanach nieustalonych, przez co uzyskano znaczną oszczędność czasu i kosztów badań.

3.3. Wnioski

Z przeprowadzonych analiz wynika, że metoda estymacji statystycznie optymalnej, jaką jest rachunek wyrównawczy, stanowi skuteczne narzędzie rozwiązywania odwrotnych zagadnień granicznych przewodzenia ciepła. Przeprowadzone testy numeryczne stawiające duże wymagania odnośnie do stabilności metody wykazały jej zadowalającą dokładność, w przypadku jednak rozszerzonej wersji metody. Wykorzystanie wiedzy *a priori* o estymowanych wielkościach poprawia stabilność metody i zmniejsza jej czułość na zakłócenia danych wejściowych. Efektywne stosowanie metody wymaga jednak pewnego doświadczenia w celu właściwego określenia początkowej oceny poszukiwanych wielkości.

Istotną zaletą rachunku wyrównawczego, jak i innych metod estymacji statystycznie optymalnej jest możliwość bezpośredniej oceny statystycznej uzyskanych wyników, a tym samym ich wiarygodności. Jest to ważna cecha, gdyż w warunkach praktycznych nie istnieje zazwyczaj możliwość weryfikacji dokładności obliczeń, gdyż identyfikowane wielkości są najczęściej niedostępne pomiarowo. Ważne jest, że metoda nie narzuca żadnych ograniczeń dotyczących lokalizacji punktów pomiarowych. Rachunek wyrównawczy może być też stosowany do rozwiązywania problemów nieliniowych. Dla zagadnień nieustalonych analizie poddaje się zazwyczaj informacje pomiarowe dotyczące pewnej grupy lub wszystkich rozpatrywanych kroków czasu. Zwiększa to dokładność estymacji w porównaniu z algorytmami sekwencyjnymi (jak np. algorytm filtracji dynamicznej), lecz dla zagadnień wielowymiarowych znacznie komplikuje strukturę algorytmu obliczeniowego.

Uniwersalny charakter metody sprawia, że zakres jej zastosowań nie ogranicza się do rozwiązywania granicznych zagadnień odwrotnych.

4. Zastosowanie metody filtracji dynamicznej

Ogólne zadanie dynamicznej estymacji statystycznie optymalnej (filtracji dynamicznej) polega na określeniu, na podstawie zakłóconych pomiarów, pewnego przybliżenia czasowego identyfikowanych wielkości określających stan procesu. Ponieważ jakość tego przybliżenia (estymaty) wynika z minimalizacji pewnego wskaźnika jakości, to zagadnienie nazywamy estymacją optymalną.

Rozwiązanie zagadnienia estymacji optymalnej składa się z następujących etapów:

- Opracowanie modelu matematycznego procesu (obiektu) wiążącego ze sobą wielkości podlegające estymacji (niewiadome, mierzone) oraz określenie modelu zakłóceń pomiarów i zakłóceń obiektu.
- Określenie wskaźnika jakości (a więc funkcji celu estymacji).
- Wyprowadzenie algorytmów obliczeniowych.

W przypadku gdy wielkości podlegające estymacji oraz zakłócenia traktowane są jako zmienne stochastyczne o normalnym rozkładzie gęstości prawdopodobieństwa, problem nazywa się estymacją statystycznie optymalną.

Metoda filtracji dynamicznej, znana również pod nazwą *filtru Kalmana*, jest jedną z najpopularniejszych metod estymacji statystycznie optymalnej stosowanych do wyznaczania pomiarowo niedostępnych zmiennych procesowych, na podstawie znajomości bieżących wartości wielkości pomiarowo dostępnych oraz znajomości modelu matematycznego wiążącego obie te grupy wielkości. Zakres zastosowań filtru Kalmana jest bardzo rozległy i obejmuje głównie takie dziedziny jak sterowanie (w przypadkach gdy znajomość niedostępnych pomiarowo zmiennych procesowych jest niezbędna do sterowania procesem), nawigacja, radiolokacja i wiele innych. Filtracja dynamiczna jest również wykorzystywana do identyfikacji parametrów modeli procesów dynamicznych czy do przewidywania (*predykcji*) ciągów czasowych [34]. Tak zdefiniowany przedmiot zastosowań metody filtracji dynamicznej mieści się również w pewnej klasie zagadnień odwrotnych, a w tym również zagadnień nieustalonego przewodzenia ciepła. Do typowych problemów zaliczyć tu można wyznaczanie pól temperatury przy nieznanym warunku początkowym, wyznaczanie nieznanych warunków brzegowych czy identyfikację parametrów termofizycznych.

Pierwsze prace dotyczące możliwości zastosowań metody filtracji dynamicznej do rozwiązywania odwrotnych zagadnień przewodzenia ciepła, a dotyczące identyfikacji nieustalonych pól temperatury są autorstwa J.M. Macewitego i A.V. Multanowskiego np. [28],[29],[30]. W zespole tym powstały liczne prace poświęcone tej tematyce jak na przykład monografia [27]. W Instytucie Techniki Cieplnej Politechniki Śląskiej prowadzone były prace dotyczące zastosowań metody filtracji dynamicznej do identyfikacji pola temperatury we wsadzie nagrzewanym w piecach wgłębnych przy nieznanym początkowym rozkładzie temperatury wsadu [50],[62]. Model filtru Kalmana został tu sprzężony z opracowanym modelem matematycznym procesu nagrzewania wsadu. Prowadzone były także prace teoretyczne dotyczące zastosowań metody filtracji do rozwiązywania nieliniowych zagadnień odwrotnych (identyfikacja współczynników wnikania ciepła) czy odwrotnych zagadnień granicznych [25],[47],[50]. Metoda filtracji dynamicznej, podobnie jak metoda rachunku wyrównawczego, należy do tej samej grupy metod estymacji statystycznie optymalnej. Z tego też względu podstawy teoretyczne metod, jak i ich właściwości są bardzo podobne. Uwaga ta dotyczy zwłaszcza stabilności metod i ich czułości na zakłócenia danych wejściowych. W tym przypadku stabilizujące działanie filtru Kalmana opiera się na zasadzie analogicznej jak w przypadku rozszerzonej wersji algorytmu rachunku wyrównawczego (rozdział 3.1.3).

Różnice pomiędzy metodami polegają głównie na odmiennym sformułowaniu problemu i zakresie zastosowań (filtracja dynamiczna z założenia przeznaczona jest do analizy procesów nieustalonych). W przypadku rachunku wyrównawczego model matematyczny procesu reprezentowany jest poprzez równania więzów (np. (3.12) lub (3.27)). Wskaźnik jakości zdefiniowany jest poprzez odpowiednią formę kwadratową (np. (3.15) lub (3.31)). W stosunku do błędów pomiarów przyjmuje się postulat o normalnym rozkładzie funkcji gęstości prawdopodobieństwa (choć statystyczne uzasadnienie tej tezy jest w większości przypadków prawie niemożliwe). Wielkości poddawane uzgadnianiu są wielkościami stochastycznymi, choć założenie takie nie zawsze jest przyjmowane *explicite* w opracowaniach dotyczących zastosowań rachunku wyrównawczego.

W przypadku metody filtracji dynamicznej postulat o stochastycznym charakterze wielkości charakteryzujących proces (wielkości stanu) i normalnym rozkładzie funkcji gęstości prawdopodobieństwa wielkości obserwowanych leży u podstaw teoretycznych metody. Metoda filtracji może być stosowana do obiektów, których opis matematyczny może być przedstawiony w postaci ciągłej lub dyskretnej. W dalszym ciągu analizowana będzie wyłącznie wersja dyskretna metody. W rozdziale 4.1 przedstawiono podstawowe założenia algorytmu filtracji. W rozdziale 4.2 przedstawiono przykłady zastosowań metody do rozwiązywania liniowych i nieliniowych zagadnień identyfikacji pól temperatury.

4.1. Podstawy teoretyczne metody filtracji dynamicznej

Zakłada się, że model matematyczny procesu (np. model nieustalonego pola temperatury w węzłach podziału różnicowego ciała) da się zapisać w pewnej standardowej postaci nazywanej *równaniem stanu*:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \Phi_{k+1,k}\,\mathbf{y}_k + \mathbf{c}_k + \Lambda \mathbf{z}_k \tag{4.1}$$

gdzie:

- $\mathbf{y}_{k+1}$, $\mathbf{y}_k$ - wektory (o długości N) identyfikowanych wielkości w chwili czasu $k+1$, oraz k,
- $\Phi_{k+1,k}$ - tzw. *macierz stanu* (lub *macierz przejścia*) o wymiarach $N \cdot N$ ustalająca relację pomiędzy szukanymi wielkościami y w dwóch kolejnych krokach czasu,
- $\mathbf{c}_k$ - wektor stałych współczynników,
- $\mathbf{z}_k$ - wektor statystycznie niezależnych zakłóceń oddziałujących na analizowany proces,
- Λ - macierz współczynników.

Przyjmuje się, że wektor zakłóceń stochastycznych $\mathbf{z}_k$ o macierzy kowariancji $\mathbf{G}_z$ spełnia warunek:

$$E\{\mathbf{z}_k\} = \mathbf{0} \tag{4.2}$$

Dla rozpatrywanych zagadnień zakłócenia reprezentowane przez wektor z można interpretować jako miarę niepewności (*szum*) poszczególnych równań modelu matematycznego. Z uwagi jednak na brak przesłanek do określenia wartości elementów macierzy kowariancji $\mathbf{G}_z$ zakłócenie to wyeliminowano z dalszych rozważań.

W chwili czasu $k+1$ dokonuje się pomiarów w s punktach układu (obszaru). Wyniki pomiarów tworzą wektor $\mathbf{x}_{k+1}$. Związek pomiędzy wynikami pomiarów $\mathbf{x}_{k+1}$ a zmiennymi stanu $\mathbf{y}_{k+1}$ wyraża tzw. *równanie wyjść*:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{H}\,\mathbf{y}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1} \tag{4.3}$$

gdzie:

$\mathbf{x}_{k+1}$ - wektor wyników pomiarów (zawierający s elementów),

$\mathbf{H}_{k+1}=\mathbf{H}$ - macierz wskaźnikowa ustalająca relację pomiędzy wynikami pomiarów i wielkościami estymowanymi,

$\mathbf{v}_{k+1}$ - wektor statystycznie niezależnych zakłóceń oddziałujących na pomiary.

Macierz **H** wyraża relacje, jakie występują pomiędzy wielkościami podlegającymi estymacji a wynikami pomiarów. W przypadku gdy pomiary dotyczą bezpośrednio identyfikowanych wielkości, elementy macierzy **H** są równe 1 lub 0. Taka sytuacja występuje właśnie w przypadku analizowanych zagadnień odwrotnych, gdyż przyjmuje się, że mierzona jest wprost temperatura w pewnych punktach ciała. W takim przypadku położenie elementów macierzy **H** o wartości 1 wskazuje na te węzły podziału różnicowego obszaru, w których dokonuje się pomiaru temperatury. Postać macierzy **H** może ulegać zmianie w sposób dynamiczny, jeżeli w trakcie trwania procesu zmienia się zestaw danych pomiarowych.

Odnośnie do zakłóceń pomiarowych reprezentowanych przez elementy wektora **v** przyjmuje się, że są one statystycznie niezależne o średniej wartości:

$$E\{\mathbf{v}_k\} = \mathbf{0} \tag{4.4}$$

oraz o macierzy kowariancji:

$$\operatorname{cov}\{\mathbf{v}_k\} = E\{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_j\} = \begin{cases} \mathbf{V} & \text{dla } k=j \\ \mathbf{0} & \text{dla } k\neq j \end{cases} \tag{4.5}$$

Ostatecznie przyjmujemy, że model procesu, np. model nieustalonego pola temperatury, w pewnym obszarze jest opisany równaniami (4.1) i (4.3), przy czym równania te traktuje się jako stochastyczne, gdyż wiążą one ze sobą zmienne losowe.

Celem estymacji jest wyznaczenie nieznanych wielkości (zmiennych stanu) $\mathbf{y}_{k+1}$, przy czym nie są one bezpośrednio dostępne pomiarowo. Znany jest natomiast ciąg pomiarów $\mathbf{Z}_j$:

$$\mathbf{Z}_j = \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_i, \ldots, \mathbf{z}_j \tag{4.6}$$

Każdy z wektorów $\mathbf{z}_i$ powiązany jest zależnością (4.3) ze zmiennymi stanu $\mathbf{y}_i$. Estymata warunkowa $\bar{\mathbf{y}}_{k+1/j}$ wektora $\mathbf{y}_{k+1}$ wyznaczona na podstawie pomiarów $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_j$ jest pewną funkcją wektorową $\mathbf{f}_{k+1}$ pomiarów:

$$\bar{\mathbf{y}}_{k/j} = \mathbf{f}_k(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_j) = \mathbf{f}_k(\mathbf{Z}_j) \tag{4.7}$$

Zadaniem estymacji jest wyznaczenie postaci funkcji $\mathbf{f}_{k+1}$. Jeżeli $k+1>j$, to zadanie nazywane jest *predykcją* (przewidywaniem). Gdy $k+1=j$, to mówimy o *filtracji* (korekcji), a dla $k+1<j$ mamy do czynienia z tzw. *wygładzaniem*.

Zadanie to polega, jak już wspomniano wcześniej, na zdefiniowaniu funkcji celu (wskaźnika jakości) i rozwiązaniu zdefiniowanego problemu optymalizacyjnego. W literaturze [31], [34] można spotkać różne metody wyprowadzenia równań algorytmu filtracji dynamicznej, tzn. algorytmu filtru Kalmana. W monografii [34] równania filtru wyprowadza się bazując na pojęciu wskaźnika jakości estymacji J_{k+1} zdefiniowanego w następujący sposób:

$$J_{k+1} = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{y}_{k+1} - \bar{\mathbf{y}}_{k+1})^T (\mathbf{y}_{k+1} - \bar{\mathbf{y}}_{k+1}) p(\mathbf{y}_{k+1} | \mathbf{Z}_{k+1})\, d\mathbf{y}_{k+1} \tag{4.8}$$

gdzie:

$\mathbf{y}_{k+1}$ - wektor dokładnych wartości identyfikowanych wielkości,

$\bar{\mathbf{y}}_{k+1/j}$ - optymalna estymata identyfikowanych wielkości,

$p(\mathbf{y}|\mathbf{Z})$ - warunkowa funkcja gęstości prawdopodobieństwa *a posteriori*, tzn. wyznaczona w warunkach znajomości sekwencji pomiarów Z_{k+1}.

Wyrażenie $\mathbf{y}_{k+1} - \bar{\mathbf{y}}_{k+1}$ wyraża błąd estymacji zdefiniowany jako różnica pomiędzy nieznaną wartością prawdziwą $\mathbf{y}_{k+1}$ a estymatą $\bar{y}_{k+1}$. Optymalną estymatę $\bar{y}_{k+1}$ wyznacza się na podstawie twierdzenia Shermana, w myśl którego estymata $\bar{y}_{k+1}$ minimalizuje wskaźnik jakości J_{k+1}. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa warunkowego $p(\mathbf{y}|\mathbf{z})$ ma w tym przypadku postać [34]:

$$p(\mathbf{y}_{k+1} | \mathbf{Z}_{k+1}) = \frac{[\det(\mathbf{H}\mathbf{G}_{k+1/k}\mathbf{H}^T + \mathbf{V})]}{(2\Pi)^{0.5} (\det \mathbf{V})^{0.5} (\det \mathbf{G}_{k+1/k})^{0.5}} *$$

$$* \exp\{ -\frac{1}{2} [(\mathbf{y}_{k+1} - \Phi_{k+1,k}\bar{\mathbf{y}}_k)^T \mathbf{G}_{k+1/k}^{-1} (\mathbf{y}_{k+1} - \Phi_{k+1,k}\bar{\mathbf{y}}_k) + \tag{4.9}$$

$$+ (\mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{H}\mathbf{y}_{k+1})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{H}\mathbf{y}_{k+1}) -$$

$$- (\mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{H}\Phi_{k+1,k}\bar{\mathbf{y}}_k)^T (\mathbf{H}\mathbf{G}_{k+1/k}\mathbf{H}^T + \mathbf{V})^{-1} (\mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{H}\Phi_{k+1,k}\bar{\mathbf{y}}_k)] \}$$

gdzie:

$$\mathbf{G}_{k+1/k} = \Phi_{k+1,k} \mathbf{G}_k \Phi_{k+1} \tag{4.10}$$

W zależności od rodzaju rozpatrywanego zagadnienia (i co się z tym wiąże - od postaci równania stanu (4.1)) rozróżnia się różne algorytmy filtracji dynamicznej. Dwa podstawowe algorytmy filtracji to filtr liniowy (*elementarny*) oraz filtr nieliniowy. Równania tych dwóch algorytmów przedstawiono w rozdziałach 4.1.1 i 4.1.2.

Metoda filtracji dynamicznej oraz metoda rachunku wyrównawczego bazuje na analogicznych założeniach estymacji statystycznie optymalnej. Jeżeli rozpatrzymy rekurencyjną wersję algorytmu rachunku wyrównawczego (uzgadnianie z kroku na krok czasu), to okaże się, że algorytmy obydwu metod są prawie identyczne. Różnica wynika z nieco odmiennego sformułowania wyjściowego równania więzów, np. (3.12) dla rachunku wyrównawczego i równania stanu (4.1) dla filtracji dynamicznej.

W równaniach więzów występują dwie grupy wielkości: mierzone **x** i niewiadome **y**. Wielkościom tym odpowiadają dwie różne macierze współczynników **A** i **B**. W przypadku filtracji dynamicznej równanie stanu zawiera wyłącznie zmienne stanu **y**, czyli wielkości niewiadome. Związek (pośredni lub bezpośredni) pomiędzy wielkościami mierzonymi i niewiadomymi wyrażony jest odrębnym równaniem wyjść (4.3). Jeżeli pomiarom podlegają bezpośrednio zmienne stanu (np.mierzona jest temperatura w wybranych punktach ciała), to pewne wielkości są jednocześnie traktowane jako niewiadome i mierzone. Ma to również swój wyraz w postaci równania stanu, które zawiera wyłącznie jedną macierz współczynników, tzn. macierz przejścia $\Phi_{k+1,k}$. Postać równania stanu jest więc prostsza aniżeli analogicznego równania więzów, co przyczynia się również do uproszczenia procedur numerycznych. Nie jest konieczne dodatkowe przekształcanie równań modelu procesu w celu wyodrębnienia obydwu grup wielkości. Z drugiej strony należy jednak pamiętać, że metoda filtracji daje się stosować do rozwiązywania znacznie węższej klasy problemów estymacji aniżeli metoda rachunku wyrównawczego.

Podobnie jak w przypadku rozszerzonej wersji rachunku wyrównawczego proces filtracji rozpoczyna się od oszacowania początkowych wartości niewiadomych $\bar{\mathbf{y}}_k$ i ich macierzy kowariancji $\mathbf{G}_k$ (gdzie k oznacza początkową chwilę czasu, np. $k=0$). Początkowe oszacowanie estymaty $\bar{\mathbf{y}}_k$ oraz elementów diagonalnych macierzy kowariancji $\mathbf{G}_k$ powinno opierać się na przesłankach fizykalnych. Należy unikać przeszacowania oceny początkowej, tzn. zbyt małych elementów macierzy kowariancji $\mathbf{G}_k$. Gdy brak jest jakichkolwiek przesłanek odnośnie do oszacowania elementów macierzy $\mathbf{G}_k$, to należy przyjmować bardzo duże początkowe wartości elementów tej macierzy.

4.1.1. Filtr liniowy

Podstawowy przypadek filtracji dotyczy równania stanu w postaci liniowej:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \Phi_{k+1,k}\,\mathbf{y}_k + \mathbf{c}_k \tag{4.11}$$

Problem filtracji liniowej występuje na przykład podczas identyfikacji nieustalonych pól temperatury czy przy rozwiązywaniu granicznych zagadnień odwrotnych (identyfikacja strumienia ciepła na brzegu ciała). Algorytm filtracji optymalnej wyprowadza się opierając się na minimalizacji wskaźnika jakości (4.8). Wyprowadzone w ten sposób równania filtru dzieli się zazwyczaj na dwie grupy mające odmienny sens statystyczny.

Równanie modelu zjawiska (równanie stanu) przedstawia tzw. informację *a priori* o przebiegu procesu. Informacja ta może być wykorzystana do przewidywania (czyli tzw. *predykcji*) estymowanych wielkości w chwili czasu $k+1$ bez wykorzystania jakichkolwiek informacji pomiarowych. Jeżeli w chwili czasu k znana jest estymata zmiennych stanu $\bar{\mathbf{y}}_k$ oraz macierz kowariancji $\mathbf{G}_k$, to estymata $\bar{\mathbf{y}}_{k+1/k}$ oraz macierz kowariancji $\mathbf{G}_{k+1/k}$ wyznaczane są na podstawie równania stanu (4.11) oraz *prawa propagacji* błędów:

$$\bar{\mathbf{y}}_{k+1/k} = \Phi_{k+1,k}\,\bar{\mathbf{y}}_k + \mathbf{c}_k \tag{4.12}$$

$$\mathbf{G}_{k+1/k} = \Phi_{k+1,k}\,\mathbf{G}_k\,\Phi_{k+1,k}^T \tag{4.13}$$

W chwili czasu $k+1$ przeprowadza się pomiary wielkości stanu w s punktach ciała. Wyniki pomiarów tworzą wektor $\mathbf{z}_{k+1}$ i są związane z wielkościami stanu równaniem wyjść, tzn. (4.3). Błędy pomiarów są reprezentowane przez macierz kowariancji $\mathbf{V}_{k+1}$. Wyniki pomiarów $\mathbf{z}_k$ są podstawą do statystycznej korekcji ocen $\bar{\mathbf{y}}_{k+1/k}$ i $\mathbf{G}_{k+1/k}$. Proces ten nazywa się filtracją (korekcją). Optymalna estymata $\bar{\mathbf{y}}_{k+1}$ oraz macierz kowariancji $\mathbf{G}_{k+1}$ opisane są następującymi zależnościami [31],[34]:

$$\bar{\mathbf{y}}_{k+1} = \bar{\mathbf{y}}_{k+1/k} + \mathbf{K}_{k+1}\left[\mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{H}\,\Phi_{k+1,k}\,\bar{\mathbf{y}}_k\right] \tag{4.14}$$

$$\mathbf{G}_{k+1} = \mathbf{G}_{k+1/k} - \mathbf{G}_{k+1/k}\mathbf{H}^T\left[\mathbf{H}\mathbf{G}_{k+1}\mathbf{H}^T + \mathbf{V}_{k+1}\right]^{-1}\mathbf{H}\,\mathbf{G}_{k+1} \tag{4.15}$$

Macierz $\mathbf{K}_{k+1}$ nosi nazwę macierzy wzmocnienia filtru i dana jest zależnością:

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{G}_{k+1}\mathbf{H}^T\mathbf{V}_{k+1}^{-1} \tag{4.16}$$

Wyrażenie:

$$\mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{H}\Phi_{k+1,k}\,\bar{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{H}\,\bar{\mathbf{y}}_{k+1/k} \tag{4.17}$$

występujące po prawej stronie zależności (4.14) przedstawia różnicę pomiędzy wynikami pomiaru $\mathbf{z}_k$ a oceną $\bar{\mathbf{y}}_{k+1/k}$ wynikającą ze znajomości modelu matematycznego procesu. Różnica ta pomnożona przez macierz wzmocnienia $\mathbf{K}_{k+1}$ stanowi poprawkę dodawaną do oceny $\bar{\mathbf{y}}_{k+1/k}$, a wynikającą z uwzględnienia dodatkowej informacji *a posteriori*, tzn. informacji pomiarowej.

Algorytm liniowego filtru Kalmana jest również bardzo dogodny do realizacji numerycznej. W każdym kroku czasu oprócz operacji macierzowych należy odwracać jedynie macierze o stosunkowo małych rozmiarach $(s \cdot s)$. W przypadku gdy parametry występujące w równaniu stanu nie są funkcjami czasu, to algorytm filtru jest zbieżny, jeżeli elementy macierzy wzmocnienia $\mathbf{K}_{k+1}$ i macierzy kowariancji $\mathbf{G}_{k+1}$ maleją do pewnych stałych wartości. Zbieżność algorytmu da się ocenić wyłącznie na podstawie modelu procesu (równania stanu) i dokładności pomiarów $\mathbf{V}_{k+1}$, natomiast bez znajomości wyników pomiarów (identyczną cechę wykazuje algorytm rachunku wyrównawczego).

4.1.2. Filtr nieliniowy

Modele matematyczne wielu problemów opisywane są równaniami nieliniowymi. Sytuacja taka występuje również bardzo często w przypadku rozwiązywania granicznych zagadnień odwrotnych. Przykładem może tu być na przykład identyfikacja liczby Biota, tzn. warunku brzegowego na powierzchni ciała (nieliniowość typu iloczynu identyfikowanych wielkości: liczby Biota i temperatury).

Nieliniowe równanie stanu można zapisać w następującej macierzowej postaci:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{F}_{k+1,k}\left(\mathbf{y}_k, k\right) + \mathbf{c}_k \tag{4.18}$$

przy czym wyeliminowano tu z rozważań wektor stochastycznych zakłóceń $\mathbf{z}_k$ oddziałujących na analizowany proces.

Teoretycznie również równanie wyjść może mieć postać nieliniową (jeżeli np. zmienne stanu nie są bezpośrednio mierzone, a związki pomiędzy zmiennymi stanu a wynikami pomiaru są nieliniowe):

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{h}\left(\mathbf{y}_{k+1}, k\right) + \mathbf{v}_{k+1} \tag{4.19}$$

Należy jednak stwierdzić, że w przypadku analizy odwrotnych zagadnień przewodzenia ciepła równanie wyjść ma zazwyczaj postać liniową, tzn. (4.3).

Rozwiązanie problemu filtracji nieliniowej sprowadza się w zasadzie do linearyzacji w każdym kroku czasu równania stanu (4.18) i równania wyjść (4.19). Podobnie jak dla filtru liniowego i w tym przypadku algorytm filtru nieliniowego można podzielić na dwie części odnoszące się do etapu predykcji i korekcji [31],[34].

W procesie predykcji estymatę $\bar{\mathbf{y}}_{k+1/k}$ oraz macierz kowariancji $\mathbf{G}_{k+1/k}$ wyznacza się na podstawie równania stanu (4.11) oraz prawa propagacji błędów:

$$\bar{\mathbf{y}}_{k+1/k} = \mathbf{F}_{k+1,k}\left(\bar{\mathbf{y}}_k, k\right) + \mathbf{c}_k \tag{4.20}$$

$$\mathbf{G}_{k+1/k} = \frac{\partial \mathbf{F}_{k+1,k}\left(\mathbf{y}_k, k\right)}{\partial \mathbf{y}_k}\,\mathbf{G}_k\,\frac{\partial \mathbf{F}_{k+1,k}^T\left(\mathbf{y}_k, k\right)}{\partial \mathbf{y}_k} \tag{4.21}$$

gdzie $\bar{\mathbf{y}}_k$ jest znaną estymatą zmiennych stanu w chwili czasu $k+1$, a $\mathbf{G}_k$ oznacza macierz kowariancji wektora $\bar{\mathbf{y}}_k$.

Optymalne estymaty $\bar{\mathbf{y}}_{k+1}$ oraz $\mathbf{G}_{k+1}$ dla procesu filtracji (korekcji) opisane są następującymi zależnościami [34]:

$$\mathbf{G}_{k+1} = \mathbf{G}_{k+1/k} - \mathbf{G}_{k+1/k}\frac{\partial \mathbf{h}^T(\bar{\mathbf{y}}_{k+1/k}, k+1)}{\partial \bar{\mathbf{y}}_{k+1/k}} \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{h}(\bar{\mathbf{y}}_{k+1/k}, k+1)}{\partial \bar{\mathbf{y}}_{k+1/k}}\,\mathbf{G}_{k+1}\,\frac{\partial \mathbf{h}^T(\bar{\mathbf{y}}_{k+1/k}, k+1)}{\partial \bar{\mathbf{y}}_{k+1/k}} + \mathbf{V}_{k+1}\right]^{-1} \frac{\partial \mathbf{h}(\bar{\mathbf{y}}_{k+1/k}, k+1)}{\partial \bar{\mathbf{y}}_{k+1/k}}\,\mathbf{G}_{k+1} \tag{4.22}$$

$$\bar{\mathbf{y}}_{k+1} = \bar{\mathbf{y}}_{k+1/k} + \mathbf{K}_{k+1}\left[\mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{h}\left(\mathbf{y}_k, k+1\right)\right] \tag{4.23}$$

Macierz wzmocnienia filtru $\mathbf{K}_{k+1}$ jest dana zależnością:

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{G}_{k+1} \frac{\partial \mathbf{h}^T(\bar{\mathbf{y}}_{k+1/k}, k+1)}{\partial \bar{\mathbf{y}}_{k+1/k}} \mathbf{V}_{k+1}^{-1} \tag{4.24}$$

W przypadku gdy równanie wyjść (4.19) jest liniowe (tzn. dane zależnością (4.3)), to równania (4.23),(4.22) i (4.24) obowiązują w dalszym ciągu, z tym tylko że w równaniu (4.23) należy podstawić:

$$\mathbf{h}\left(\mathbf{y}_k, k+1\right) = \mathbf{H}\,\Phi_{k+1,k}\,\bar{\mathbf{y}}_k \tag{4.25}$$

a w równaniach (4.22) i (4.24):

$$\frac{\partial \mathbf{h}^T(\bar{\mathbf{y}}_{k+1/k}, k+1)}{\partial\, \bar{\mathbf{y}}_{k+1/k}} = \mathbf{H} \tag{4.26}$$

Rozwiązywanie nieliniowych zagadnień odwrotnych wiąże się zazwyczaj z koniecznością zmiany struktury równań modelu matematycznego. Struktura ta musi być bowiem dostosowana do ogólnej postaci równania stanu. Z tego względu należy zazwyczaj rozszerzyć wektor zmiennych stanu (często nawet w dość sztuczny sposób) o dodatkowe parametry podlegające identyfikacji, a występujące w członach nieliniowych. Rozszerzenie wektora zmiennych stanu pociąga za sobą konieczność przebudowy macierzy przejścia, tak aby można było uzyskać równanie stanu w swej standardowej postaci (4.11). Kosztem dodatkowych przekształceń macierzowych uzyskuje się ostatecznie bardzo pożądaną numerycznie unifikację zapisu równań filtru.

4.2. Rozwiązywanie zadań odwrotnych przewodzenia ciepła

Statystycznie optymalna filtracja dynamiczna jako metoda identyfikacji niedostępnych pomiarowo parametrów procesu obejmuje obszarem swych zastosowań również pewne zagadnienia odwrotne przewodzenia ciepła. Warunki wstępne, jakie muszą być w tym przypadku spełnione, to: nieustalony charakter procesu oraz opis modelu matematycznego procesu w postaci równania stanu, a więc na przykład w postaci (4.11) lub (4.18).

Jak już wspomniano, pierwsze zastosowania filtracji dynamicznej do rozwiązywania odwrotnych zagadnień przewodzenia ciepła dotyczyły problemów identyfikacji nieustalonych pól temperatury przy nieznanym warunku początkowym [28],[30],[62]. Jest to zresztą problematyka (mieszcząca się w klasie zagadnień liniowych), do rozwiązywania której filtracja dynamiczna jest narzędziem szczególnie efektywnym. Przykłady zastosowań filtracji dynamicznej do identyfikacji jedno- i dwuwymiarowych pól temperatury przedstawiono w rozdziale 4.2.1. Jednoczesna identyfikacja pola temperatury oraz warunków brzegowych (klasyczne odwrotne zagadnienie graniczne) może być sformułowana w różny sposób. W rozdziale 3, gdzie do rozwiązania problemu zastosowano rachunek wyrównawczy, identyfikacji podlega wprost zmienny w czasie strumień ciepła na powierzchni ciała. Nieco odmienne podejście zastosowano w przypadku filtracji dynamicznej, gdzie założono, że identyfikacji podlegają parametry charakteryzujące warunek brzegowy trzeciego rodzaju, a więc liczba Biota i temperatura płynu [25]. Przykłady rozwiązania tak sformułowanego odwrotnego zagadnienia granicznego przedstawiono w rozdziale 4.2.2.

Rozwiązanie każdego problemu należy rozpoczynać od sformułowania modelu matematycznego rozpatrywanego procesu. Model ten należy przekształcić do postaci równania stanu (4.11) lub (4.18), przy czym wszystkie podlegające identyfikacji wielkości muszą być elementami wektora zmiennych stanu. Procedura ta jest prosta, gdy identyfikacji podlega wyłącznie pole temperatury. W takim bowiem przypadku dyskretny model pola temperatury, dany np. zależnością (1.1), jest zarazem wprost równaniem stanu. Odmienna sytuacja występuje, gdy identyfikacji podlegają również inne parametry procesu, jak np. wielkości charakteryzujące warunki brzegowe czy parametry termofizyczne ciała. W takich przypadkach konieczne jest przekształcenie modelu dyskretnego (1.1) do postaci równania stanu oraz rozszerzenie wektora niewiadomych wielkości o dodatkowe identyfikowane parametry. Ponadto uzyskuje się zazwyczaj w takich sytuacjach nieliniowe sformułowanie równania stanu (przy czym typ nieliniowości zależy od rodzaju rozpatrywanego problemu).

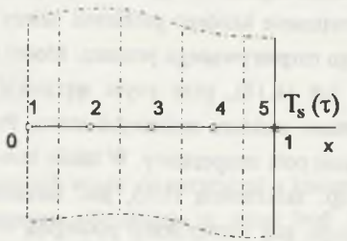
W następnym etapie należy utworzyć *równanie wyjść* ((4.3) lub (4.19)) określające zależności pomiędzy wielkościami mierzonymi a zmiennymi stanu. Problem ten sprowadza się do wyznaczenia macierzy wskaźnikowej $\mathbf{H}$ występującej w równaniach (4.3) i (4.19).

Sformułowanie problemu kończy oszacowanie początkowych wartości zmiennych stanu $\bar{\mathbf{y}}_0$ oraz elementów diagonalnych macierzy kowariancji $\mathbf{G}_0$. Przy szacowaniu tych wielkości należy kierować się tymi samymi przesłankami jak w przypadku rozszerzonej wersji rachunku wyrównawczego (patrz rozdział 3.1.3).

4.2.1. Identyfikacja nieustalonych pól temperatury

Jak już wspomniano, najbardziej klasyczne zastosowanie metody filtracji w problematyce zagadnień odwrotnych przewodzenia ciepła dotyczy identyfikacji nieustalonego pola temperatury w ciele, gdy nie jest znany warunek początkowy, a znane są wyniki pomiaru temperatury w wybranych punktach na powierzchni lub wewnątrz ciała. W praktyce sytuacja taka dotyczy np. wyznaczenia pola temperatury w nagrzewanych w piecu wlewkach, gdy nie jest znany rozkład temperatury wlewków w momencie załadowania do pieca. Innym interesującym problemem badawczym (choć nie będącym przedmiotem niniejszej rozprawy) jest tu problem identyfikacji temperatury i położenia granicy fazy w zagadnieniach ze zmianą fazy (problemy hutnicze, mrożenie i rozmrażanie produktów żywnościowych itp.).W dalszej kolejności przedstawiono przykłady zastosowania metody filtracji dynamicznej do identyfikacji nieustalonego pola temperatury w obszarach jedno- i dwuwymiarowych.

Pierwszy z przykładów dotyczy identyfikacji nieustalonego pola temperatury w płycie jednowymiarowej (rysunek 4.1). Ten sam problem został rozwiązany za pomocą metody rachunku wyrównawczego, a wyniki zaprezentowano w rozdziale 3.2.1. Przykład ten wykorzystano w celu porównania efektywności algorytmów i wyników uzyskanych za pomocą obydwu metod.



Rys. 4.1. *Podział różnicowy płyty*
Fig. 4.1. *Discretization of the plane wall*

Przyjęto identyczne dane do obliczeń jak w przypadku stosowania rachunku wyrównawczego: początkowa (nieznana) temperatura w płycie jest wyrównana i wynosi $\mathbf{T}_0=\mathbf{y}_0=1$, temperatura płynu $T_{pl}=0$, a liczba Biota charakteryzująca warunek brzegowy wynosi Bi=0.5. Przyjęto, że dokonuje się pomiaru temperatury w jednym tylko punkcie położonym na powierzchni płyty (węzeł nr 5). Dokładną odpowiedź temperaturową zakłócano losowo (za pomocą zależności (2.2)) błędem $\delta=0.01$. Do obliczeń przyjęto następujące oszacowanie warunku początkowego $\mathbf{y}_0$ i macierzy kowariancji $\mathbf{G}_0$: $y_{i0}=0.75$, $G_{ii0}=0.5$. Tak przyjęte oszacowanie jest więc dość odległe od wartości dokładnych.

Podobnie jak w przypadku zastosowania rachunku wyrównawczego (patrz rozdział 3.2.1) rozwiązanie zadania rozpoczyna się od sformułowania równań modelu matematycznego pola temperatury w węzłach płyty. Zastosowanie na przykład metody bilansów elementarnych prowadzi na wstępie do następujących równań temperatury w węzłach płyty:

$$\begin{aligned}
\frac{dT_1}{d\tau} &= d_{11}T_1 + d_{12}T_2 \\
\frac{dT_2}{d\tau} &= d_{21}T_1 + d_{22}T_2 + d_{23}T_3 \\
&\cdots \\
\frac{dT_5}{d\tau} &= d_{54}T_4 + d_{55}T_5 + \gamma_5
\end{aligned} \tag{4.27}$$

gdzie γ_5 jest współczynnikiem uwzględniającym wpływ warunku brzegowego.

W przeciwieństwie do rachunku wyrównawczego utworzenie równania stanu (4.11) nie wymaga praktycznie żadnych transformacji układu (4.27). Należy tylko przeprowadzić dyskretyzację pochodnych występujących po lewej stronie równań (4.27). W najprostszym przypadku można zastosować schemat jawny, co prowadzi do równania stanu w postaci:

$$\begin{aligned}
T_{1,k+1} &= (1+d_{11})T_{1,k} + d_{12}T_{2,k} \\
T_{2,k+1} &= d_{21}T_{1,k} + (1+d_{22})T_{2,k} + d_{23}T_{3,k} \\
T_{3,k+1} &= d_{32}T_{2,k} + (1+d_{33})T_{3,k} + d_{34}T_{4,k} \\
T_{4,k+1} &= d_{43}T_{3,k} + (1+d_{44})T_{4,k} + d_{45}T_{5,k} \\
T_{5,k+1} &= d_{54}T_{4,k} + (1+d_{55})T_{5,k} + c_{5,k}
\end{aligned} \tag{4.28}$$

gdzie k oznacza rozpatrywaną chwilę czasu. Zastosowanie schematu jawnego nie jest jednak zalecane ze względu na konieczność kontroli dopuszczalnego kroku czasu ze względu na fizyczną poprawność równań (4.28) [54]. Zastosowanie schematu niejawnego prowadzi natomiast do równania w postaci, która nie może być bezpośrednio wykorzystana jako równanie stanu, tzn.:

$$\mathbf{D}\,\mathbf{T}_{k+1} = \mathbf{T}_k + \mathbf{c}_k \tag{4.29}$$

Równanie (4.29) można przekształcić w prosty sposób do równania stanu (4.11) identycznie jak w przypadku stosowania rachunku wyrównawczego (rozdział 3.2.1). Ostatecznie uzyskuje się równanie stanu w postaci (4.11), gdzie $\mathbf{y}_{k+1}=\mathbf{T}_{k+1}$ oraz $\mathbf{y}_k=\mathbf{T}_k$).

W porównaniu z metodą rachunu wyrównawczego wyprowadzenie równania stanu jest prostsze aniżeli wyprowadzenie równania warunków (3.53). W przypadku metody filtracji nie jest bowiem konieczne rozdzielanie zmiennych na dwie grupy wielkości: mierzonych i niewiadomych, a co za tym idzie - nie jest konieczne dzielenie macierzy współczynników **D** na dwie podmacierze **A** i **B**.

W chwili czasu $k+1$ dokonuje się pomiaru temperatury w wybranych węzłach płyty. W analizowanym przykładzie jest to węzeł nr 5, tzn. $T_{5,k+1}=x_{5,k+1}$. Równanie wyjść wyraża się zależnością (4.3). Macierz wskaźnikowa **H** ma w analizowanym przykładzie postać:

$$\mathbf{H} = [0,0,0,0,1] \tag{4.30}$$

Wyniki obliczeń uzyskanych za pomocą filtracji dynamicznej (liniowa wersja algorytmu) oraz za pomocą rozszerzonego algorytmu rachunku wyrównawczego zestawiono w tablicy 4.1. Przyjęto krok całkowania po czasie $\Delta Fo=0.1$. Dla obydwu algorytmów zastosowano identyczną sekwencję zakłócania odpowiedzi temperaturowej.

Tablica 4.1

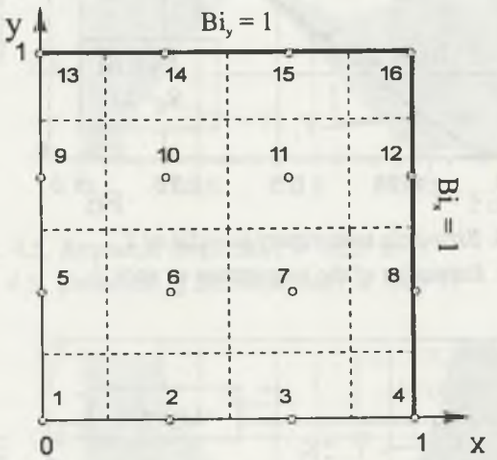
Wyniki identyfikacji temperatury w płycie

Fo	Temperatura T_1, $\hat{T}_1$, odchylenie standardowe $S_{\hat{T}}$				
	Wartość dokładna $T_1(Fo)$	Metoda filtracji dynamicznej		Metoda rachunku wyrównawczego	
		$\hat{T}_1(Fo)$	$S_{\hat{T}}$	$\hat{T}_1(Fo)$	$S_{\hat{T}}$
0.0	1.000	0.750	0.500	0.863	0.459
0.1	0.988	0.836	0.248	0.945	0.125
0.2	0.965	0.926	0.120	0.948	0.058
0.3	0.935	0.925	0.064	0.928	0.036
0.4	0.902	0.894	0.038	0.896	0.027
0.5	0.867	0.867	0.026	0.865	0.023
0.6	0.832	0.830	0.020	0.832	0.020

Z analizy rezultatów obliczeniowych wynika, że w obydwu przypadkach uzyskano zadowalającą jakość estymacji. Dla pierwszych kilku kroków czasu wyniki identyfikacji uzyskane za pomocą rachunku wyrównawczego są dokładniejsze aniżeli uzyskane za pomocą filtracji dynamicznej. Wynika to z faktu, że w tym pierwszym przypadku do estymacji wykorzystano informacje pomiarowe pochodzące z wszystkich analizowanych kroków czasu. W przypadku filtracji dynamicznej estymacji dokonuje się z kroku na krok czasu, a więc w trybie *on line*, wykorzystując jednorazowo informacje pomiarowe z jednego, bieżącego kroku czasu. Kolejne oceny są coraz to dokładniejsze i dla czasu Fo większego od 0.4 wyniki estymacji są już dla obydwu metod praktycznie takie same. Większa dokładność estymacji osiągnięta w wyniku zastosowania rachunku wyrównawczego jest jednak okupiona bardziej skomplikowaną strukturą równań więzów (3.47).

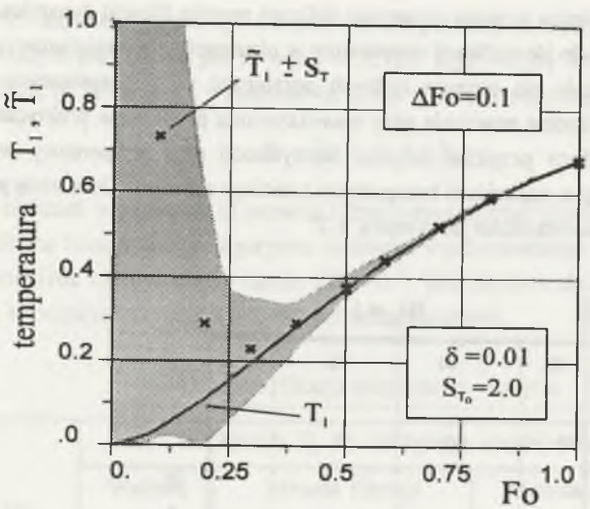
Ze względu na względną prostotę algorytmu obliczeń metoda filtracji dynamicznej nadaje się szczególnie dobrze do identyfikacji temperatury w obszarach wielowymiarowych. Istotny jest też fakt, że metoda nie narzuca żadnych ograniczeń co do usytuowania punktów pomiarowych, co ma istotne znaczenie przy rozwiązywaniu problemów praktycznych.

Kolejny przedstawiony przykład dotyczy identyfikacji pola temperatury w obszarze dwuwymiarowym (pręt z warunkami brzegowymi trzeciego rodzaju). Geometrię pręta i jego podział różnicowy przedstawiono na rysunku 4.2.

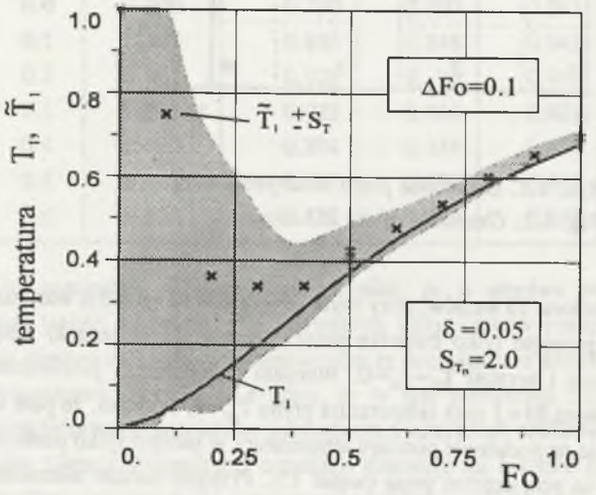


Rys. 4.2. *Geometria pręta dwuwymiarowego*
Fig. 4.2. *Geometry of the 2D domain*

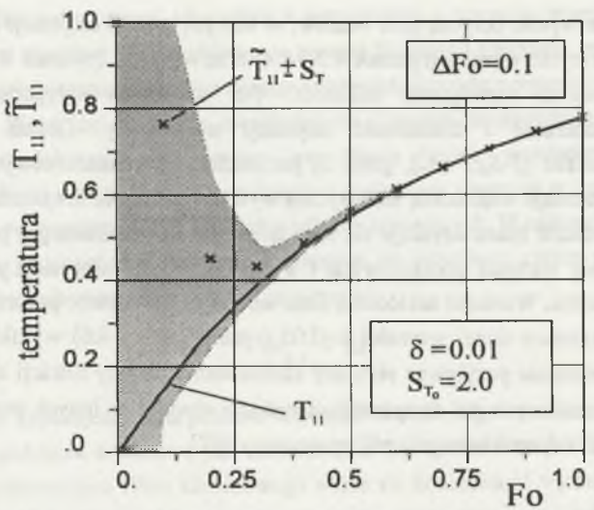
W pręcie wyodrębniono 16 węzłów, przy czym ze względu na symetrię warunków brzegowych do rozważań przyjęto tylko ćwiartkę pręta. Początkowa (nieznana) temperatura w pręcie jest wyrównana i wynosi $\mathbf{T}_0=y_0=0$. Warunki brzegowe na powierzchni płyty są następujące: liczba Biota Bi=1 oraz temperatura płynu $T_{pl}=1$. Przyjęto, że pole temperatury w pręcie wyznacza się na podstawie pomiaru temperatury w jednym tylko punkcie: w środku pręta (węzeł 1) lub na powierzchni pręta (węzeł 13). Przyjęto bardzo niedokładne oszacowanie wielkości początkowych y_0 i $\mathbf{G}_0$: $y_{i0}=1$, $G_{ii0}=4$. Odpowiedź temperaturową zakłócano losowo błędem o wartości $\delta=0.01$ i 0.05. Tak przyjęte założenia stawiają dość ostre wymagania przed metodą rozwiązania problemu. Wyniki identyfikacji temperatury w pręcie przedstawiono na rysunkach 4.3 i 4.4 (pomiar w węźle 1) i 4.5, 4.6 (pomiar w węźle 13).



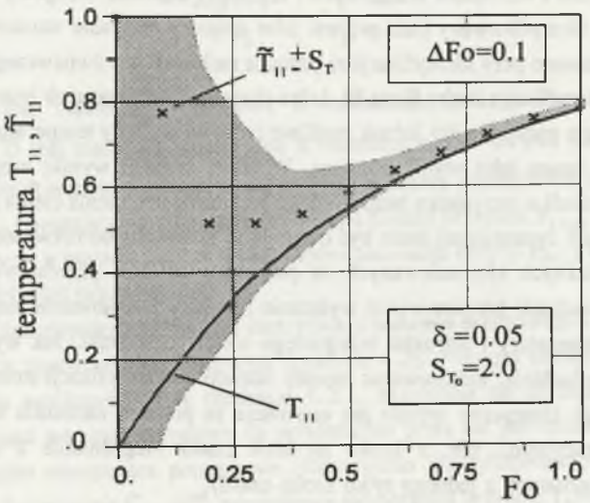
Rys. 4.3. *Estymacja temperatury w węźle nr 1*
Fig. 4.3. *Estimation of the temperature at node 1*



Rys. 4.4. *Estymacja temperatury w węźle nr 1*
Fig. 4.4. *Estimation of the temperature at node 1*



Rys. 4.5. *Estymacja temperatury w węźle nr 11*
Fig. 4.5. *Estimation of the temperature at node 11*



Rys. 4.6. *Estymacja temperatury w węźle nr 11*
Fig. 4.6. *Estimation of the temperature at node 11*

Przedstawione wyniki dotyczą tych węzłów, w których wyniki estymacji temperatury są jednymi z najgorszych: węzeł 1 (rysunek 4.3 i 4.4) oraz węzeł 11 (rysunek 4.5 i 4.6). Linią ciągłą przedstawiono rozwiązanie dokładne. We wszystkich przypadkach uzyskano zadowalającą zbieżność i dokładność estymacji temperatury. Obszar zacieniowany przedstawia przedział $[\hat{T}-S_T;\hat{T}+S_T]$, gdzie S_T jest odchyleniem standardowym estymaty $\hat{T}$. Obszar ten reprezentuje więc ocenę statystyczną wyników obliczeń. Z rysunków wynika, że już po trzech krokach czasu uzyskuje się rozwiązanie bliskie dokładnego, pomimo bardzo złego oszacowania wartości początkowych i wykorzystywania informacji pomiarowych z jednego tylko punktu. Wielkość zakłócenia δ ma wpływ na dokładność procesu filtracji, lecz nawet dla stosunkowo dużej wartości δ=0.05 (rysunek 4.4 i 4.6) wyniki estymacji są zadowalające. Podobnie pozytywne rezultaty zastosowania metody filtracji dynamicznej do identyfikacji nieustalonych pól temperatury uzyskano również w innych przypadkach, np. przy identyfikacji trójwymiarowych pól temperatury [62].

4.2.2. Identyfikacja temperatury i warunków brzegowych

Rozwiązanie granicznego zagadnienia odwrotnego polega na jednoczesnej identyfikacji temperatury w ciele i warunków brzegowych. Nieznany warunek brzegowy na powierzchni ciała może być identyfikowany bądź wprost jako zmienny w czasie strumień ciepła (takie podejście zastosowano przy identyfikacji za pomocą rachunku wyrównawczego - rozdział 3), bądź poprzez identyfikację liczby Biota Bi, która charakteryzuje warunek brzegowy trzeciego rodzaju. To drugie podejście jest jednak możliwe tylko wtedy, gdy temperatura płynu T_{pl} jest zadana lub jest znana jako wynik pomiaru. W takiej sytuacji wyniki mogą być bowiem dokładniejsze aniżeli w przypadku bezpośredniej estymacji strumienia ciepła na brzegu ciała.

Metoda filtracji dynamicznej może być oczywiście stosowana do rozwiązania odwrotnych zagadnień granicznych sformułowanych na podstawie obydwu przedstawionych podejść. W niniejszym rozdziale przedstawiono wyłącznie rezultaty zastosowania metody filtracji do identyfikacji temperatury i warunku brzegowego trzeciego rodzaju. Jak wykazały bowiem przeprowadzone badania, zastosowanie metody filtracji do identyfikacji strumienia ciepła na brzegu ciała daje identyczne wyniki jak estymacja za pomocą rachunku wyrównawczego w ujęciu sekwencyjnym, tzn. z kroku na krok czasu (uzgadnianie z wykorzystaniem informacji pomiarowych z jednego tylko kroku czasu).

Dalej przedstawiono jedynie rezultaty zastosowania metody filtracji dynamicznej do jednoczesnej identyfikacji pola temperatury i liczby Biota na powierzchni ciała (na przykładzie pręta dwuwymiarowego). Rezultaty badań dotyczących tego zagadnienia są szczegółowo przedstawione w pracy [25].

W przypadku jednoczesnej identyfikacji temperatury i warunku brzegowego trzeciego rodzaju nie jest możliwy opis problemu w postaci liniowego równania stanu. W pewnych równaniach modelu matematycznego występują bowiem iloczyny temperatury na powierzchni ciała i liczby Biota (co wynika z uwzględnienia warunku brzegowego). Liczba równań dyskretnego modelu pola temperatury jest równa liczbie niewiadomych temperatur węzłowych. Model musi być więc uzupełniony o dodatkowe równania w ilości równej liczbie dodatkowych, podlegających identyfikacji wielkości brzegowych. W najprostszym przypadku, gdy brak jest jakichkolwiek informacji odnośnie do przebiegu zmian np. liczby Biota, dodatkowe równania mogą mieć następującą postać:

$$\mathbf{Bi}_{k+1} = \mathbf{Bi}_k \tag{4.31}$$

Ostatecznie uzyskujemy opis procesu w postaci nieliniowego równania stanu (4.18) i do rozwiązania problemu konieczne jest zastosowanie algorytmu filtru nieliniowego (rozdział 4.1.2). Z zastosowaniem filtru nieliniowego wiąże się konieczność wyznaczenia pochodnej nieliniowej funkcji przejścia $\mathbf{F}_{k+1,k}(\mathbf{y}_k,k)$ względem rozszerzonego o wielkości brzegowe wektora zmiennych stanu $\mathbf{y}_k$. Różniczkowanie to daje w efekcie macierz o postaci:

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{k+1,k}(\mathbf{y}_k,k)}{\partial \mathbf{y}_k} = \begin{vmatrix} \Phi_{k+1,k} & , & \mathbf{D}_{k+1} \\ \mathbf{0} & , & \mathbf{I} \end{vmatrix} \tag{4.32}$$

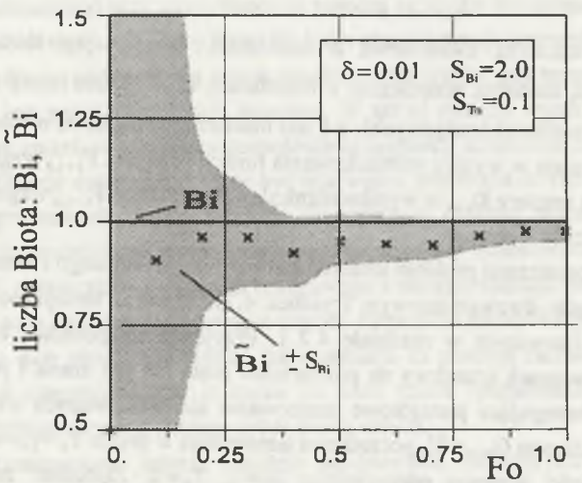
gdzie $\Phi_{k+1,k}$ jest macierzą kwadratową o rozmiarach $n \cdot n$ (n jest liczbą temperatur węzłowych), $\mathbf{D}$ jest macierzą prostokątną o rozmiarach $d \cdot n$ (d jest liczbą dodatkowych, identyfikowanych wielkości brzegowych), a $\mathbf{I}$ jest macierzą jednostkową o rozmiarach $d \cdot d$. Macierz $\Phi_{k+1,k}$ powstaje w wyniku różniczkowania funkcji przejścia $\mathbf{F}_{k+1,k}$ względem temperatur węzłowych, a macierz $\mathbf{D}_{k+1}$ w wyniku różniczkowania funkcji $\mathbf{F}_{k+1,k}$ względem identyfikowanych wielkości brzegowych.

Jako przykład rozpatrzono problem identyfikacji warunku brzegowego i nieustalonego pola temperatury w pręcie dwuwymiarowym (rysunek 4.2). Przyjęto identyczne założenia jak w przykładzie analizowanym w rozdziale 4.2.1. Przyjmuje się ponadto, że liczba Biota charakteryzująca warunek brzegowy na powierzchni pręta nie jest znana i podlega identyfikacji. Przyjęto następujące początkowe oszacowania identyfikowanych wielkości: liczba Biota $\tilde{\mathrm{Bi}}_0$=0.5, wariancja $G_{\mathrm{Bi},0}=2^2$, początkowa temperatura w pręcie $\mathbf{T}_0=\mathbf{y}_0$=0.1, $G_{y0}=0.1^2$. Rzeczywiste wartości wynoszą odpowiednio: Bi=1, $\mathbf{T}_0$=0. Założono, że identyfikację przeprowadza się na podstawie wyników pomiaru temperatury w jednym tylko punkcie usytuowanym w środku pręta (węzeł 1). Odpowiedź temperaturową zakłócano losowo błędem

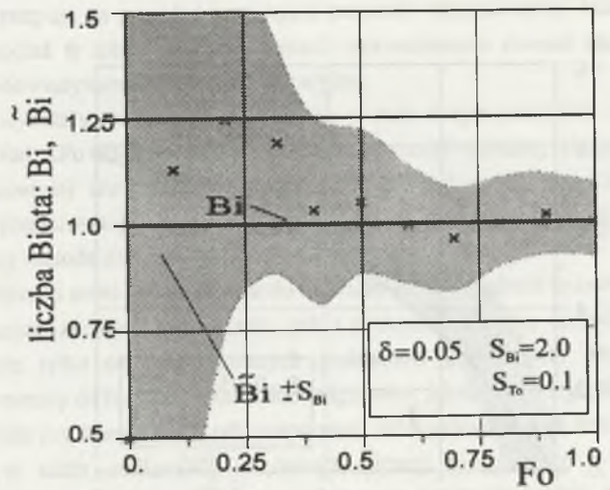
o wartości maksymalnej $\delta=0.01$ i 0.05. Wyniki estymacji liczby Biota dla dwóch różnych wartości δ i dla kroku próbkowania $\Delta Fo=0.1$ pokazano na rysunkach 4.7 i 4.8. W obydwu przypadkach proces estymacji jest zbieżny do rozwiązania dokładnego. Uzyskuje się również zadowalającą dokładność estymacji mierzoną wielkością odchylenia standardowego S_{Bi} uzyskanych ocen (obszar zacieniowany na rysunkach przedstawia rozrzut statystyczny oceny $\tilde{Bi}$). Dla zakłócenia $\delta=0.01$ uzyskano bardzo dużą dokładność identyfikacji liczby Biota. Dla zakłócenia $\delta=0.05$ wyniki są już mniej dokładne, lecz na podkreślenie zasługuje fakt, że proces filtracji jest zbieżny do rozwiązania dokładnego.

Jeszcze lepszą dokładność mają wyniki estymacji temperatury w pręcie. Na rysunkach 4.9 i 4.10 przedstawiono wyniki identyfikacji temperatury w węźle 11. Dokładność estymacji jest bardzo duża (nawet dla zakłócenia $\delta=0.05$), pomimo że warunek brzegowy jest oszacowany z mniejszą dokładnością. Prawidłowość tę obserwowano również w przypadku stosowania rachunku wyrównawczego (patrz rozdział 3.2.2).

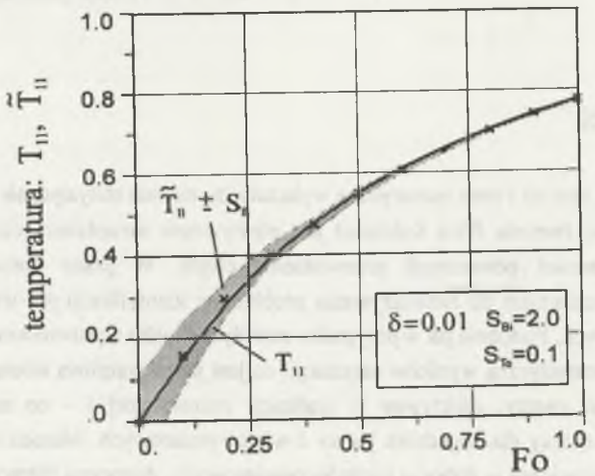
Osiągniętą dokładność estymacji należy uznać za bardzo dobrą zważywszy również fakt, że identyfikację oparto wyłącznie na odpowiedzi temperaturowej dotyczącej jednego tylko punktu pomiarowego (usytuowanego zresztą bardzo niekorzystnie z punktu widzenia dokładności estymacji liczby Biota). Zwiększenie liczby punktów pomiarowych, bądź ich przesunięcie w kierunku brzegu płyty przyczynia się do zwiększenia dokładności estymacji.



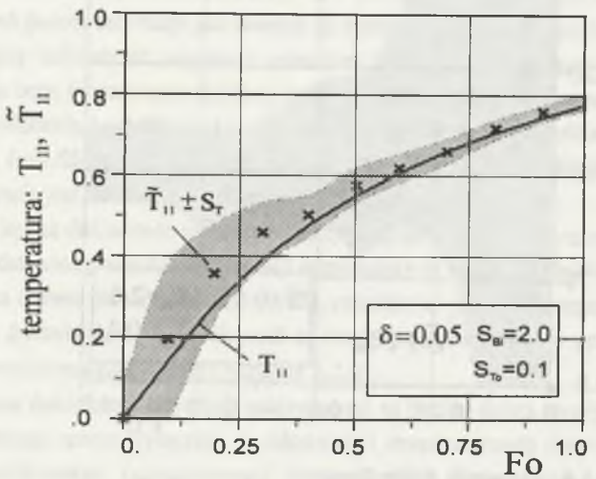
Rys. 4.7. *Estymacja liczby Biota*
Fig. 4.7. *Estimation of the Biot number*



Rys. 4.8. *Estymacja liczby Biota*
Fig. 4.8. *Estimation of the Biot number*



Rys. 4.9. *Estymacja temperatury w węźle nr 11*
Fig. 4.9. *Estimation of the temperature at node 11*



Rys. 4.10. *Estymacja temperatury w węźle nr 11*
Fig. 4.10. *Estimation of the temperature at node 11*

4.3. Wnioski

Przeprowadzone analizy i testy numeryczne wykazały, że metoda statystycznie optymalnej filtracji dynamicznej (metoda filtru Kalmana) jest efektywnym narzędziem rozwiązywania pewnej klasy zagadnień odwrotnych przewodzenia ciepła. W pracy metodę filtracji zastosowano z powodzeniem do rozwiązywania problemów identyfikacji pól temperatury i warunków brzegowych. Podobnie jak w przypadku metody rachunku wyrównawczego metoda daje wprost ocenę statystyczną wyników estymacji, co jest jej niewątpliwą zaletą. Algorytm metody jest bardzo zwarty, efektywny w realizacji numerycznej i - co zasługuje na podkreślenie - identyczny dla zagadnień jedno- i wielowymiarowych. Metoda nie narzuca również żadnych ograniczeń w doborze punktów pomiarowych. Algorytm filtracji nadaje się szczególnie dobrze do analizy procesów w tzw. *czasie rzeczywistym* (w trybie *on line*), gdyż wykorzystywane są informacje pomiarowe pochodzące wyłącznie z bieżącej chwili czasu.

Warunkiem stosowania metody jest opis modelu matematycznego procesu w postaci równania stanu, w którym występuje funkcja przejścia (lub macierz przejścia). Tego typu

równania występują na przykład przy opisie procesów nieustalonych. Możliwe jest jednak również (chociaż w nieco sztucznej postaci) sformułowanie równań stanu dla procesów ustalonych rozwiązywanych w sposób iteracyjny.

Badania wykazały, że metoda jest stabilna w dość dużym przedziale zmienności kroku czasu ΔFo (od ΔFo=0.5 do ΔFo=2.0) i intensywności wymiany ciepła na brzegu ciała scharakteryzowanej wielkością liczby Biota (od Bi=0.5 do Bi=4). Czułość metody na zakłócenia pomiarowe jest porównywalna z innymi metodami (np. rachunkiem wyrównawczym czy metodą szeregów pochodnych).

Metoda filtracji może być stosowana do rozwiązywania zagadnień liniowych i nieliniowych sformułowanych zarówno analitycznie, jak i dyskretnie. Zakres zastosowań metody nie ogranicza się tylko do prezentowanych problemów granicznych. Możliwe jest także stosowanie metody do rozwiązywania takich zagadnień, jak identyfikacja parametrów termofizycznych ciała czy identyfikacja pól temperatury w zagadnieniach ze zmianą fazy.

Należy tu także podkreślić, że metoda filtracji dynamicznej i metoda rachunku wyrównawczego (w wersji rozszerzonej) stanowią w istocie bardzo zbliżone narzędzie rozwiązywania problemów identyfikacji. Obydwie metody bazują na podobnych założeniach i należą do jednej grupy metod statystycznie optymalnych. Filtracja dynamiczna nie jest na pewno metodą tak ogólną jak rachunek wyrównawczy, lecz w wielu przypadkach jest prostsza i bardziej efektywna w realizacji numerycznej.

5. Zastosowanie metody dyskretnej transformacji spektralnej

Metoda dyskretnej transformacji spektralnej (zwana dalej metodą DTS) jest w zasadzie metodą rozwiązywania układów równań różniczkowych liniowych, które mogą być zapisane w następującej ogólnej postaci:

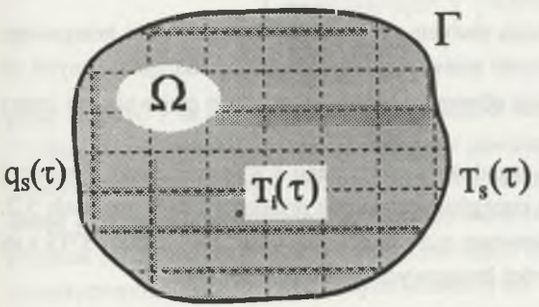
$$L\,\mathbf{T}(\bar{r},\tau) = \mathbf{A}\,\mathbf{T}(\bar{r},\tau) + \mathbf{b}(\bar{r},\tau) \qquad (5.1)$$

gdzie L jest pewnym operatorem różniczkowym. Istota metody DTS polega na transformacji wyjściowego układu równań różniczkowych do nowej bazy na podstawie widma (spektrum) dyskretnego operatora **A** [10]. Spektrum operatora dyskretnego **A** tworzą wartości własne β_i oraz wektory własne $\mathbf{w}_i$ operatora **A**. Stąd też w publikacjach anglosaskich spotkać się można z nazwą: *metoda wartości własnych - discrete eigenvalue method*. Dalsze rozwiązanie przebiega w sposób charakterystyczny dla metod polegających na pewnej transformacji zagadnienia wyjściowego: następuje rozwiązanie w dziedzinie transformaty (o wiele prostsze niż w dziedzinie oryginału) i retransformacja rozwiązania do dziedziny oryginału.

Interesującym walorem metody DTS jest to, że umożliwia ona między innymi uzyskiwanie rozwiązania problemów w postaci ciągło-dyskretnej. Na przykład dla zagadnień nieustalonych można uzyskać rozwiązanie ciągłe ze względu na czas i jednocześnie dyskretne ze względu na obszar rozwiązania, tzn. na siatce węzłów wynikającej z podziału różnicowego analizowanego obszaru. Pozwala to uzyskać rozwiązanie dla dowolnej chwili czasu bez potrzeby wykonywania obliczeń dla poprzednich chwil czasu (unika się kroczenia po czasie). Ponadto uzyskuje się zazwyczaj znaczne zwiększenie dokładności obliczeń w stosunku do podejścia czysto dyskretnego [57]. Ta bardzo interesująca zaleta metody DTS idzie jednak w parze z pewną niedogodnością, jaką jest stosunkowo wysoki koszt numeryczny metody wynikający z konieczności rozwiązania dyskretnego zagadnienia własnego. Stąd też stopień zainteresowania stosowaniem metody DTS jest ściśle związany z rozwojem komputerowej techniki obliczeniowej, która umożliwiła rozwiązywanie zagadnień o dużej liczbie stopni swobody. Jednak i wcześniej wykorzystywano transformację spektralną do analizy

dyskretnych układów drgających (np. problem drgań własnych i rezonansu [73]) lub zagadnienia automatyki i sterowania [34].

Metodę DTS stosuje się także z powodzeniem do rozwiązywania zagadnień brzegowych przewodzenia ciepła. Wiąże się to z faktem, że stosowanie metody DTS dla zagadnień opisywanych różniczkowym operatorem samosprzężonym, jakim jest na przykład operator Laplace'a ∇^2, jest znacznie prostsze aniżeli w przypadku operatora pozbawionego tej cechy [48]. Problemowi stosowania metody DTS do rozwiązywania sformułowanych dyskretnie zagadnień przewodzenia ciepła poświęcone są na przykład prace [26],[38],[40],[41],[42], [45],[49],[53]. Z uwagi na swe właściwości metoda DTS nadaje się szczególnie do wyznaczania szybkozmiennych lub periodycznych pól temperatury, np. [5],[17].



Rys. 5.1. *Geometria odwrotnego zagadnienia granicznego*
Fig. 5.1. *Geometry of an inverse boundary problem*

Należy tu także wspomnieć, że metoda transformacji spektralnych była już od dawna stosowana do analitycznego rozwiązywania różnego rodzaju zagadnień matematycznej fizyki, a w tym również zagadnień brzegowych przewodzenia ciepła. W tej dziedzinie problemów jest ona najczęściej nazywana metodą skończonych przekształceń całkowych (Finite Integral Transformation [8]). Tak jak zdecydowana większość metod analitycznych metoda ta może być stosowana jednak tylko do rozwiązywania stosunkowo prostych problemów. Uwaga ta dotyczy szczególnie kształtu obszaru rozwiązania.

Transformacja zagadnienia brzegowego do przestrzeni generowanej przez wektory własne operatora dyskretnego stanowi także narzędzie do rozwiązywania pewnej klasy zagadnień odwrotnych przewodzenia ciepła. W pracy [63] przedstawiono np. koncepcję wykorzystania transformacji spektralnej do zmniejszenia stopni swobody zagadnienia odwrotnego.

Proponowane w niniejszej pracy podejście opiera się na wykorzystaniu dyskretnej transformacji spektralnej do rozwiązania dyskretnego granicznego zadania odwrotnego w połączeniu z koncepcją *metody szeregów pochodnych* [7],[20], [21]. Opracowany algorytm zastosowano z powodzeniem do rozwiązania granicznych zadań odwrotnych zarówno jedno-, jak i dwuwymiarowych [23],[24],[51].

Będące przedmiotem rozważań odwrotne zagadnienie graniczne sprowadza się więc do identyfikacji nieustalonego pola temperatury w analizowanym obszarze i jest następująco sformułowane.

Niech będzie dany pewien obszar Ω ograniczony konturem Γ (rysunek 5.1.). Kontur Γ może być rzeczywistym brzegiem ciała lub może być w dowolny sposób wyodrębniony wewnątrz obszaru Ω. Poszukujemy zmiennego w czasie rozkładu temperatury w węzłach podziału różnicowego wewnątrz konturu Γ przy następujących założeniach:

- nie jest znany warunek początkowy wewnątrz obszaru Ω,
- nie są znane warunki brzegowe na konturze Γ,
- znany jest przebieg temperatury $\mathbf{T}_s(\tau)$, tzn. odpowiedź temperaturowa w wybranych l punktach na konturze Γ,
- rozwiązuje się *zagadnienie wewnętrzne*, tzn. identyfikacji podlega wyłącznie pole temperatury wewnątrz konturu Γ.

Przedstawione założenia sprowadzają problem do rozwiązania zagadnienia brzegowego w obszarze Ω z warunkami brzegowymi pierwszego (lub drugiego) rodzaju zadanymi na brzegu Γ. Zagadnienie jest oczywiście odwrotne, bowiem w dalszym ciągu nie jest znany warunek początkowy.

Rozwiązanie tak sformułowanego zagadnienia odwrotnego z wykorzystaniem dyskretnej transformacji spektralnej i koncepcji szeregów pochodnych przedstawiono w rozdziale 5.2. W rozdziale 5.1 przedstawiono podstawowe wiadomości dotyczące teorii metody DTS i jej stosowania do rozwiązywania zagadnień brzegowych przewodzenia ciepła.

5.1. Podstawy metody dyskretnej transformacji spektralnej

Założenia i podstawowe elementy metody DTS zostaną przedstawione na konkretnym przykładzie rozwiązania klasycznego zagadnienia brzegowego przewodzenia ciepła w domkniętym obszarze Ω ograniczonym brzegiem Γ. Zagadnienie to opisano równaniem Fouriera-Kirchhoffa w postaci:

$$\frac{1}{a}\frac{\partial T(\bar{r},\tau)}{\partial \tau} = \nabla^2 T(\bar{r},\tau) + \dot{q}_v(\bar{r},\tau) \tag{5.2}$$

Równanie (5.2) jest uzupełnione równaniami warunków brzegowych na brzegu Γ oraz warunkiem początkowym. Przyjmujemy przy tym, że rozpatrywane zagadnienie jest liniowe. Jeżeli do dyskretyzacji operatora Laplace'a występującego w równaniu (5.2) zastosuje się jedną z metod różnicowych (na przykład metodę elementu skończonego MES lub bilansów

elementarnych MBE) opartą na siatce N węzłów, to pole temperatury w węzłach obszaru Ω jest opisane następującym równaniem macierzowym:

$$\mathbf{C}\frac{d\mathbf{T}(\tau)}{d\tau} = \mathbf{A}\mathbf{T}(\tau) + \mathbf{b}(\tau) \tag{5.3}$$

gdzie **A** jest tzw. *macierzą przewodności*, **C** jest *macierzą pojemności* (zazwyczaj diagonalną), **T** jest wektorem temperatur węzłowych, a **b** jest wektorem współczynników wynikających z uwzględnienia warunków brzegowych i członów źródłowych. Macierz **A** jest operatorem dyskretnym powstałym z dyskretyzacji ciągłego różniczkowego operatora Laplace'a. Operator Laplace'a należy do klasy operatorów samosprzężonych, które spełniają warunek [10]:

$$\int_\Omega u(\bar{r})\,L\,[v(\bar{r})]\,d\bar{r} = \int_\Omega v(\bar{r})\,L\,[u(\bar{r})]\,d\bar{r} \tag{5.4}$$

gdzie $u(\bar{r})$, $v(\bar{r})$ są dwiema dowolnymi funkcjami należącymi do dziedziny operatora L.

Dyskretyzacja operatora samosprzężonego powinna prowadzić do uzyskania operatora dyskretnego o analogicznych własnościach: a więc do macierzy symetrycznej [10]. Większość metod dyskretnych stosowanych do rozwiązywania zagadnień przewodzenia ciepła, jak na przykład MRS, MBE czy MES (z wyjątkiem ujęcia bilansowego), prowadzi do utworzenia symetrycznych operatorów dyskretnych (macierzy **A**). Jest to istotna zaleta, gdyż stosowanie metody DTS dla zagadnień z symetrycznymi operatorami dyskretnymi jest znacznie prostsze niż w przypadku operatorów niesymetrycznych.

Sprowadzenie rozpatrywanego zagadnienia do równania macierzowego typu (5.1), jak na przykład do równania (5.3) opisującego nieustalone pole temperatury, jest wstępnym etapem stosowania metody DTS. Równanie typu (5.1) może się różnić rodzajem operatora różniczkowego występującego po lewej stronie równania, ale po prawej stronie musi pojawić się wyrażenie będące iloczynem wektora wartości funkcji w węzłach podziału różnicowego i operatora dyskretnego (macierzy) charakterystycznego dla danego zagadnienia.

Układ równań różniczkowych (5.1) zawiera N równań, przy czym N jest liczbą zazwyczaj na tyle dużą, że analityczne rozwiązanie układu z zastosowaniem klasycznych metod analizy matematycznej jest niemożliwe. Celem stosowania metody DTS jest taka transformacja układu (5.1), w wyniku której otrzymuje się układ niezależnych równań różniczkowych w dziedzinie transformaty. Rozwiązanie tych równań jest już zazwyczaj bardzo proste i wymaga stosowania elementarnych metod analitycznych.

Kompletna procedura postępowania prowadząca do rozwiązania zagadnienia (5.1) za pomocą metody DTS przedstawia się następująco (rysunek 5.2.):

- rozwiązanie dyskretnego zagadnienia własnego w celu wyznaczenia wartości własnych β_i i wektorów własnych $\mathbf{w}_i$,
- diagonalizacja układu (5.1) oparta na przekształceniu podobieństwa,
- dyskretna transformacja spektralna układu (5.1),
- rozwiązanie równań w dziedzinie transformaty,
- retransformacja do dziedziny oryginału.

5.1.1. Dyskretne zagadnienie własne

Dyskretne zagadnienie własne jest opisane równaniem:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{w}_i = \beta_i \mathbf{w}_i \tag{5.5}$$

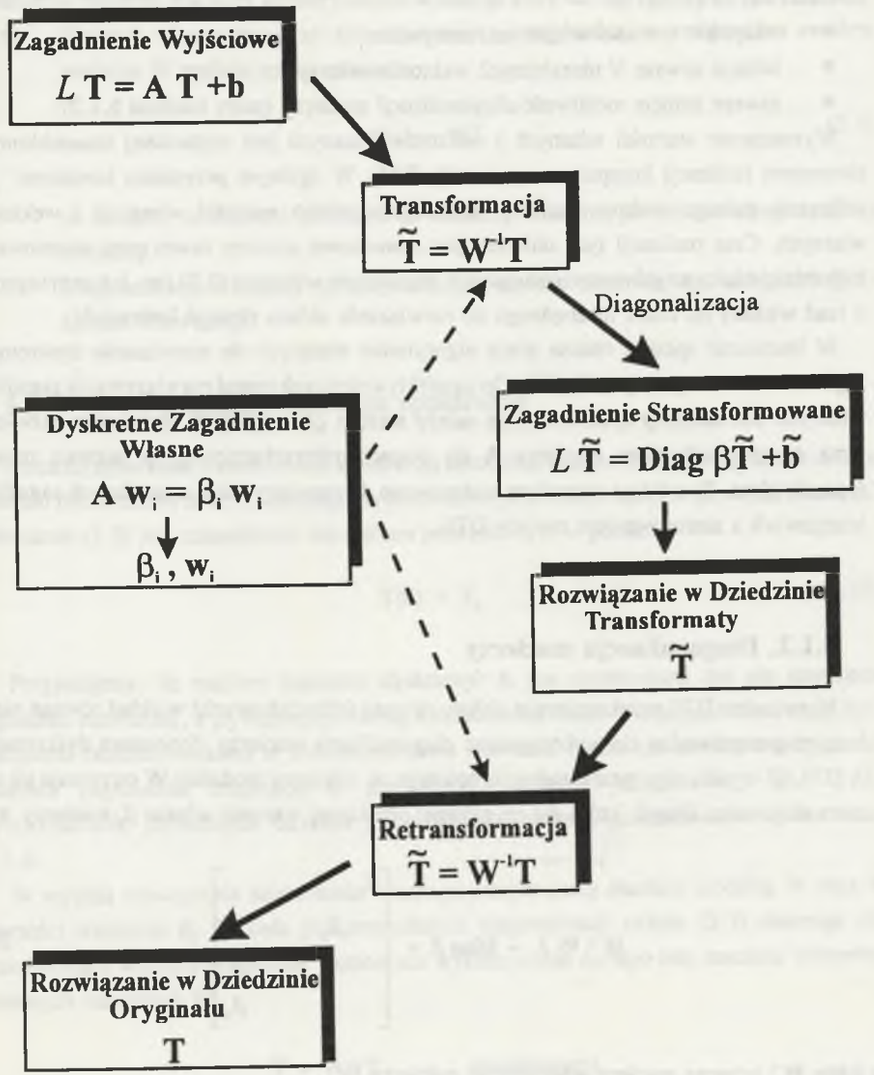
Wyznaczenie wartości własnych β_i oraz wektorów własnych $\mathbf{w}_i$ sprowadza się do znalezienia nietrywialnego rozwiązania równania macierzowego:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{Diag}\beta)\mathbf{w}_i = \mathbf{0} \tag{5.6}$$

gdzie **Diag**β jest macierzą diagonalną, która ma na głównej przekątnej wartości własne macierzy **A**. Równanie (5.6) może mieć rozwiązanie nietrywialne $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ wtedy i tylko wtedy, gdy macierz (**A**-**Diag**β) jest osobliwa, tzn. rząd tej macierzy r spełnia warunek $r<N$ (gdzie N jest rozmiarem macierzy **A**). Wartości własne β_i (i=1,2,...,N) macierzy **A** są więc rozwiązaniem równania:

$$\det[\boldsymbol{A} - \boldsymbol{Diag}\,\beta] = 0 \tag{5.7}$$

Wektor utworzony z wszystkich wartości własnych β_i nazywany jest *widmem macierzy*. Danej wartości własnej β_i odpowiada wektor własny $\mathbf{w}_i$ spełniający równanie (5.5). Macierz kwadratowa **W**, której kolumny utworzone są przez wektory własne $\mathbf{w}_i$, nosi nazwę *macierzy modalnej*.



Rys. 5.2. *Rozwiązania zagadnienia brzegowego za pomocą metody DTS*
Fig. 5.2. *Solution of the boundary problem with the discrete eigenvalue method*

Jeżeli macierz **A** jest symetryczna, to rozwiązanie zagadnienia własnego (5.5) ma szczególne cechy (upraszczające znacznie stosowanie metody DTS). W takim przypadku dowodzi się, że [10],[11]:

- wszystkie wartości własne są rzeczywiste,
- istnieje zawsze N niezależnych wektorów własnych,
- zawsze istnieje możliwość *diagonalizacji* macierzy (patrz rozdział 5.1.2).

Wyznaczenie wartości własnych i wektorów własnych jest najbardziej czasochłonnym elementem realizacji komputerowej metody DTS. W ogólnym przypadku konieczne jest obliczenie pełnego widma macierzy **A**, tzn. wszystkich wartości własnych i wektorów własnych. Czas realizacji tych obliczeń jest stosunkowo znaczny nawet przy zastosowaniu najbardziej efektywnych metod rozwiązania zagadnienia własnego (5.5) (np. jest przynajmniej o rząd większy od czasu niezbędnego do rozwiązania układu równań liniowych).

W literaturze spotkać można wiele algorytmów służących do rozwiązania dyskretnego zagadnienia własnego, np. [69],[70]. Do najefektywniejszych metod rozwiązywania zagadnień własnych dla macierzy symetrycznych należy metoda *QR i QL* [70], stosowana zazwyczaj wraz ze sprowadzeniem macierzy **A** do postaci trójprzekątniowej za pomocą metody *Householdera*. Tę właśnie procedurę zastosowano do rozwiązywania omawianych zagadnień brzegowych z zastosowaniem metody DTS.

5.1.2. Diagonalizacja macierzy

W metodzie DTS przekształcenie układu równań (różniczkowych) w układ równań niezależnych przeprowadza się wykorzystując *diagonalizację* macierzy (operatora dyskretnego) **A** [10]. W wyniku tego przekształcenia opartego na macierzy modalnej **W** otrzymuje się macierz diagonalną **Diag**β, która ma na głównej przekątnej wartości własne β_i macierzy **A**:

$$\mathbf{W}^{-1}\,\mathbf{W}\,\mathbf{A} = \mathbf{Diag}\,\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 & & & \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \beta_N \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

gdzie $\mathbf{W}^{-1}$ oznacza macierz odwrotną do macierzy **W**.

W przypadku ogólnym, gdy macierz **A** jest niesymetryczna, to jej diagonalizacja pociąga za sobą konieczność obliczania macierzy odwrotnej do macierzy modalnej $\mathbf{W}^{-1}$, co znacznie

wydłuża czas obliczeń (może także zaistnieć sytuacja, że macierz **W** jest osobliwa i diagonalizacja nie jest możliwa). Wady tej nie mają macierze symetryczne. Wektory własne i macierze modalne macierzy symetrycznych wykazują kilka bardzo istotnych cech [10],[11]:

a) Wektory własne macierzy symetrycznej są *ortogonalne*, a *ortogonalna macierz* modalna **W** spełnia ważny związek:

$$\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}^{T} \tag{5.9}$$

co oznacza, że macierz odwrotna do macierzy modalnej jest równa transpozycji tej macierzy.

b) Diagonalizacja macierzy symetrycznej jest zawsze możliwa, tzn. zależność (5.8) zawsze obowiązuje.

5.1.3. Dyskretna transformacja spektralna

Przebieg dyskretnej transformacji spektralnej zostanie przedstawiony na przykładzie układu równań różniczkowych (5.3) opisujących nieustalone pole temperatury w pewnym obszarze. Równanie (5.3) jest uzupełnione warunkiem początkowym w postaci:

$$\mathbf{T}(0) = \mathbf{T}_0 \tag{5.10}$$

Przyjmujemy, że macierz (operator dyskretny) **A** jest symetryczna (co nie zmniejsza ogólności rozważań), a jej współczynniki są niezależne od czasu. Funkcjami czasu mogą być natomiast elementy wektora **b**. Dla uproszczenia rozważań można też chwilowo przyjąć, że macierz pojemności cieplnych **C** jest równa macierzy jednostkowej, tzn. **C**=**I**. Przekształcenie pozwalające uzyskać jednostkową macierz **C** przedstawiono w rozdziale 5.1.4.

W wyniku rozwiązania zagadnienia własnego otrzymujemy macierz modalną **W** oraz N wartości własnych β_i. W celu przeprowadzenia diagonalizacji układu (5.3) dokonuje się transformacji wektora temperatur węzłowych wykorzystując do tego celu macierz wektorów własnych (modalną) **W**:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}} &= \mathbf{W}^{-1}\mathbf{T} \quad - \text{ transformacja} \\ \mathbf{T} &= \mathbf{W}\bar{\mathbf{T}} \quad - \text{ retransformacja} \end{aligned} \tag{5.11}$$

Z uwagi na założoną symetrię macierzy **A** obowiązuje związek (5.9) i stąd otrzymujemy:

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{W}^T\mathbf{T} \tag{5.12}$$

gdzie $\mathbf{W}^T$ oznacza transponowaną postać macierzy **W**. W podobny sposób dokonuje się transformacji wszystkich pozostałych wektorów, a więc na przykład transformacji warunku początkowego:

$$\tilde{\mathbf{T}}_0 = \mathbf{W}^T\mathbf{T}_0 \tag{5.13}$$

Podstawiając zależność (5.11) do równania (5.3) otrzymuje się:

$$\frac{d(\mathbf{W}\tilde{\mathbf{T}}(\tau))}{d\tau} = \mathbf{A}\mathbf{W}\tilde{\mathbf{T}}(\tau) + \mathbf{b}(\tau) \tag{5.14}$$

Mnożąc lewostronnie równanie (5.14) przez macierz $\mathbf{W}^{-1}$ (oraz uwzględniając fakt, że elementy macierzy modalnej nie są funkcjami czasu) uzyskujemy:

$$\mathbf{W}^{-1}\mathbf{W}\frac{d\tilde{\mathbf{T}}(\tau)}{d\tau} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{W}\tilde{\mathbf{T}}(\tau) + \mathbf{W}^{-1}\mathbf{b}(\tau) \tag{5.15}$$

Wykorzystując związek $\mathbf{W}^{-1}\mathbf{W} = \mathbf{I}$, gdzie **I** jest macierzą jednostkową, oraz zależność (5.12) otrzymuje się:

$$\frac{d\tilde{\mathbf{T}}(\tau)}{d\tau} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{W}\tilde{\mathbf{T}}(\tau) + \mathbf{W}^T\mathbf{b}(\tau) \tag{5.16}$$

Wyrażenie $\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{W}$ diagonalizuje macierz **A** (patrz równanie (5.8)) i w związku z tym otrzymujemy równanie:

$$\frac{d\tilde{\mathbf{T}}(\tau)}{d\tau} = \mathbf{Diag}\beta\tilde{\mathbf{T}}(\tau) + \tilde{\mathbf{b}}(\tau) \tag{5.17}$$

gdzie $\tilde{\mathbf{b}}(\tau)$ oznacza, zgodnie z (5.12), transformatę wektora $\mathbf{b}(\tau)$.

Równanie macierzowe (5.17) jest układem równań różniczkowych w dziedzinie transformaty $\tilde{\mathbf{T}}(\tau)$:

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{T}_1(\tau)}{d\tau} = \beta_1\tilde{T}_1(\tau) + \tilde{b}_1(\tau) \\ \ldots = \ldots + \ldots \\ \dfrac{d\tilde{T}_N(\tau)}{d\tau} = \beta_N\tilde{T}_N(\tau) + \tilde{b}_N(\tau) \end{cases} \tag{5.18}$$

gdzie:

$$\tilde{b}_i(\tau) = \mathbf{w}_i^T\mathbf{b}(\tau) = \sum_{j=1}^{N} w_{ij}b_j(\tau) \tag{5.19}$$

Każde z równań układu (5.18) całkuje się dołączając warunek początkowy $\tilde{T}_i(0)=\tilde{T}_{i0}=\mathbf{w}_i^T\mathbf{T}_0$.

5.1.4. Rozwiązanie równań i retransformacja rozwiązania

Każde z równań (5.18) rozwiązuje się oddzielnie. W analizowanym przypadku całka ogólna da się wyrazić w następującej, uwzględniającej związek (5.19), elementarnej postaci:

$$\tilde{T}_i(\tau) = e^{\beta_i\tau}\tilde{T}_{0i} + \sum_{j=1}^{N} w_{ij}\int_0^{\tau} e^{\beta_i(\tau-t)}b_j(t)\,dt \tag{5.20}$$

W celu wyznaczenia rozwiązania szczególnego należy obliczyć całki występujące po prawej stronie zależności (5.20). Liczba tych całek jest zazwyczaj niewielka z uwagi na fakt, że większość elementów wektora **b** jest równa zero, a ponadto niezerowe elementy są grupami jednakowe, gdyż odnoszą się do brzegu z tym samym warunkiem brzegowym. Ta sama uwaga odnosi się do tych elementów wektora **b**, które przedstawiają wpływ działania źródeł ciepła. Tak więc ostatecznie należy wyznaczyć niewielką liczbę całek. Całki te wprowadza się do (5.20) jako znane funkcje czasu $\phi_{ij}(\tau)$:

$$\phi_{ij} = \int_0^{\tau} e^{\beta_i(\tau-t)}b_j(t)\,dt \tag{5.21}$$

Tak więc rozwiązanie szczególne przybiera postać:

$$\bar{T}_i(\tau) = e^{\beta_i \tau} \bar{T}_{0i} + \sum_{j=1}^{N} w_{ij} \phi_{ij}(\tau) \tag{5.22}$$

Ostatecznie rozwiązanie wszystkich równań układu (5.18) da się zapisać w postaci następującego wektora:

$$\bar{\mathbf{T}}(\tau) = \mathbf{Diag}\, e^{\beta \tau}\, \bar{\mathbf{T}}_0 + \mathbf{u}(\tau) \tag{5.23}$$

gdzie **Diag** $e^{\beta\tau}$ jest macierzą diagonalną zawierającą na głównej przekątnej elementy $e^{\beta_i \tau}$, a elementy wektora **u** są określone zależnością:

$$u_i(\tau) = \sum_{j=1}^{N} w_{ij} \phi_{ij}(\tau) \tag{5.24}$$

Ostateczne rozwiązanie problemu (5.3) uzyskuje się przez retransformację (5.23) daną zależnością (5.11):

$$\mathbf{T}(\tau) = \mathbf{W}\left[\mathbf{Diag}\, e^{\beta \tau}\, \bar{\mathbf{T}}_0 + \mathbf{u}(\tau)\right] \tag{5.25}$$

Równania typu (5.25) nie są rozbieżne dla czasu $\tau \to \infty$, bowiem - jak dowodzi się w [24] - wszystkie wartości własne analizowanej macierzy **A** spełniają warunek $\beta_i < 0$. Macierz **A** jest bowiem nie tylko symetryczna, ale również ujemnie określona.

Równanie (5.25) wyprowadzone zostało przy założeniu, że macierz pojemności cieplnych **C** występująca w równaniu (5.3) jest macierzą jednostkową. W rzeczywistości taki przypadek, aczkolwiek możliwy (jednakowe pojemności cieplne wszystkich elementów różnicowych), występuje raczej sporadycznie. Uwzględnienie faktu $\mathbf{C} \neq \mathbf{0}$ polega na takim przekształceniu wyjściowego równania (5.3), aby nie stracić symetrii operatora dyskretnego **A**. Przekształcenie takie jest stosunkowo proste, jeśli założymy, że macierz **C** jest macierzą diagonalną (sytuacja taka występuje w większości rozwiązywanych problemów).

Wprowadzając do równania (5.3) przekształcenie:

$$\mathbf{T} = \mathbf{C}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{T}^{*} \tag{5.26}$$

oraz mnożąc to równanie lewostronnie przez $\mathbf{C}^{-1/2}$ otrzymujemy:

$$\frac{d\mathbf{T}^{*}(\tau)}{d\tau} = \mathbf{A}^{*}\mathbf{T}^{*}(\tau) + \mathbf{b}^{*}(\tau) \tag{5.27}$$

gdzie:

$$\mathbf{b}^{*}(\tau) = \mathbf{B}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{b}(\tau)$$
$$\mathbf{A}^{*} = \mathbf{C}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{A}\, \mathbf{C}^{-\frac{1}{2}} \tag{5.28}$$

Diagonalna macierz $\mathbf{C}^{-1/2}$ zawiera na głównej przekątnej odwrotności pierwiastków kwadratowych z elementów C_{ii}. Macierz $\mathbf{A}^{*}$ pozostaje symetryczna, gdyż z uwagi na diagonalną postać macierzy $\mathbf{C}^{-1/2}$ przekształcenie (5.28) nie powoduje utraty symetrii wynikowej macierzy $\mathbf{A}^{*}$. Ostatecznie więc rozwiązanie problemu (5.3) sprowadza się do rozwiązania równania (5.27), z tym tylko że warunek początkowy ma w tym przypadku postać $\mathbf{T}_0^{*} = \mathbf{C}^{-1/2}\mathbf{T}_0$. Rozwiązanie (5.25) należy przekształcić opierając się na zależności:

$$T_i(\tau) = \frac{T_i^{*}(\tau)}{\sqrt{C_{ii}}} \tag{5.29}$$

Dodatkowe operacje związane z przekształceniem (5.26) są bardzo proste i nie zwiększają w istotny sposób czasu obliczeń. W zamian za to nie tracimy symetrii operatora dyskretnego **A**, co ma istotny wpływ na zmniejszenie kosztu numerycznego rozwiązania.

5.2. Rozwiązanie odwrotnego zagadnienia granicznego

Przedmiotem rozważań jest rozwiązanie dyskretnego odwrotnego zagadnienia granicznego polegającego na identyfikacji nieustalonego pola temperatury w pewnym obszarze Ω (rysunek 5.1). Zakłada się przy tym, że nie są znane warunki brzegowe na konturze Γ ograniczającym obszar rozwiązania Ω oraz że nie jest znany warunek początkowy $\mathbf{T}_0$. Znane są natomiast przebiegi temperatury w węzłach ulokowanych na brzegu Γ, tzn. znana jest odpowiedź temperaturowa w tych punktach. Tak sformułowane dyskretne zagadnienie może być opisane różniczkowym równaniem macierzowym:

$$\mathbf{C}\frac{d\mathbf{T}(\tau)}{d\tau} = \mathbf{A}\mathbf{T}(\tau) + \mathbf{D}\mathbf{T}_S(\tau) \tag{5.30}$$

gdzie:

A - operator dyskretny (macierz kwadratowa o rozmiarze N*N),

C - diagonalna macierz pojemności cieplnych,

D - diagonalna macierz współczynników,

$\mathbf{T}(\tau)$ - wektor nieznanych temperatur węzłowych,

$\mathbf{T}_S(\tau)$ - wektor znanych przebiegów temperatury lub strumienia ciepła (odpowiedź temperaturowa).

Wektor kolumnowy $\mathbf{T}_S$ (o długości N) zawiera l niezerowych elementów, tzn. l odpowiedzi temperaturowych, i ma następującą postać:

$$\mathbf{T}_S(\tau) = [\,.\;.\;0\;.\;.\;.\;T_{Si}(\tau)\;.\;.\;.\;0\;.\;.\;.\;T_{SL}(\tau)\;.\;.\;.\;0\;.\;.\,]^T \tag{5.31}$$

Z uwagi na fakt, że na brzegu obszaru zakładamy występowanie warunków brzegowych wyłącznie pierwszego lub drugiego rodzaju (temperatura $T_S(\tau)$, lub strumień ciepła $q_S(\tau)$), macierz współczynników **D** jest diagonalna i zawiera na głównej przekątnej stałe współczynniki.

W przeciwieństwie do klasycznego, prostego zagadnienia brzegowego, równanie (5.30) nie zawiera składników uwzględniających wpływ rzeczywistych warunków brzegowych. Ponadto nie jest znany warunek początkowy $\mathbf{T}_0$.

Dla uproszczenia wywodów będzie się w dalszej kolejności rozważać zagadnienie, w którym przyjmuje się $\mathbf{C} = \mathbf{I}$, tzn. przyjmuje się, że diagonalna macierz pojemności cieplnych jest równa macierzy jednostkowej. Zasady transformacji umożliwiającej w prosty sposób uwzględnienie faktu $\mathbf{C} \neq \mathbf{I}$ przedstawiono w rozdziale 5.1.4.

W pierwszym etapie rozwiązania tak postawionego zagadnienia granicznego dokonuje się transformacji spektralnej równania (5.30) opierając się na zależności (5.11), a następnie dokonuje się diagonalizacji macierzy **A**. Zakładamy przy tym, że macierz **A** jest symetryczna (obowiązuje zależność $\mathbf{W}^{-1}=\mathbf{W}^T$). W wyniku przeprowadzonej transformacji układu równań (5.30) otrzymujemy N niezależnych równań różniczkowych w dziedzinie transformaty $\tilde{T}(\tau)$.

$$\frac{d\tilde{\mathbf{T}}(\tau)}{d\tau} = \mathbf{Diag}\,\beta\,\tilde{\mathbf{T}}(\tau) + \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{T}_S(\tau) \tag{5.32}$$

gdzie:

Diagβ - diagonalna macierz wartości własnych macierzy **A**,

$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{W}^T\mathbf{D}$,

W - macierz wektorów własnych macierzy **A**.

Każde równanie układu (5.32) ma następującą postać:

$$\frac{d\tilde{T}_i(\tau)}{d\tau} = \beta_i\tilde{T}_i(\tau) + (\tilde{\mathbf{D}}\mathbf{T}_S(\tau))_i\,; \qquad i = 1,2,\ldots,N \tag{5.33}$$

gdzie:

$$(\tilde{\mathbf{D}}\mathbf{T}_S(\tau))_i = \sum_{j=1}^{N}\tilde{D}_{ij}\,T_{Sj}(\tau) \tag{5.34}$$

Suma ta zawiera jedynie l niezerowych składników, co wynika z postaci wektora $\mathbf{T}_S(\tau)$.

Całka ogólna równania różniczkowego (5.33) jest wyrażona następującą zależnością:

$$\tilde{T}_i(\tau) = e^{\beta_i\tau}\tilde{T}_{0i} + e^{\beta_i\tau}\int_0^{\tau} e^{-\beta_i t}\sum_{j=1}^{N}(\tilde{D}_{ij}T_{Sj}(t))dt \tag{5.35}$$

gdzie $\tilde{T}_{0i} = \mathbf{w}_i^T\mathbf{T}_0$.

W przypadku prostego zagadnienia brzegowego rozwiązanie problemu polegałoby na wyznaczeniu całek występujących w równaniu (5.35) i retransformacji (5.25).

W przypadku zagadnienia odwrotnego postępowanie takie nie jest możliwe. Układ równań (5.35) zawiera oprócz N nieznanych transformat temperatur węzłowych $\tilde{T}_i$ także N transformat $\tilde{T}_{0i}$ nieznanego warunku brzegowego T_{0i}. Jedna z możliwości rozwiązania zadania polega na takim przekształceniu równań (5.35), aby wyeliminować z nich nieznany warunek początkowy (a dokładnie, transformatę warunku początkowego $\tilde{T}_{0i}$). W tym celu wykorzystuje się koncepcję metody szeregów pochodnych [7],[21],[23],[24]. W tym przypadku eliminacja warunku początkowego odbywa się kosztem wprowadzenia do rozwiązania dodatkowych informacji: wartości pochodnych odpowiedzi temperaturowej względem czasu. Zgodnie z koncepcją metody szeregów pochodnych eliminacja nieznanego warunku początkowego polega na całkowaniu przez części całki występującej w równaniu (5.35). Pierwsze całkowanie daje w wyniku:

$$\tilde{T}_i(\tau) = e^{\beta_i\tau}\tilde{T}_{0i} + e^{\beta_i\tau}\left[-\beta_i^{-1}e^{-\beta_i t}\sum_{j=1}^{N}\tilde{D}_{ij}T_{Sj}(t)\right]_0^{\tau} + \beta_i^{-1}\int_0^{\tau} e^{-\beta_i t}\sum_{j=1}^{N}(\tilde{D}_{ij}T_{Sj}^{(1)}(t))dt \tag{5.36}$$

Po dokonaniu przekształceń otrzymuje się:

$$\tilde{T}_i(\tau) = e^{\beta_i \tau}\tilde{T}_{0i} - \beta_i^{-1}\sum_{j=1}^{N}\tilde{D}_{ij}T_{Sj}(\tau) + e^{\beta_i \tau}\beta_i^{-1}\sum_{j=1}^{N}\tilde{D}_{ij}T_{Sj}(0) + \beta_i^{-1}\int_0^{\tau} e^{-\beta_i t}\sum_{j=1}^{N}(\tilde{D}_{ij}T_{Sj}^{(1)}(t))dt \tag{5.37}$$

gdzie $T_{Sj}^{(1)}$ oznacza pierwszą pochodną odpowiedzi temperaturowej T_{Sj} względem czasu.

Dokonując operacji całkowania przez części nieskończoną liczbę razy można przekształcić zależność (5.35) do następującej postaci:

$$\tilde{T}_i(\tau) \approx e^{\beta_i \tau}\tilde{T}_{0i} - \sum_{k=0}^{\infty}(\beta_i^{-1})^{k+1}\sum_{j=1}^{N}\tilde{D}_{ij}T_{Sj}^{(k)}(\tau) + e^{\beta_i \tau}\sum_{k=0}^{\infty}(\beta_i^{-1})^{k+1}\sum_{j=1}^{N}\tilde{D}_{ij}T_{Sj}^{(k)}(0) \tag{5.38}$$

gdzie $T_{Sj}^{(k)}(\tau)$ oznacza k-tą pochodną odpowiedzi temperaturowej $T_{Sj}(\tau)$ względem czasu.

Znak przybliżonej równości występujący w zależności (5.38) wynika z pominięcia następującego wyrazu:

$$\zeta_i(\tau) = (\beta_i^{-1})^{(k+1)}\int_0^{\tau} e^{-\beta_i t}\sum_{j=1}^{N}(\tilde{D}_{ij}T_{Sj}(t))dt \tag{5.39}$$

Wyrażenie (5.39) pomija się przyjmując założenie o zbieżności szeregów występujących w zależności (5.38). Zbieżność tych szeregów wynika z następujących dwóch przesłanek:

- udowadnia się [24], że jeżeli w analizowanym zagadnieniu brzegowym występują wyłącznie warunki brzegowe pierwszego i drugiego rodzaju, to wartości własne operatora dyskretnego (w postaci unormowanej) spełniają warunek:

$$\beta_i < -1 \; ; \qquad i=1,2,\ldots,N \tag{5.40}$$

- zakłada się, że pochodne odpowiedzi temperaturowej względem czasu (również dla chwili czasu $\tau=0$) są ograniczone:

Zależność (5.38) zawiera w dalszym ciągu nieznaną wartość transformaty warunku początkowego $\bar{\mathbf{T}}$. Transformatę $\bar{\mathbf{T}}$ można wyeliminować dowodząc prawdziwości następującego twierdzenia (patrz Dodatek A):

$$\tilde{T}_{0i} = \tilde{T}_i(0) = -\sum_{k=0}^{\infty}(\beta_i^{-1})^{k+1}\sum_{j=1}^{N}\tilde{D}_{ij}T_{Sj}^{(k)}(0) \tag{5.41}$$

Podstawiając zależność (5.41) do (5.38) otrzymujemy rozwiązanie zagadnienia w dziedzinie transformaty:

$$\tilde{T}_i(\tau) = -\sum_{k=0}^{\infty}(\beta_i^{-1})^{k+1}\sum_{j=1}^{N}\tilde{D}_{ij}T_{Sj}^{(k)}(\tau) \tag{5.42}$$

lub w postaci macierzowej:

$$\bar{\mathbf{T}}(\tau) = -\sum_{k=0}^{\infty}\left[(\mathbf{Diag}\beta)^{-1}\right]^{k+1}\mathbf{W}^T\mathbf{D}\,\mathbf{T}_S^{(k)}(\tau) \tag{5.43}$$

Ostateczne rozwiązanie w dziedzinie oryginału otrzymuje się w wyniku retransformacji równania (5.43):

$$\mathbf{T}(\tau) = \mathbf{W}\bar{\mathbf{T}}(\tau) = -\mathbf{W}\sum_{k=0}^{\infty}\left[(\mathbf{Diag}\beta)^{-1}\right]^{k+1}\mathbf{W}^T\mathbf{D}\,\mathbf{T}_S^{(k)}(\tau) \tag{5.44}$$

Każde pojedyncze równanie występujące w zależności macierzowej (5.44) ma postać:

$$T_i(\tau) = -\sum_{m=1}^{N}w_{mi}\bar{T}_i(\tau) = -\sum_{m=1}^{N}w_{mi}\sum_{k=0}^{\infty}(\beta_i^{-1})^{k+1}\sum_{j=1}^{N}\tilde{D}_{ij}T_{Sj}^{(k)}(\tau) \tag{5.45}$$

Zależności (5.44) oraz (5.45) stanowią rozwiązanie postawionego odwrotnego zagadnienia granicznego. Zgodnie z istotą zastosowanej metody szeregów pochodnych uzyskane rozwiązanie wyraża się jako suma szeregu, którego elementy zawierają kolejne pochodne odpowiedzi temperaturowej względem czasu. Pod tym względem rozwiązanie jest podobne do innych rozwiązań bazujących na tej samej koncepcji: [7],[19],[20],[21]. Zasadnicza różnica polega na sposobie wyznaczania współczynników szeregu występujących w zależności (5.44). W przypadku zastosowanej metody transformacji spektralnej znacznie upraszcza się sposób wyznaczania tych współczynników. Współczynniki te wyrażają się wyłącznie poprzez

wartości własne i wektory własne operatora dyskretnego **A**, i są obliczane za pomocą standardowych procedur komputerowych. Unika się w ten sposób tworzenia, a następnie rozwiązywania pomocniczych układów równań, tak jak ma to miejsce w przypadku bezpośredniej metody szeregów pochodnych.

Niewątpliwą zaletą prezentowanego podejścia jest również to, że stopień złożoności algorytmu obliczeń oraz programów komputerowych pozostaje podobny, niezależnie od tego, czy rozpatrywany problem jest jedno- lub wielowymiarowy. W przypadku analizy tego samego obszaru rozwiązania dla różnych danych pomiarowych (różnych przebiegów odpowiedzi temperaturowej) nie zachodzi konieczność każdorazowego rozwiązywania zagadnienia własnego. Raz obliczone wartości i wektory własne są wtedy wykorzystywane dla kolejnych serii obliczeniowych.

Prezentowane podejście rozwiązania zadania granicznego może być stosowane do rozwiązywania problemów wewnętrznych polegających na identyfikacji pola temperatury wewnątrz obszaru ograniczonego pewnym konturem Γ. Rozwiązanie zagadnienia ekstrapolacji poza kontur Γ jest możliwe wtedy, gdy daje się sformułować dyskretne zagadnienie brzegowe dla obszaru na zewnątrz konturu Γ.

W pracy poddano analizie wyłącznie przypadek, w którym punkty pomiarowe umieszczone są na konturze ograniczającym obszar rozwiązania. W takiej bowiem sytuacji jest możliwe uzyskanie symetrycznej postaci operatora dyskretnego **A**. W sytuacji gdy punkty pomiarowe są umieszczone wewnątrz obszaru, konieczne jest przekształcenie wyjściowego układu równań do postaci (5.30). Operacja ta powoduje zazwyczaj utratę symetrii operatora **A**, a to z kolei powoduje komplikacje w realizacji numerycznej algorytmu.

Rozpatrywany problem, tak jak i wszystkie zadania odwrotne, jest problemem źle uwarunkowanym. W przypadku metod bazujących na koncepcji metody szeregów pochodnych złe uwarunkowanie objawia się przy obliczaniu pochodnych odpowiedzi temperaturowej względem czasu $T_{Sj}^{(k)}(\tau)$ (problem różniczkowania funkcji zadanej dyskretnie jest bowiem sam w sobie problemem źle uwarunkowanym). Istnieją różne metody łagodzenia złego uwarunkowania obliczania pochodnych. Do najbardziej popularnych należy zaliczyć metodę polegającą na aproksymacji dyskretnych przebiegów odpowiedzi temperaturowej funkcjami ciągłymi (wielomiany algebraiczne, funkcje sklejane itp.), a następnie różniczkowanie funkcji aproksymujących. Przeprowadzone w pracy [21] analizy dowodzą, że podejście to jest bardzo często zawodne w przypadku rozwiązywania analizowanych zadań granicznych. Dobre rezultaty uzyskano [19],[20],[21] wykorzystując do wyznaczania pochodnych odpowiedzi temperaturowych regularyzowany algorytm opierający się na zastąpieniu różniczkowania rozwiązaniem równania całkowego Volterry pierwszego rodzaju. Tę właśnie metodę wykorzystano do obliczeń pochodnych odpowiedzi temperaturowej w prezentowanym algorytmie.

5.3. Przykłady obliczeniowe

Weryfikację obliczeniową zastosowania metody dyskretnej transformacji spektralnej do rozwiązywania odwrotnych zagadnień granicznych przeprowadzono dla różnych przypadków dotyczących problemów nieustalonego przewodzenia ciepła w obszarach jedno-, jak i dwuwymiarowych. Wyniki pomiarów symulowano wykorzystując do tego celu wyniki rozwiązania analogicznego prostego zagadnienia brzegowego (rozwiązanie to jest traktowane jako dokładne). Tak jak i w przypadku metod prezentowanych w poprzednich rozdziałach odpowiedź temperaturową T_{Si} zakłóca się w sposób stochastyczny błędem δ wykorzystując do tego celu generator liczb pseudolosowych zgodnie z zależnością (2.2).

Szczegółową weryfikację metody i analizę wpływu rozpatrywanych parametrów na dokładność wyników przeprowadzono na przykładzie zagadnienia jednowymiarowego. W takim bowiem przypadku dokładność rozwiązania w niewielkim stopniu zależy od kształtu obszaru. Przedstawiono także wyniki obliczeń nieustalonego pola temperatury w obszarze dwuwymiarowym (pręt dwuwymiarowy i naroże symetryczne).

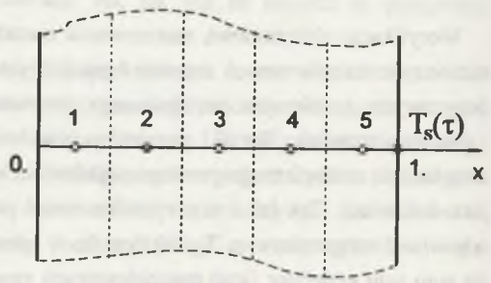
We wszystkich przypadkach wykorzystano metodę bilansów elementarnych do dyskretyzacji zagadnienia brzegowego i utworzenia dyskretnego modelu nieustalonego pola temperatury w postaci (5.30).

Przykład 5.1. Pole temperatury w płycie jednowymiarowej

Rozpatrzono nieustalone pole temperatury w płycie o symetrycznych warunkach brzegowych. Do rozważań przyjęto połowę grubości płyty. Podział różnicowy płyty przedstawiono na rysunku 5.3. Obliczenia prowadzono dla jednego punktu pomiarowego położonego na powierzchni płyty ($x=1$). Rozpatrzono zagadnienie z warunkiem brzegowym trzeciego rodzaju scharakteryzowanym liczbą Biota Bi oraz temperaturą płynu T_{pl}. Początkowa temperatura w płycie jest wyrównana i wynosi $T_0=0$, a temperatura płynu jest równa $T_{pl}=1$.

W każdym analizowanym przypadku zakres zmienności bezwymiarowej temperatury w płycie wynosił $T\in[0,1]$. Do analizy przyjęto trzy wartości zakłócenia pomiaru δ: 0.005, 0.01 oraz 0.05. Przy rozpatrywanym możliwym zakresie zmienności temperatury w płycie odpowiada to minimalnej wartości względnego zakłócenia pomiaru odpowiednio: 0.5%, 1% i 5%. Na podstawie eksperymentu numerycznego określono na 10 liczbę punktów czasu, na podstawie których wyznacza się pochodne odpowiedzi temperaturowej T_{SS}(Fo).

W obliczeniach ograniczono się do wyznaczenia pochodnej odpowiedzi temperaturowej do piątego rzędu włącznie, co zapewniało wystarczającą zbieżność rozwiązania.



Rys. 5.3. *Podział różnicowy płyty*
Fig. 5.3. *Discretization of the plane wall*

Na rysunkach prezentujących wyniki obliczeń przedstawiono rozwiązanie dokładne (linia ciągła) oraz rozwiązanie zagadnienia odwrotnego dla trzech różnych wartości zakłócenia δ. Wrażliwość na błąd pomiaru jest bowiem czynnikiem decydującym o wartości aplikacyjnej analizowanej metody. Prezentowane rezultaty dotyczą przebiegów temperatury w węźle nr 1 płyty, w tym bowiem węźle, najbardziej oddalonym od punktu pomiarowego, dokładność rozwiązania jest w rozważanym przypadku najmniejsza.

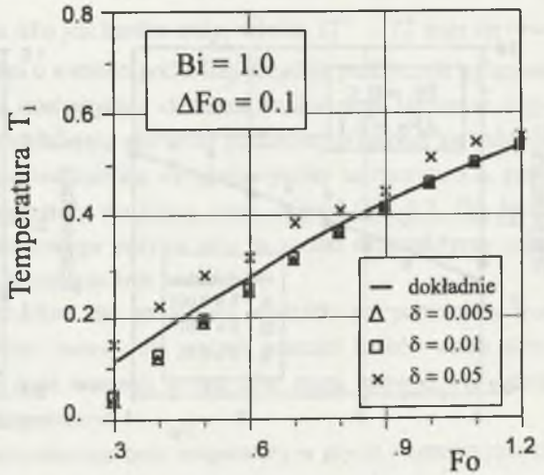
Dokładność rozwiązania zadania odwrotnego zależy od wielu czynników, przy czym do najistotniejszych zaliczyć należy:

- wielkość zakłócenia δ,
- liczbę Biota Bi,
- krok czasu ΔFo,
- wartość parametru regularyzacji α.

Wartość parametru regularyzacji wpływa decydująco na wyniki obliczeń pochodnej odpowiedzi temperaturowej względem czasu [21],[25]. Wartość tę dobrano za pomocą eksperymentu numerycznego. W analizowanych przypadkach najlepsze wyniki uzyskiwano dla wartości parametru $\alpha = 1$.

Jak już wspomniano, analizie poddano 10 punktów czasu, przy czym obliczenia rozpoczyna się od chwili czasu Fo=0.3. Dla wcześniejszych chwil czasu, bardzo bliskich chwili początkowej Fo=0, obliczone wartości pochodnych temperaturowych są mało stabilne i pogarszają wyraźnie dokładność obliczeń. Wynika to z faktu, że w chwilach początkowych zmiany gradientu temperatury są bardzo duże, co z kolei wpływa wyraźnie na dokładność obliczeń pochodnych odpowiedzi temperaturowej.

Na rysunkach 5.4 i 5.5 przedstawiono wyniki obliczeń temperatury w węźle nr 1 płyty dla trzech różnych wartości liczby Biota: Bi=1, Bi=0.5 i Bi=4. Wielkość kroku czasu jest stała i wynosi ΔFo=0.1. Dokładność wyników pogarsza się wraz ze zwiększeniem liczby Biota. Wynika to z faktu, że dla dużych liczb Biota już po krótkim okresie początkowym zmiany mierzonej temperatury powierzchni ciała są bardzo niewielkie i nie wnoszą znaczącej informacji o rozkładzie temperatury wewnątrz ciała.



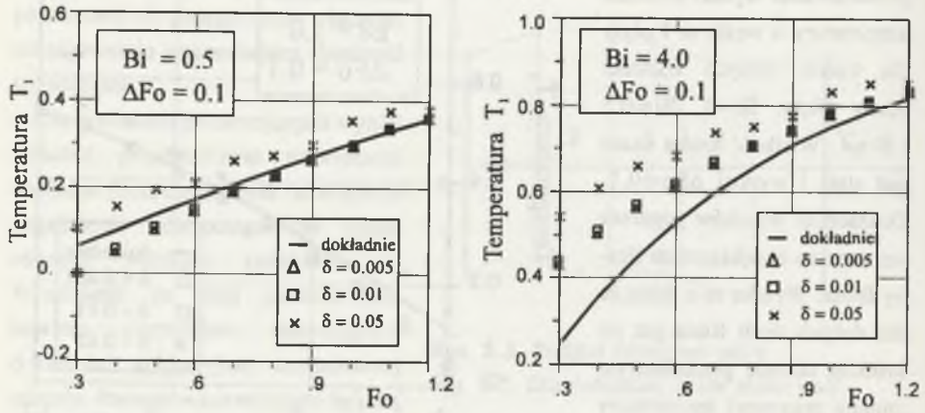
Rys. 5.4. *Rozkład temperatury w węźle nr 1*
Fig. 5.4. *Temperature distribution at the node no 1*

W przypadku gdy zmiany te są na przykład mniejsze od od błędu pomiaru, to obliczone wartości pochodnych są bardzo niedokładne (jest to szczególnie widoczne dla zakłócenia δ=0.05). Dla liczb Biota Bi=1.0 oraz Bi=0.5 uzyskano bardzo dobre rezultaty dla wszystkich wartości δ (rysunek 5.4 i 5.5).

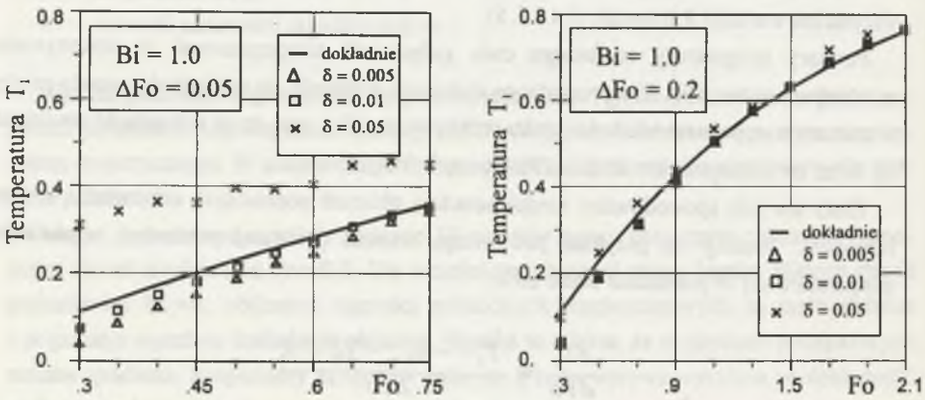
Pomiary temperatury na brzegu ciała (odpowiedź temperaturowa) są dokonywane w odstępach czasu ΔFo. Przeprowadzone obliczenia wykazały, że dokładność metody zależy w znacznym stopniu od wielkości kroku próbkowania ΔFo, przy czym dokładność zmniejsza się wraz ze zmniejszaniem kroku ΔFo (rysunek 5.6).

Efekt ten jest spowodowany niedokładnością obliczeń pochodnych odpowiedzi temperaturowej. Weźmy na przykład pod uwagę wartość pierwszej pochodnej odpowiedzi temperaturowej w przedziale czasu ΔFo:

$$\frac{dT_s}{d\,\mathrm{Fo}} \cong \frac{T_S^{k+1} + \delta_{k+1} - T_S^k - \delta_k}{\Delta\,\mathrm{Fo}}$$



Rys. 5.5. *Rozkład temperatury w węźle nr 1*
Fig. 5.5. *Temperature distribution at node 1*



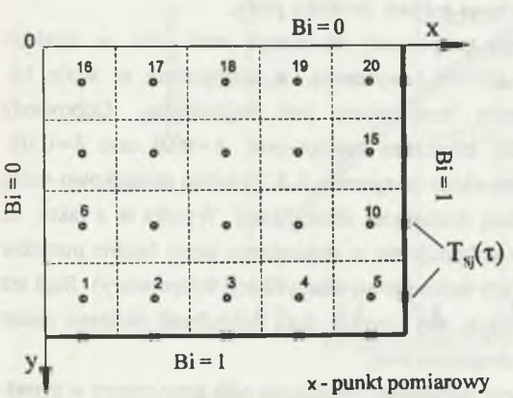
Rys. 5.6. *Rozkład temperatury w węźle nr 1*
Fig. 5.6. *Temperature distribution at node 1*

gdzie T_S jest dokładną wartością mierzonej temperatury, a k oznacza rozpatrywaną chwilę czasu. W przypadku gdy krok czasu ΔFo jest bardzo mały, różnica $T_S^{k+1} - T_S^k$ staje się również bardzo mała. W takim przypadku o wartości pochodnej decydują praktycznie wyłącznie błędy pomiaru δ_{k+1} i δ_k. Z uwagi na stochastyczny charakter błędów mogą się one w skrajnym przypadku sumować. Błędy wyznaczenia pierwszej pochodnej przenoszą się dalej na pochodne wyższych rzędów. Problem ten ilustrują wyraźnie wykresy na rysunku 5.6, gdzie przedstawiono wyniki obliczeń temperatury dla kroku czasu ΔFo=0.05 i 0.2. Dla błędu δ=0.005 i 0.01 nie obserwuje się znacznego wpływu ΔFo na wyniki obliczeń, przy czym dokładność jest tym większa, im większy jest krok czasu ΔFo.

Różnice te stają się jednak znaczne dla zakłócenia δ=0.05, co potwierdza tezę o przyczynie zmniejszenia dokładności metody dla małych wartości kroków czasu ΔFo. Należy jednak pamiętać, że zbyt duże wartości kroku ΔFo mogą spowodować utratę informacji o zmianach mierzonej temperatury.

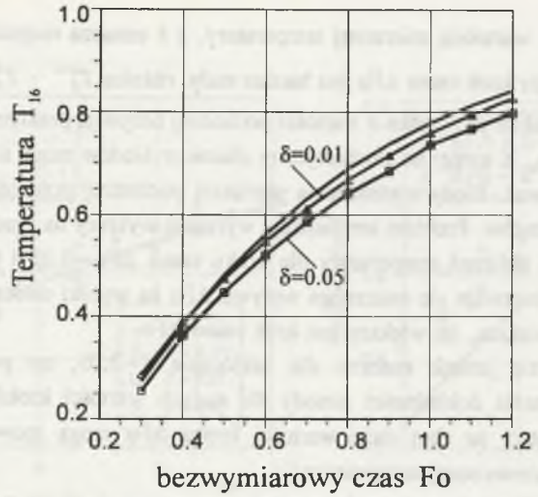
Przedstawione wyniki dotyczą nieustalonego pola temperatury w płycie z symetrycznymi warunkami brzegowymi. Przypadek płyty z niesymetrycznymi warunkami brzegowymi rozpatrzono w pracy [24]. W pracy [24] dokonano także analizy wpływu innych parametrów na dokładność metody (na przykład wpływ parametru regularyzacji).

Przykład 5.2. Nieustalone pole temperatury w pręcie dwuwymiarowym i narożu symetrycznym



Rys. 5.7. *Podział różnicowy pręta dwuwymiarowego*
Fig. 5.7. *Difference division of the 2D domain*

Następne dwa przykłady ilustrują zastosowanie metody DTS do identyfikacji nieustalonego pola temperatury w obszarach dwuwymiarowych. Istotną zaletą przedstawionego algorytmu jest jego uniwersalność w odniesieniu do rozwiązywania zagadnień jedno-, jak i wielowymiarowych. W obydwu przypadkach algorytm i program obliczeniowy nie ulegają zmianom. Zmienia się tylko postać i liczba danych wejściowych do obliczeń.

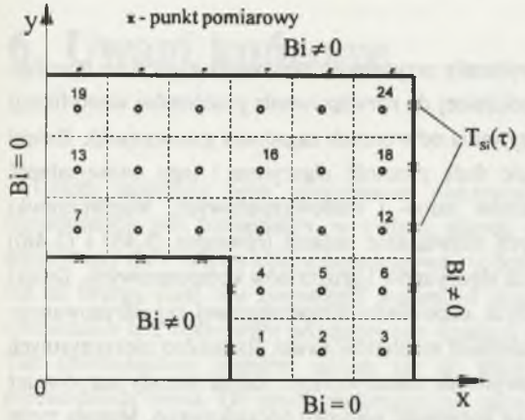


Rys. 5.8. *Przebieg temperatury w węźle 16 pręta*
Fig. 5.8. *Temperature distribution at node 16*

Pierwszy z prezentowanych przykładów dotyczy pola temperatury w dwuwymiarowym pręcie o przekroju prostokątnym i wymiarach $2a \cdot 2b$ (rysunek 5.7). Początkowa temperatura wewnątrz pręta jest wyrównana i wynosi $T_0=0$. Na brzegu płyty założono warunek brzegowy trzeciego rodzaju: liczba Biota Bi=1 oraz temperatura płynu $T_{pl}=1$. Z uwagi na symetrię warunków brzegowych rozpatrzono jedynie ćwiartkę płyty.

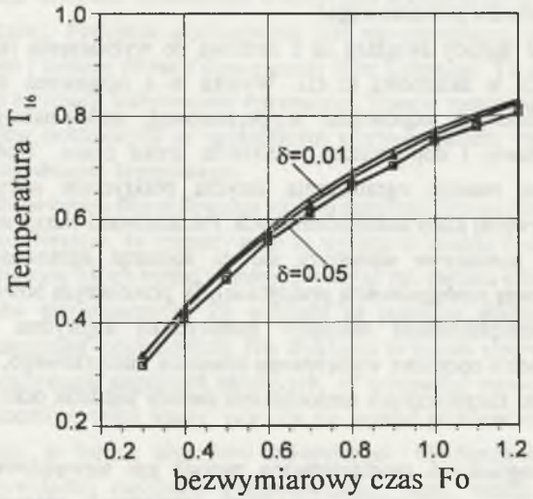
Na podstawie informacji o przebiegu temperatury na brzegu pręta, tzn. w węzłach o numerach: 1-5,10,15,20 z krokiem $\Delta Fo=0.1$ wyznacza się temperaturę w węźle 16. W węźle tym dokładność wyznaczenia temperatury jest najmniejsza. Odpowiedź temperaturowa została w tym przypadku zaburzona zakłóceniem $\delta=0.01$ oraz $\delta=0.05$. Wyniki identyfikacji temperatury przedstawiono na rysunku 5.8. Pomimo stosunkowo dużej wartości zakłócenia uzyskano bardzo dużą dokładność identyfikacji. Wynika to z faktu, że w tym przypadku pomiaru temperatury dokonuje się w stosunkowo dużej liczbie punktów (w stosunku do liczby punktów, w których dokonuje się identyfikacji temperatury). Stąd też ilość informacji jest zupełnie wystarczająca, aby uzyskać dużą dokładność obliczeń nawet przy dużych zakłóceniach odpowiedzi temperaturowej.

Podobne wyniki identyfikacji osiągnięto rozpatrując nieustalone pole temperatury w symetrycznym narożu dwuwymiarowym (rysunek 5.9). Przyjęto tu identyczny warunek początkowy oraz warunki brzegowe jak dla rozpatrywanego poprzednio pręta dwuwymiarowego ($T_0=0$, Bi=1, $T_{pl}=1$).



Rys. 5.9. *Podział różnicowy narożа*
Fig. 5.9. *Difference division of the corner*

Przebiegi temperatury są rejestrowane w 16 punktach leżących na brzegach naroża (z wyjątkiem oczywiście płaszczyzn symetrii, gdzie warunek brzegowy jest znany). Odpowiedź temperaturową zaburzano zakłóceniem $\delta=0.01$ oraz 0.05. Wyniki identyfikacji w węźle o numerze 16 przedstawiono na rysunku 5.10. I w tym przypadku osiągnięto dużą dokładność identyfikacji. Wynik ten należy jednak w dużej mierze przypisać bardzo korzystnemu stosunkowi liczby punktów pomiarowych do liczby identyfikowanych wielkości.



Rys. 5.10. *Przebieg temperatury w węźle 16 naroża*
Fig. 5.10. *Temperature distribution at node 16 of the corner*

5.4. Wnioski

Przeprowadzone testy numeryczne wykazały przydatność stosowania algorytmu opartego na metodzie dyskretnej transformacji spektralnej do rozwiązywania problemów identyfikacji nieustalonych pól temperatury (rozwiązywania odwrotnych zagadnień granicznych). Dzięki zastosowaniu metody DTS uzyskuje się dużą zwartość algorytmu i jego uniwersalność w podejściu do rozwiązywania problemów jedno- i wielowymiarowych. Współczynniki występujące w zależnościach opisujących rozwiązanie zadania (równania (5.45) i (5.46)) wyznaczane są za pomocą standardowych algorytmów i programów komputerowych. Dzięki zastosowaniu do wyznaczania pochodnych odpowiedzi temperaturowej regularyzowanego algorytmu [21],[23] uzyskano dobrą stabilność rezultatów nawet dla bardzo niekorzystnych warunków symulowanych podczas eksperymentu numerycznego. Zaletą metody jest również fakt, że do rozwiązania nie jest konieczna znajomość warunku początkowego. Metoda może być również stosowana (choć z w ograniczonym zakresie) do rozwiązywania problemów nieliniowych. W tym celu rozpatrywany przedział czasu dzieli się na podprzedziały, w których przyjmuje się stałe wartości parametrów termofizycznych. Następnie rozwiązuje się problem niezależnie w każdym z podprzedziałów, co jest o tyle łatwe, że metoda nie wymaga znajomości warunku początkowego.

Główne ograniczenia metody związane są z możliwą do wyznaczenia liczbą wyrazów szeregów występujących w zależności (5.45). Wynika to z ograniczeń w wyznaczeniu wysokiego rzędu pochodnych odpowiedzi temperaturowej, maksymalnego zakłócenia odpowiedzi temperaturowej i dopuszczalną wielkością kroku czasu. Trzeba jednak tu podkreślić, że te dwa ostatnie ograniczenia dotyczą praktycznie wszystkich metod rozwiązywania rozpatrywanej klasy zadań odwrotnych. Prezentowana wersja metody dotyczy sytuacji, gdy punkty pomiarowe umieszcza się na konturze ograniczającym obszar rozwiązania (co jest pewną niedogodnością praktyczną). W przeciwnym bowiem przypadku następuje znaczne skomplikowanie realizacji numerycznej algorytmu spowodowane nieuchronną utratą symetrii operatora wyjściowego równania macierzowego.

W stosunku do metod statystycznych niedostatkiem metody jest brak oceny statystycznej rozwiązania.

Pomimo pewnych ograniczeń zaprezentowana metoda jest niewątpliwie efektywnym narzędziem rozwiązywania omawianych zagadnień granicznych przewodzenia ciepła i w sensie uznawanych kryteriów [3] odpowiada podstawowym wymaganiom stawianym metodom rozwiązywania zagadnień odwrotnych.

6. Uwagi końcowe

Celem rozprawy było opracowanie efektywnych metod dotyczących identyfikacji nieustalonych pól temperatury w ciałach stałych na podstawie zmierzonego przebiegu temperatury (tzw. odpowiedzi temperaturowej) w dowolnych punktach położonych wewnątrz lub na brzegu ciała bez znajomości warunków brzegowych (wszystkich lub ich części) i ewentualnie bez znajomości początkowego rozkładu temperatury (warunku początkowego). Tak sformułowany problem zalicza się do klasy granicznych odwrotnych zagadnień przewodzenia ciepła. Od strony matematycznej zagadnienia odwrotne należą do problemów źle uwarunkowanych, co stawia szczególne wymagania przed metodami stosowanymi do ich rozwiązywania. Zasadniczy problem polega tu na stosowaniu algorytmów, które są stabilne i mało czułe na zakłócenia danych wejściowych.

W pracy przedstawiono trzy metody rozwiązania postawionego zagadnienia odwrotnego. Metody te bazują na dwóch odmiennych koncepcjach podejścia do problemu: stochastycznej i deterministycznej. Podejście stochastyczne jest reprezentowane przez metodę rachunku wyrównawczego i metodę filtracji dynamicznej (filtr Kalmana). Te dwie metody zalicza się do klasy metod estymacji statystycznie optymalnej. Trzecia metoda łączy w sobie koncepcję metody szeregów pochodnych ze spektralnym sformułowaniem modelu matematycznego rozważanego zagadnienia brzegowego.

Każda z metod wymaga sformułowania modelu matematycznego rozpatrywanego zagadnienia brzegowego. Przyjęto, że rozpatrywane są wyłącznie modele dyskretne pól temperatury utworzone za pomocą takich metod numerycznych jak np. metoda elementu skończonego lub metoda bilansów elementarnych. Ze względu na potrzeby praktyczne ograniczono się wyłącznie do zagadnień nieustalonych. Nie wyklucza to jednak stosowania przedstawionych metod do rozwiązywania zagadnień ustalonych. W przypadku metody filtracji dynamicznej jest to jednak możliwe tylko wtedy, gdy uda się zapisać problem w odpowiedniej do tego celu postaci (np. w formie algorytmu iteracyjnego). Ograniczenia takie nie występują natomiast w przypadku rachunku wyrównawczego, który można stosować do analizy zagadnienień ustalonych, jak i nieustalonych.

Przedstawione metody zostały zastosowane do rozwiązywania odwrotnych zagadnień granicznych, przy czym zakres zastosowań może być rozszerzony na inne problemy odwrotne. Uwaga ta dotyczy zwłaszcza metody rachunku wyrównawczego.

Dla podejścia stochastycznego (rachunek wyrównawczy, filtracja dynamiczna) stabilizacja rozwiązania opiera się na ważonej średniokwadratowej minimalizacji odchyłek identyfikowanych wielkości. W przypadku rachunku wyrównawczego konieczna jest zazwyczaj minimalizacja zarówno odchyłek wielkości mierzonych, jak i niewiadomych (algorytm rozszerzony). Ta metoda minimalizacji wymaga wykorzystania wszelkiej dostępnej *a priori* informacji o wielkościach niewiadomych. Można w ten sposób znacznie zmniejszyć czułość algorytmu na zakłócenia danych wejściowych i zwiększyć stabilność metody. Istotną zaletą podejścia stochastycznego jest możliwość bezpośredniej oceny statystycznej uzyskanych wyników, a tym samym ich wiarygodności.

Najbardziej uniwersalną z przedstawionych metod jest metoda rachunku wyrównawczego (w ujęciu rozszerzonym). Nadaje się ona do rozwiązywania bardzo szerokiej gamy problemów odwrotnych (a ogólnie szeroko rozumianych problemów uzgadniania). Dla analizowanych w pracy zagadnień uzyskuje się zadowalającą dokładność identyfikacji. Efektywne stosowanie metody wymaga jednak pewnego doświadczenia (a nawet intuicji) koniecznej do określenia początkowej oceny poszukiwanych wielkości. Dla zagadnień nieustalonych analizie można poddawać informacje pomiarowe dotyczące wszystkich lub części rozpatrywanych kroków czasu (przy czym liczba kroków czasu jest dowolna). Zwiększa to dokładność estymacji w porównaniu z metodą filtracji dynamicznej, lecz może znacznie komplikować strukturę algorytmu numerycznego (zwłaszcza dla zagadnień wielowymiarowych).

Metoda filtracji dynamicznej bazuje na podobnej koncepcji co metoda rachunku wyrównawczego. Z założenia jest ona przeznaczona do analizy procesów nieustalonych. Założenie to narzuca określony sposób formułowania modelu matematycznego procesu w postaci tzw. równania stanu (zarówno w postaci dyskretnej, jak i analitycznej). Formalizm ten jest z jednej strony zaletą metody, gdyż ułatwia znakomicie realizację numeryczną, ale równocześnie w wielu przypadkach może utrudniać utworzenie równania stanu. Algorytm metody jest bardzo zwarty i dogodny do implementacji numerycznej. Podobnie jak rachunek wyrównawczy, metoda filtracji dynamicznej może być stosowana do rozwiązywania zagadnień nieliniowych. Ważne jest również, że obydwie metody nie narzucają żadnych ograniczeń na lokalizację punktów pomiarowych, tzn. że punkty pomiarowe mogą być umieszczane w dowolnych miejscach, a więc wewnątrz ciała, jak i na jego powierzchni.

Zupełnie odmienne podejście przedstawia metoda dyskretnej transformacji spektralnej DTS. Zastosowanie metody DTS pozwoliło uzyskać znaczną zwartość i uniwersalność algorytmu obliczeń. W efekcie stopień złożoności metody jest podobny dla zagadnień jedno- i wielowymiarowych. W połączeniu z koncepcją metody szeregów pochodnych i przy wykorzystaniu regularyzowanego algorytmu obliczania pochodnych odpowiedzi temperaturowej uzyskano efektywny i stabilny algorytm rozwiązywania odwrotnych zadań

granicznych. Do obliczeń nie jest potrzebna znajomość warunku początkowego. W przedstawionej wersji metody lokalizację punktów pomiarowych ograniczono wyłącznie do zewnętrznego konturu obszaru rozwiązania, przy czym kontur ten nie musi się oczywiście pokrywać z rzeczywistym brzegiem obszaru. W takim bowiem przypadku uzyskuje się znaczne uproszczenie numerycznej realizacji algorytmu z uwagi na występującą symetrię operatora dyskretnego. Należy tu także wspomnieć o ograniczeniach występujących przy stosowaniu metody DTS do rozwiązywania problemów nieliniowych.

Przedstawione metody spełniają większość kryteriów ([3], rozdział 2.1), które powinny spełniać efektywne metody rozwiązywania problemów źle uwarunkowanych takich jak analizowane graniczne zagadnienia odwrotne przewodzenia ciepła. Przeprowadzono liczne obliczenia, których celem była weryfikacja stabilności i dokładności metod. Zastosowane testy numeryczne stawiały przed analizowanymi metodami bardzo ostre wymagania. Uzyskane wyniki obliczeniowe pozwalają stwierdzić, że zastosowane metody są efektywnym narzędziem rozwiązywania rozpatrywanej klasy zagadnień odwrotnych. Możliwe jest również rozszerzenie pola zastosowań tych metod na zadania innej klasy, jak np. zagadnienia odwrotne ze zmianą fazy czy odwrotne zagadnienia współczynnikowe.

W pracy zawarte są w dużej mierze rezultaty wieloletnich badań autora dotyczących rozwiązywania zagadnień odwrotnych przewodzenia ciepła i opublikowanych np. w [23], [24],[25],[39-52],[57,58],[61,62]. W rozważaną problematykę rozwiązywania granicznych zagadnień odwrotnych wniósł autor swój własny wkład twórczy.

W dziedzinie zastosowań rachunku wyrównawczego istotnym wkładem autora jest opracowanie metody rozwiązywania zagadnień odwrotnych z wykorzystaniem wszelkiej dostępnej *a priori* informacji o procesie. Podejście takie umożliwia znaczną poprawę stabilności i dokładności wyników rozwiązania wszelkich problemów słabo uwarunkowanych. Zastosowane podejście ma od strony matematycznej cechy algorytmów regularyzowanych. Dla zagadnień przepływu ciepła zaproponowana metoda może być stosowana do rozwiązywania zarówno zagadnień nieustalonych, jak i ustalonych.

W przypadku metody filtracji dynamicznej wkład autora polega na poszerzeniu zakresu zastosowań metody na rozwiązywanie zagadnienień nieliniowych, tzn. problemów jednoczesnej identyfikacji pola temperatury i warunków brzegowych. Nowatorskie jest także zastosowanie metody filtracji do rozwiązania granicznych zagadnień odwrotnych.

Autor po raz pierwszy wykorzystał metodę dyskretnej transformacji spektralnej wraz z koncepcją metody szeregów pochodnych do sformułowania modelu odwrotnego zagadnienia granicznego. Dzięki takiemu właśnie podejściu udało się autorowi znacznie uprościć opis matematyczny problemu w stosunku do innych rozwiązań bazujących na koncepcji szeregów pochodnych. Uzyskano uniwersalną postać algorytmu rozwiązania zarówno zagadnień jedno- jak i wielowymiarowych. Metoda zapewnia ponadto dużą stabilność rezultatów.

Dla podejścia stochastycznego (rachunek wyrównawczy, filtracja dynamiczna) stabilizacja rozwiązania opiera się na ważonej średniokwadratowej minimalizacji odchyłek identyfikowanych wielkości. W przypadku rachunku wyrównawczego konieczna jest zazwyczaj minimalizacja zarówno odchyłek wielkości mierzonych, jak i niewiadomych (algorytm rozszerzony). Ta metoda minimalizacji wymaga wykorzystania wszelkiej dostępnej *a priori* informacji o wielkościach niewiadomych. Można w ten sposób znacznie zmniejszyć czułość algorytmu na zakłócenia danych wejściowych i zwiększyć stabilność metody. Istotną zaletą podejścia stochastycznego jest możliwość bezpośredniej oceny statystycznej uzyskanych wyników, a tym samym ich wiarygodności.

Najbardziej uniwersalną z przedstawionych metod jest metoda rachunku wyrównawczego (w ujęciu rozszerzonym). Nadaje się ona do rozwiązywania bardzo szerokiej gamy problemów odwrotnych (a ogólnie szeroko rozumianych problemów uzgadniania). Dla analizowanych w pracy zagadnień uzyskuje się zadowalającą dokładność identyfikacji. Efektywne stosowanie metody wymaga jednak pewnego doświadczenia (a nawet intuicji) koniecznej do określenia początkowej oceny poszukiwanych wielkości. Dla zagadnień nieustalonych analizie można poddawać informacje pomiarowe dotyczące wszystkich lub części rozpatrywanych kroków czasu (przy czym liczba kroków czasu jest dowolna). Zwiększa to dokładność estymacji w porównaniu z metodą filtracji dynamicznej, lecz może znacznie komplikować strukturę algorytmu numerycznego (zwłaszcza dla zagadnień wielowymiarowych).

Metoda filtracji dynamicznej bazuje na podobnej koncepcji co metoda rachunku wyrównawczego. Z założenia jest ona przeznaczona do analizy procesów nieustalonych. Założenie to narzuca określony sposób formułowania modelu matematycznego procesu w postaci tzw. równania stanu (zarówno w postaci dyskretnej, jak i analitycznej). Formalizm ten jest z jednej strony zaletą metody, gdyż ułatwia znakomicie realizację numeryczną, ale równocześnie w wielu przypadkach może utrudniać utworzenie równania stanu. Algorytm metody jest bardzo zwarty i dogodny do implementacji numerycznej. Podobnie jak rachunek wyrównawczy, metoda filtracji dynamicznej może być stosowana do rozwiązywania zagadnień nieliniowych. Ważne jest również, że obydwie metody nie narzucają żadnych ograniczeń na lokalizację punktów pomiarowych, tzn. że punkty pomiarowe mogą być umieszczane w dowolnych miejscach, a więc wewnątrz ciała, jak i na jego powierzchni.

Zupełnie odmienne podejście przedstawia metoda dyskretnej transformacji spektralnej DTS. Zastosowanie metody DTS pozwoliło uzyskać znaczną zwartość i uniwersalność algorytmu obliczeń. W efekcie stopień złożoności metody jest podobny dla zagadnień jedno- i wielowymiarowych. W połączeniu z koncepcją metody szeregów pochodnych i przy wykorzystaniu regularyzowanego algorytmu obliczania pochodnych odpowiedzi temperaturowej uzyskano efektywny i stabilny algorytm rozwiązywania odwrotnych zadań

granicznych. Do obliczeń nie jest potrzebna znajomość warunku początkowego. W przedstawionej wersji metody lokalizację punktów pomiarowych ograniczono wyłącznie do zewnętrznego konturu obszaru rozwiązania, przy czym kontur ten nie musi się oczywiście pokrywać z rzeczywistym brzegiem obszaru. W takim bowiem przypadku uzyskuje się znaczne uproszczenie numerycznej realizacji algorytmu z uwagi na występującą symetrię operatora dyskretnego. Należy tu także wspomnieć o ograniczeniach występujących przy stosowaniu metody DTS do rozwiązywania problemów nieliniowych.

Przedstawione metody spełniają większość kryteriów ([3], rozdział 2.1), które powinny spełniać efektywne metody rozwiązywania problemów źle uwarunkowanych takich jak analizowane graniczne zagadnienia odwrotne przewodzenia ciepła. Przeprowadzono liczne obliczenia, których celem była weryfikacja stabilności i dokładności metod. Zastosowane testy numeryczne stawiały przed analizowanymi metodami bardzo ostre wymagania. Uzyskane wyniki obliczeniowe pozwalają stwierdzić, że zastosowane metody są efektywnym narzędziem rozwiązywania rozpatrywanej klasy zagadnień odwrotnych. Możliwe jest również rozszerzenie pola zastosowań tych metod na zadania innej klasy, jak np. zagadnienia odwrotne ze zmianą fazy czy odwrotne zagadnienia współczynnikowe.

W pracy zawarte są w dużej mierze rezultaty wieloletnich badań autora dotyczących rozwiązywania zagadnień odwrotnych przewodzenia ciepła i opublikowanych np. w [23], [24],[25],[39-52],[57,58],[61,62]. W rozważaną problematykę rozwiązywania granicznych zagadnień odwrotnych wniósł autor swój własny wkład twórczy.

W dziedzinie zastosowań rachunku wyrównawczego istotnym wkładem autora jest opracowanie metody rozwiązywania zagadnień odwrotnych z wykorzystaniem wszelkiej dostępnej *a priori* informacji o procesie. Podejście takie umożliwia znaczną poprawę stabilności i dokładności wyników rozwiązania wszelkich problemów słabo uwarunkowanych. Zastosowane podejście ma od strony matematycznej cechy algorytmów regularyzowanych. Dla zagadnień przepływu ciepła zaproponowana metoda może być stosowana do rozwiązywania zarówno zagadnień nieustalonych, jak i ustalonych.

W przypadku metody filtracji dynamicznej wkład autora polega na poszerzeniu zakresu zastosowań metody na rozwiązywanie zagadnienień nieliniowych, tzn. problemów jednoczesnej identyfikacji pola temperatury i warunków brzegowych. Nowatorskie jest także zastosowanie metody filtracji do rozwiązania granicznych zagadnień odwrotnych.

Autor po raz pierwszy wykorzystał metodę dyskretnej transformacji spektralnej wraz z koncepcją metody szeregów pochodnych do sformułowania modelu odwrotnego zagadnienia granicznego. Dzięki takiemu właśnie podejściu udało się autorowi znacznie uprościć opis matematyczny problemu w stosunku do innych rozwiązań bazujących na koncepcji szeregów pochodnych. Uzyskano uniwersalną postać algorytmu rozwiązania zarówno zagadnień jedno- jak i wielowymiarowych. Metoda zapewnia ponadto dużą stabilność rezultatów.

Bibliografia

[1] Alifanow O.M.: *Identifikacja processow tiepłoobmiena letatielnych apparatow.* Maszinostrojenije, Moskwa 1979.

[2] Alifanow O.M.: *Obratnyje zadaczi tiepłoobmiena.* Maszinostrojenije, Moskwa 1988.

[3] Beck J.V., Blackwell B., Clair Ch.R.: *Inverse Heat Conduction.* Ill Posed Problems. Wiley Intersec. Publ., New York 1985.

[4] Beck J.V., Blackwell B., St. Clair C.R.: *Sequentianal Regularization Solution of the Inverse Heat Conduction Problem.* Materiały Konferencji Numerical Methods in Thermal Problems. Pinegridge Press Limited, London 1985, s. 30.

[5] Białecki R., Skorek J., Postrzednik S.: *Periodyczne pola temperatury w mostkach cieplnych. Procesy wymiany ciepła i masy w przegrodach budowlanych.* Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1991, s. 79 -89.

[6] Brandt S.: *Metody statystyczne i obliczeniowe analizy danych.* PWN, Warszawa 1974.

[7] Burgraff O.K.: *An exact solution of the inverse problems in heat conduction. Theory and application.* Journal of Heat Transfer, 86 (1964), s. 373-382.

[8] Carlsraw H.S., Jeager J.C.: *Conduction of heat in solids.* Oxford University Press, Oxford 1959.

[9] Deutsch R.: *Teoria estymacji.* PWN, Warszawa 1989.

[10] Friedman B.: *Wybrane zagadnienia matematyki stosowanej.* PWN, Warszawa 1966.

[11] Gille J.Ch., Clique M.: *Rachunek macierzowy i wprowadzenie do analizy funkcjonalnej.* Wyd. Politechniki Śląskiej, Gliwice 1977.

[12] Grysa K., Ciałkowski M.: *Zagadnienia odwrotne pól temperatury - przegląd literatury.* Mechanika Teoretyczna i Stosowana, t. 18, nr 4, 1980.

[13] Grysa K.: *O ścisłych i przybliżonych metodach rozwiązywania zagadnień odwrotnych pól temperatury.* Zeszyty Naukowe Pol. Poznańskiej, Rozprawy, z. 204, 1989.

[14] Hensel E.: *Inverse Theory And Applications for Engineers.* Prentice Hall, New Jersey 1991.

[15] Huang X.C., Bartsch G., Wang B.X.: *A Numerical Method for Solving Two-Dimensional Nonlinear Inverse Heat Problems with Application to the Study of Transient Boiling Curves.* Materiał konferencji Advanced Computational Methods in Heat Transfer. Elsevier Appl. Sc., London 1992, s. 381.

[16] Jackson D.D.: *Most-squares inversion.* Journal of Geophys. Res., 1981, s. 83-104.

[17] Kostowski E., Kucypera S., Skorek J.: *Analiza parametrów termodynamicznych elementów półprzewodnikowych przy użyciu metod numerycznych.* Praca badawcza nie publikowana, Instytut Techniki Cieplnej, Gliwice 1990.

[18] Kozdoba L., Krukowski P.: *Mietody rieszenija obratnych zadacz tiepłopierienosa.* Naukowa Dumka 1982.

[19] Kurpisz K.: *Numerical Solution of One Case of Inverse Heat Conduction Problems.* Trans. ASME, Journal of Heat Transfer, vol. 113, No. 2, 1991, s. 280-286.

[20] Kurpisz K.: *A method for Determining Steady State Temperature Distribution within Blast Furnace Heart Lining by Measuring Temperature At Selected Points.* Trans. ISIJ, Vol. 28, 1988, s.926-929.

[21] Kurpisz K.: *Wyznaczania pola temperatury w ciałach stałych na podstawie obserwacji temperatury i gęstości strumienia ciepła w wybranych punktach ciała.* Zeszyty Naukowe Pol. Śląskiej, Energetyka z. 84, 1984.

[22] Kurpisz K.: *Metody numeryczne rozwiązywania zadań odwrotnych.* Zeszyty Naukowe Pol. Łódzkiej, CMP, z. 98, 1988, s. 153-172.

[23] Kurpisz K., Skorek J.: *Numeryczna metoda rozwiązywania pewnej klasy odwrotnych zadań przewodzenia ciepła.* Zeszyty Naukowe Pol. Śląskiej, Energetyka z.107, 1989, s. 99-124.

[24] Kurpisz K., Skorek J.: *Zagadnienia odwrotne teorii przewodzenia ciepła.* Praca badawcza nie publikowana, Instytut Techniki Cieplnej, Gliwice 1986-1988.

[25] Kurpisz K., Skorek J.: *Zagadnienia odwrotne teorii przewodzenia ciepła.* Praca badawcza nie publikowana, Instytut Techniki Cieplnej, Gliwice 1989-1990.

[26] Landry D.W., Kaplan B.: *Addendum to the Eigenvalue Method for Solving Transient Heat Conduction Problems.* Numerical Heat Transfer, vol. 9, No. 2, 1986, s. 247-249.

[27] Macewity J.M., Multanowski A.V.: *Identifikacja w zadaczach tiepłoprowodnosti.* Izd. Naukowa Dumka, Kijew 1982.

[28] Macewity J.M., Multanowski A.V.: *Iteracionnyj filtr dla rieszenija obratnoj zadaczi tiepłoprowodnosti.* Inż. Fiz. Żurnał, t. 35, 1978 (5), s. 916-923.

[29] Macewity J.M., Malyarenko V., Multanowski A.V.: *Identifikacja pieremiennogo po wriemieni koefficienta tiepłooddaczi putiom rieszenija obratnoj zadaczi tiepłoprowodnosti.* Inż. Fiz. Żurnał, t. 35, 1978, (3), s.505.

[30] Macewity J.M., Multanovski A.V.: *Opriedielenije naczalnogo rospriedielenija tiemperatury tieła mietodom optimalnoj dinamiczeskoj filtracji*. Inż. Fiz. Żurnał, t. 35, 1978, (5), s.713-717.

[31] Meditch J.S.: *Estymacja i sterowanie statystycznie optymalne w układach liniowych*. WNT, Warszawa 1975.

[32] Mikhail E.M., Ackerman F.: *Observations and least squares*. Crowlell, New york 1976.

[33] Minkowycz W. (red): *Handbook of Numerical Heat Transfer*. A Wiley Interscience Publisher, 1988.

[34] Niederliński A.: *Systemy i sterowanie*. PWN, Warszawa 1983.

[35] Niliot C., Papini F., Pasquetti R.: *Boundary Element Method for Inverse Heat Conduction Problems*. Materiały konferencji Advanced Computational Methods in Heat Transfer, Springer Verlag, Berlin 1990.

[36] Norwisz J.: *Numeryczne wyznaczanie pola temperatury w ustalonych procesach przewodzenia ciepła w ciałach stałych przy nadmiarze danych obarczonych błędami na przykładzie elektrolizera aluminium*. Praca doktorska, AGH, Kraków 1972.

[37] Petit D., Debray V., Niliot C., Pasquetti R.: *Identyfication of Local Heat Transfer Coefficient Using a Boundary Element Formulation*. Advanced Computational Methods In Heat Transfer. Comput. Mechanics Public., Southampton Boston 1992, vol I, s. 467-478.

[38] Samarski A.A.: *Teorija raznostnych schem*. Izd. Nauka, Moskwa 1983.

[39] Skorek J.: *Zastosowanie metody estymacji statystycznie optymalnej do rozwiązywania odwrotnych zagadnień przewodzenia ciepła*. Materiały Sympozjum Wymiany Ciepła i Masy, Białowieża 1992, s. 439-446.

[40] Skorek J.: *Zastosowanie metody przekształcenia macierzowego do rozwiązywania zagadnień brzegowych przewodzenia ciepła*. Materiały XXIV Sympozjonu PTMTiS "Modelowanie w Mechanice", Beskid Śląski 1985, s. 111-118.

[41] Skorek J.: *Zastosowanie teorii spektralnej operatorów dyskretnych do rozwiązywania zagadnień przewodzenia ciepła*. Zeszyty Naukowe Pol. Łódzkiej CMP, nr 97, 1988, s.173-190.

[42] Skorek J.: *Półanalityczna metoda rozwiązywania zagadnień początkowo-brzegowych przewodzenia ciepła*. Materiały Sympozjum Wymiany Ciepła i Masy, Jabłonna 1986, s. 231-236.

[43] Skorek J.: *Zastosowanie metod estymacji statystycznej do identyfikacji nieustalonego pola temperatury*. Materiały XXII Sympozjonu PTMTiS "Modelowanie w Mechanice", Szczyrk 1984, s. 397-404.

[44] Skorek J.: *Zastosowanie metod estymacji jawnej do rozwiązywania odwrotnych zagadnień nieustalonej wymiany ciepła*. Materiały Sympozjum Wymiany Ciepła i Masy, Jabłonna 1983, s. 254-259.

[45] Skorek J.: *Zastosowanie teorii spektralnej operatorów dyskretnych do rozwiązywania zagadnień przewodzenia ciepła*. Materiały XIII Zjazdu Termodynamików, Częstochowa-Kozubnik 1987, s. 600-605.

[46] Skorek J.: *Applying the Least Square Adjustment Technique for Solving Inverse Boundary Heat Conduction Problems*. Materiały VIII międzynarodowej konferencji "Numerical Methods for Thermal Problems", Swansea 1993.

[47] Skorek J., Zajdel A.: *Analiza parametrów rozpylania paliwa ciekłego na podstawie identyfikacji strumienia ciepła w ścianie komory spalania*. Praca badawcza nie publikowana, Instytut Techniki Cieplnej, Gliwice 1992.

[48] Skorek J.: *Analysis of the Discrete and Continuous Eigenvalue Problems for Heat Conduction Equation*. Materiały konferencji GAMM. Drezno 1993.

[49] Skorek J.: *Metody przekształceń spektralnych rozwiązywania równań przewodzenia ciepła*. Materiały XXVI Sympozjonu PTMTiS "Modelowanie w Mechanice", Beskid Śląski 1987, s. 353-360.

[50] Skorek J.: *Identyfikacja nieustalonego pola temperatury wsadu nagrzewanego w piecu wgłębnym*. Materiały XXV Sympozjonu PTMTiS "Modelowanie w Mechanice", Kudowa 1986, cz. II, s. 113-121.

[51] Skorek J.: *Identyfikacja nieustalonego pola temperatury w obszarach wielowymiarowych*. Materiały XXVII Sympozjonu PTMTiS "Modelowanie w Mechanice", Beskid Śląski 1989, s.331-336.

[52] Skorek J.: *Metoda rozwiązywania odwrotnych zagadnień wymiany ciepła w oparciu o zmodyfikowany algorytm rachunku wyrównawczego*. Materiały XII Zjazdu Termodynamików, Kraków-Rytro, 1984, s. 762-767.

[53] Smith T.M., Skladany T.J.: *An Eigenvalue Method for Solving Heat Conduction Problems*. Numerical Heat Transfer, vol. 6, 1983, s. 409-422.

[54] Styrylska T.: *Wieloetapowe i wielogrupowe wyrównywanie wyników pomiarów*. Wyd. Politechniki Krakowskiej, Monografia 121, Kraków 1991.

[55] Szargut J.: *Metody numeryczne w obliczeniach cieplnych pieców przemysłowych*. Wyd. Śląsk, Katowice 1977.

[56] Szargut J.: *Zastosowanie rachunku wyrównawczego w technice cieplnej*. Pomiary, Automatyka i Kontrola, nr 4, (1980). s. 133.

[57] Szargut J. i in.: *Modelowanie numeryczne pól temperatury*. WNT, Warszawa 1992.

[58] Szargut J. i in.: *Rachunek wyrównawczy w technice cieplnej*. Wydawnictwo PAN, 1984.

[59] Szargut J., Kolenda Z.: *Uzgadnianie bilansów substancji i energii w procesach chemicznych*. Pomiary, Automatyka i Kontrola, 13 (1967), s. 64-67.

[60] Szargut J., Kolenda Z., Majza E.: *Zastosowanie rachunku wyrównawczego do wyznaczania współczynników równań empirycznych.* Pomiary, Automatyka i Kontrola, 29 (1983), nr 4, s. 80.

[61] Szargut J., Skorek J.: *Influence of the preliminary estimation of unknowns on the results of co-ordination of material and energy balance.* Bulletin of the Polish Acad. of Sc., Thermodynamics, vol. 39, No 2, 1991, s. 336-343.

[62] Szargut J., Skorek J.: *Optymalizacja nagrzewania wsadu w piecach przemysłowych.* Praca badawcza nie publikowana, Instytut Techniki Cieplnej, Gliwice 1981-1985.

[63] Tandy D.F., Trujillo D.M., Busby H.R.: *Solution of Inverse Heat Conduction Problems Using Eigenvalue Reduction Technique.* Numerical Heat Transfer, vol.10, 1986, s. 597-617.

[64] Tichonow A.N.: *Obratnyje zadaczi tiepłoprowodnosti.* Inż. Fiz. Żurnał, t.29, nr 1, 1975, s.7-12.

[65] Tikhonov A.N., Arsenin W.: *Solutions of Ill-Posed Problems.* Winston & Sons, Washington D.C. 1977.

[66] Tichonow A.N. i in.: *Riegularizujuszczije algoritmy i apriornaja informacija.* Izd. Nauka, Moskwa 1983.

[67] Tiomkin A.: *Obratnyje mietody tiepłoprowodnosti.* Izd. Energia, Moskwa 1973.

[68] Wang X.F., Rosset-Louerat M.M., Benard C.: *Identification of a Moving Interface from Solid Phase Boundary Measurements.* Materiały Konferencji Advanced Computational Methods in Heat Transfer. Elsevier Appl. Sc., London 1992, s. 433.

[69] Wilkinson J.H.: *The Algebraic Eigenvalue Problem.* Oxford University Press, London 1965.

[70] Wilkinson J.H., Reinsch C.: *Handbook for Automatic Computation.* Vol. 1, Springer Verlag, Berlin 1971.

[71] Zabaras N., Ruan Y.: *A Deforming Finite Element Method Analysis of Inverse Stefan Problems.* Int. Journal of Numerical Methods in Engineering, 28, 1989, s. 295.

[72] Zabaras N.: *Inverse Finite Element Technique for the Analysis of Solidification Processes.* Int. Journal of Numerical Methods in Engineering, 29, 1990, s. 1569.

[73] Zienkiewicz O.C.: *The Finite Element Method.* McGraw Hill, third edition, London 1977.

Dodatek A

Dowód twierdzenia (5.42)

Dowód twierdzenia (5.42), tzn.:

$$\tilde{T}_{0i} = \tilde{T}_i(0) = -\sum_{k=0}^{\infty} (\beta_i^{-1})^{k+1} \sum_{j=1}^{N} \tilde{D}_{ij} T_{sj}^{(k)}(0) \tag{A.1}$$

przeprowadza się w następujący sposób. Zagadnienie własne dla symetrycznej macierzy **A** występującej w równaniu (5.30) ma postać:

$$\mathbf{A}\mathbf{W} = \mathbf{W}\,\mathbf{Diag}\beta \qquad \text{lub} \qquad \mathbf{W}^T\mathbf{A} = (\mathbf{Diag}\beta)\,\mathbf{W}^T \tag{A.2}$$

Stąd:

$$\mathbf{W}^T = (\mathbf{Diag}\beta)^{-1}\,\mathbf{W}^T\mathbf{A} \tag{A.3}$$

Podstawiając (A.3) do zależności (5.11) definiującej transformatę $\tilde{\mathbf{T}}$ otrzymuje się:

$$\tilde{\mathbf{T}} = (\mathbf{Diag}\beta)^{-1}\,\mathbf{W}^T\mathbf{A}\,\mathbf{T} \tag{A.4}$$

Wyjściowe równanie (5.30) opisujące rozpatrywany problem graniczny można też zapisać w nieco odmiennej postaci (przy założeniu $\mathbf{C}=\mathbf{I}$):

$$\mathbf{A}\,\mathbf{T}(\tau) = \frac{d\mathbf{T}(\tau)}{d\tau} - \mathbf{D}\,\mathbf{T}_s(\tau) \tag{A.5}$$

Podstawiając zależność (A.5) do (A.4) otrzymujemy:

$$\tilde{\mathbf{T}}(\tau) = -(\mathbf{Diag}\beta)^{-1}\mathbf{W}^T\mathbf{D}\,\mathbf{T}_s(\tau) + (\mathbf{Diag}\beta)^{-1}\mathbf{W}^T\frac{d\mathbf{T}(\tau)}{d\tau} \tag{A.6}$$

Z założenia elementy macierzy **A**, a więc również składowe wektorów własnych $\mathbf{w}_i$, nie są funkcjami czasu. Z tego powodu równanie (5.30) można zapisać w następującej postaci:

$$\dot{\mathbf{T}}(\tau) = -(\mathbf{Diag}\beta)^{-1}\mathbf{W}^T\mathbf{D}\,\mathbf{T}_S(\tau) + (\mathbf{Diag}\beta)^{-1}\frac{d}{d\tau}\left(\mathbf{W}^T\mathbf{T}(\tau)\right) \tag{A.7}$$

Wykorzystując zależności (A.3) oraz (A.7) otrzymuje się następujący związek:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\mathbf{W}^T\mathbf{T}(\tau)\right) = (\mathbf{Diag}\beta)^{-1}\mathbf{W}^T\frac{d}{d\tau}\left[\frac{d\mathbf{T}(\tau)}{d\tau} - \mathbf{D}\,\mathbf{T}_S(\tau)\right] \tag{A.8}$$

Podstawiając związek (A.8) do (A.7) uzyskuje się następującą zależność:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{T}}(\tau) = &-(\mathbf{Diag}\beta)^{-1}\mathbf{W}^T\mathbf{D}\,\mathbf{T}_S(\tau) - \left[(\mathbf{Diag}\beta)^{-1}\right]^2\mathbf{W}^T\mathbf{D}\,\mathbf{T}_S^{(1)}(\tau) + \\ &+ (\mathbf{Diag}\beta)^{-1}\mathbf{W}^T\frac{d^2\mathbf{T}(\tau)}{d\tau^2}\end{aligned} \tag{A.9}$$

Powtarzając tę operację nieskończenie wiele razy uzyskuje się w efekcie końcowym zależność określającą transformatę wektora temperatur $\bar{\mathbf{T}}(\tau)$:

$$\bar{\mathbf{T}}(\tau) = -\sum_{k=1}^{\infty}\left[(\mathbf{Diag}\beta)^{-1}\right]^{k+1}\mathbf{W}^T\mathbf{D}\,\mathbf{T}_S^{(k)}(\tau) \tag{A.10}$$

gdzie $\mathbf{T}_S^{(k)}(\tau)$ oznacza k-tą pochodną odpowiedzi temperaturowej względem czasu.

Jeżeli temperatury brzegowe $\mathbf{T}_S(\tau)$ spełniają wyjściowe zagadnienie brzegowe (5.30) dla dowolnej chwili czasu τ, to spełniają je również dla chwili początkowej, tzn. dla $\tau=0$. Stąd uzyskuje się:

$$\dot{\mathbf{T}}(\tau)\Big|_{\tau=0} = \dot{\bar{\mathbf{T}}}(0) = -\sum_{k=1}^{\infty}\left[(\mathbf{Diag}\beta)^{-1}\right]^{k+1}\mathbf{W}^T\mathbf{D}\,\mathbf{T}_S^{(k)}(0) \tag{A.11}$$

co stanowi dowód twierdzenia (A.1).

Dodatek B

Wyprowadzenie pewnych złożonych operacji macierzowych

Przyjmując następujące oznaczenia:

G - macierz symetryczna o rozmiarach $n * n$,

B - macierz o wymiarach $r * n$,

F - macierz symetryczna o wymiarach $r * r$,

dowodzi się prawdziwości dwóch następujących twierdzeń:

Twierdzenie 1

$$\mathbf{GB}^T(\mathbf{BGB}^T+\mathbf{F})^{-1} = (\mathbf{G}^{-1}+\mathbf{B}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{F}^{-1} \tag{B.1}$$

Dowód:

$$\begin{aligned}&\mathbf{GB}^T(\mathbf{BGB}^T+\mathbf{F})^{-1} = \\ &= (\mathbf{G}^{-1}+\mathbf{B}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\,(\mathbf{G}^{-1}+\mathbf{B}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{B})\,\mathbf{GB}^T(\mathbf{BGB}^T+\mathbf{F})^{-1} = \\ &= (\mathbf{G}^{-1}+\mathbf{B}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\,(\mathbf{B}^T+\mathbf{B}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{BGB}^T)\,(\mathbf{BGB}^T+\mathbf{F})^{-1} = \\ &= (\mathbf{G}^{-1}+\mathbf{B}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\,\mathbf{B}^T\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{F}+\mathbf{BGB}^T)\,(\mathbf{BGB}^T+\mathbf{F})^{-1} = \\ &= (\mathbf{G}^{-1}+\mathbf{B}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{F}^{-1}\end{aligned}$$

Twierdzenie 2

$$(\mathbf{G}^{-1}+\mathbf{B}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{G}-\mathbf{GB}^T(\mathbf{BGB}^T+\mathbf{F})^{-1}\mathbf{BG} \tag{B.2}$$

Dowód:

$$(G^{-1}+B^TF^{-1}B) =$$
$$= (G^{-1}+B^TF^{-1}B)\,[G-(G^{-1}+B^TF^{-1}B)^{-1}B^T+F^{-1}BG]\,[G-(G^{-1}+B^TF^{-1}B)^{-1}B^T+F^{-1}BG]^{-1}$$

Wykorzystując zależność (B.1) otrzymuje się:

$$(G^{-1}+B^TF^{-1}B)\,[G-(G^{-1}+B^TF^{-1}B)^{-1}B^T+F^{-1}BG]\,[G-(G^{-1}+B^TF^{-1}B)^{-1}B^T+F^{-1}BG]^{-1} =$$
$$= (G^{-1}+B^TF^{-1}B)\,[G-(G^{-1}+B^TF^{-1}B)^{-1}B^T+F^{-1}BG]\,[G-GB^T(BGB^T+F)^{-1}BG]^{-1} =$$
$$= [I+B^TF^{-1}BG-B^TF^{-1}BG]\,[G-GB^T(BGB^T+F)^{-1}BG]^{-1} =$$
$$= [G-GB^T(BGB^T+F)^{-1}BG]^{-1}$$

Stąd:

$$(G^{-1}+B^TF^{-1}B) = [G-GB^T(BGB^T+F)^{-1}BG]^{-1} \qquad (B.3)$$

Mnożąc lewą i prawą stronę zależności (B.3) przez inwersję przeciwnych stron (co jest równoznaczne z podniesieniem stron równania do pierwszej potęgi) uzyskuje się ostatecznie:

$$(G^{-1}+B^TF^{-1}B)^{-1} = G-GB^T(BGB^T+F)^{-1}BG$$

ZASTOSOWANIE METOD STOCHASTYCZNYCH I SPEKTRALNYCH DO ROZWIĄZYWANIA GRANICZNYCH ODWROTNYCH ZAGADNIEŃ PRZEWODZENIA CIEPŁA

Streszczenie

Prezentowana praca jest poświęcona problemowi rozwiązywania odwrotnych zagadnień przewodzenia ciepła. Rozpatrywany jest problem identyfikacji nieustalonych pól temperatury ciała (a w tym odtwarzania początkowego rozkładu temperatury ciała) oraz strumieni ciepła na brzegu analizowanego obszaru, tzn. graniczne zagadnienie odwrotne. Przedmiotem rozważań są wyłącznie problemy nieustalonej wymiany ciepła.

Opracowano i rozwinięto trzy metody rozwiązania problemu. Dwie z nich należą do grupy metod stochastycznych (a dokładnie - metod estymacji statystycznie optymalnej): metoda rachunku wyrównawczego oraz metoda optymalnej filtracji dynamicznej (tzw. metoda filtru Kalmana). Trzecia z metod bazuje na teorii dyskretnej transformacji spektralnej oraz wykorzystuje koncepcję metody szeregów pochodnych. Wszystkie wymienione metody wymagają sformułowania modelu matematycznego rozpatrywanego procesu. W pracy rozpatruje się wyłącznie modele dyskretne sformułowane za pomocą takich metod numerycznych jak na przykład metoda elementów skończonych MES czy metoda bilansów elementarnych MBE.

W pracy przedstawiono podstawowe założenia omawianych metod wraz z analizą dokładności i efektywności numerycznej. Przytoczono liczne przykłady obliczeniowe dotyczące głównie weryfikacji dokładności metod. Przedstawiono również możliwości praktycznego wykorzystania opracowanych algorytmów.

APPLYING STOCHASTIC AND SPECTRAL METHODS FOR SOLVING BOUNDARY INVERSE PROBLEMS OF HEAT CONDUCTION

Summary

The presented work is devoted to the problem of a solution of inverse problems of heat conduction. The problem of identification of transient temperature field within the body (including calculation of initial temperature field of the body) and heat fluxes on the boundary of the analyzed domain is considered herein. Transient problems of heat transfer are the subject of considerations.

Three methods of the solution of the problems have been elaborated and developed. Two of them belong to the group of stochastic methods (exactly statistically optimal estimation methods): the least squares adjustment method and optimal dynamic filtration method (so called Kalman's filtering). Third method is based on the theory of discrete eigenvalue transformation and includes a concept of the method of series of derivatives. All the mentioned methods require formulation of the mathematical model of considered process. Herein only discrete models formulated on the base of numerical methods such as finite element method FEM or control volume method CVM are considered.

The basic assumptions of proposed methods are presented in the paper as well as the analysis of the accuracy and numerical efficiency. Several numerical examples testing accuracy of the methods are presented. Possibilities of practical application of elaborated algorithms are also discussed.

ПРИМЕНЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ И СПЕКТРАЛЬНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Резюме

Настоящая работа посвящена проблеме решения обратных вопросов теплопроводности. Рассматриваются проблемы идентификации поля температуры тела (также проблемы идентификации начального распределения температуры) и теплого потока на крае анализируемой области: те. граничная обратная проблема. Предметом рассуждений являются проблемы нестационарного теплообмена.

Были разработаны и развиты три методы решения проблемы. Два из них относятся к группе стохастических методов (а точно к методам статистически оптимальной эстимации): координация методом найменьших квадратов и метод оптимальной динамической фильтрации (так называемая фильтрация Кальмана). Третий метод основан на теории дискретной спектральной трансформации и использует концепцию рядов пройзводных. Все три методы требуют формулировки математической модели рассмотриваемого процесса. В работе анализируется только лишь дискретные модели образованные с помощю таких численных методов как метод конечных элементов МКЄ или метод элементарных балансов МЄБ.

В работе представляются основные предположения указанных методов вместе с анализом точности и нумерической эффективности. Приводится ряд расчётных примеров относящихся в основном к верификации и точности методов. Представляются тоже возможности практического использования разработанных алгоритмов.

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
Politechniki Śląskiej
P. 3350/94/119