

Przemysław GRZESICA
Politechnika Śląska, Gliwice

MODEL JEDNOSTOPNIOWEJ, WALCOWEJ PRZEKŁADNI ZĘBATEJ PRZEZNACZONY DO NUMERYCZNEGO BADANIA NIEUSTALONYCH STANÓW PRACY NAPĘDÓW GÓRNICZYCH

Streszczenie. W opracowaniu przedstawiono nowy model fizyczny i matematyczny jednostopniowej walcowej przekładni zębatej. Badania modelu mają umożliwić określenie wartości sił międzyzębnych pojawiających się w nieustalonych stanach pracy napędów górniczych w celu określenia współczynnika dynamiczności wewnętrznej K_v .

SINGLE STAGE HELICAL GEAR MODEL DESIGNED FOR THE NUMERICAL ANALYSIS OF NONSTATIONARY WORK STATES OF MINING DRIVE UNITS

Summary. In this paper, a new physical and mathematical a single stage helical gear model has been developed. The numerical studies ought to enable the determination of transverse force values during nonstationary work states of mining drive units, in order to calculate the internal dynamic factor K_v .

1. Wprowadzenie

Optymalny dobór cech geometrycznych przekładni zębatej w trakcie procesu projektowania, bazującego na obecnym stanie wiedzy [6, 9], nie stanowi trudności. Problematyczne staje się natomiast określenie wpływu tych cech na stan dynamiczny przekładni, co oznacza w praktyce niemożność ścisłego oszacowania obciążeń chwilowych elementów przekładni. Doświadczalna identyfikacja wpływu cech konstrukcyjno-eksploatacyjnych na stan dynamiczny przekładni wydaje się być zadaniem bardzo skomplikowanym ze względu na ogromną liczbę kombinacji parametrów technicznych, w badaniach stanowiskowych nie zawsze możliwych do uzyskania.

Prowadząc prace projektowe zgodnie z metodyką normy ISO 6336, oznaczoną symbolem „A”, wyznaczenie wartości współczynnika dynamiczności wewnętrznej przekładni K_v może być uzyskane w wyniku badań modelu przekładni zębatej. Współczynnik ten zdefiniowany jako [4]:

$$K_V = \frac{\text{obciążenie wywołane czynnikami zewnętrznymi} + \text{przenoszone obciążenie zewnętrzne}}{\text{przenoszone obciążenie zewnętrzne}}$$

ma za zadanie uwzględnienie wpływu stopnia dokładności wykonania przekładni, prędkości obwodowej kół oraz obciążenia jednostkowego zębów na wytrzymałość ząbienia.

2. Badania modeli przekładni zębatej

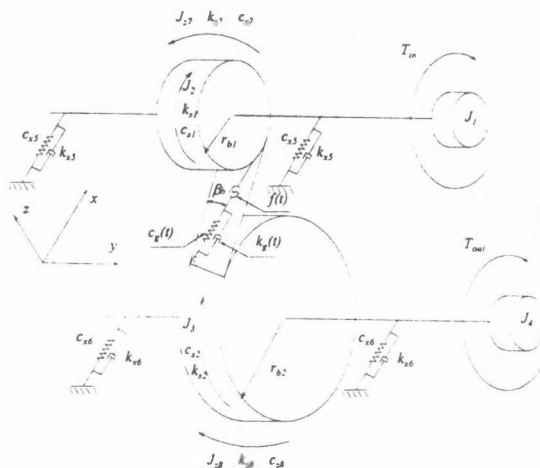
Obserwując dotychczasowy rozwój badań modeli przekładni zębatych można stwierdzić, iż prace na temat stanu dynamicznego przekładni zębatych prowadzone były w dwóch kierunkach. W pierwszym z nich przekładnia zębata stanowiła jedynie część układu roboczego, składającego się z silnika napędowego, sprzęgła łączącego wał silnika z wałem wejściowym przekładni, przekładni zębatej, sprzęgła łączącego wał wyjściowy przekładni z wałem maszyny roboczej [1, 7]. W przypadku tym model dynamiczny uwzględniał na ogół jedynie niezbędne parametry geometryczno-kinematyczne przekładni, takie jak: zredukowane momenty bezwładności, średnie wartości sztywności ząbienia i średnie wartości tłumienia. Pomijano natomiast te czynniki, które wydawały się nie posiadać większego wpływu na elementy układu roboczego poza przekładnią. W drugim przypadku badania modelowe przekładni zębatych ukierunkowane były na identyfikację zjawisk dynamicznych zachodzących wewnątrz konstrukcji przekładni, obciążonej na wale wejściowym i wyjściowym stałymi momentami obrotowymi [2, 7, 10, 13]. Zjawiska wywoływane głównie przez wymuszenia kinematyczne, których źródła dopatruje się w zmienności sztywności ząbienia, w zmienności tłumienia oraz w odchyłkach wykonawczych, nie mające istotnego wpływu dynamicznego na inne elementy układy roboczego, stanowią źródło powstawania znacznych sił dynamicznych obciążających zęby kół zębatych.

Uwzględnienie wpływu jednoczesnego oddziaływania czynników wewnętrznych oraz zewnętrznego obciążenia przekładni na wartość międzyzębnych sił dynamicznych stwarza możliwość dokładniejszej analizy obciążalności ząbienia. Nie ulega wątpliwości, że analiza taka jest celowa szczególnie w przypadku przekładni stosowanych w układach napędowych maszyn górniczych.

3. Model walcowej przekładni zębatej o zębach skośnych

3.1. Model fizyczny

Na rysunku 1 przedstawiono model fizyczny jednostopniowej przekładni walcowej o zębach śrubowych. Model zbudowano z szeregu dyskretnych elementów bezwładnościowych połączonych nieważkimi elementami sprężystymi oraz dyssypacyjnymi w konfiguracji umożliwiającej przepływ energii mechanicznej od wału wejściowego do wału wyjściowego.



Rys. 1. Model fizyczny jednostopniowej, walcowej przekładni o zębach skośnych
 Fig. 1. The physical single stage model of the helical gear

Drgania elementów masowych w układzie w wyniku występowania sprzężeń o charakterze przemieszczeniowym zostały wzajemnie powiązane. Wzbudzenie układu mas do drgań ma charakter złożony i odbywa się dwutorowo poprzez wymuszenia zewnętrzne jak i wymuszenia wewnętrzne (parametryczne). Modelowanie obciążenia zewnętrznego realizowane jest w postaci momentów skręcających, działających na wał wejściowy i wyjściowy oraz w postaci momentów tarcia międzyzębnego. Wymuszenia parametryczne natomiast zamodelowano za pomocą zmienności funkcji sztywności zazębienia, tłumienia w zazębieniu oraz zmienności wzdłuż odcinka przyporu sumy błędów wykonawczych. Prędkość tych zmian uzależniono od prędkości obwodowej kół zębatych, a tym samym od częstotliwości zazębienia.

W modelu tym uwzględniono również charakterystyczne dla stanów rezonansowych zjawisko utraty kontaktu pary zębów w cyklu przyporu. Przesunięcia zęba, w przypadku utraty kontaktu, ograniczone zostały chwilowym położeniem następnego zęba, znajdującego się na kole przeciwnym.

3.2. Model matematyczny

Na podstawie omówionego modelu fizycznego jednostopniowej przekładni walcowej o uzębieniu skośnym wyprowadzono układ równań ruchu dla modelu dyskretnego. Korzystając z równań energetycznych Lagrange'a drugiego rodzaju [3, 11] zbudowano układ równań różniczkowych zwyczajnych rzędu drugiego o nieliniowych współczynnikach.

$$J_1 \ddot{\Theta}_1 + k_{s1} (\dot{\Theta}_1 - \dot{\Theta}_2) + c_{s1} (\Theta_1 - \Theta_2) = T_{in}(t) \quad (1)$$

$$J_2 \ddot{\Theta}_2 + k_{s1} (\dot{\Theta}_2 - \dot{\Theta}_1) - k_g(t) \cdot \cos(\beta_b) \sum \delta + c_{s1} (\Theta_2 - \Theta_1) - c_g(t) \cdot r_{b1} \cos(\beta_b) \sum \delta = \sum T_u(t) \quad (2)$$

$$J_3 \ddot{\Theta}_3 + k_{s2}(\dot{\Theta}_3 - \dot{\Theta}_4) + k_g(t) \cdot \cos(\beta_b) \sum \dot{\delta} + c_{s2}(\Theta_3 - \Theta_4) + c_g(t) \cdot r_{b2} \cos(\beta_b) \sum \delta = \sum T_u(t) \quad (3)$$

$$J_4 \ddot{\Theta}_4 + k_{s2}(\dot{\Theta}_4 - \dot{\Theta}_3) + c_{s2}(\Theta_4 - \Theta_3) = -T_{out}(t) \quad (4)$$

$$m_5 \ddot{X}_5 + k_{x5} \dot{X}_5 + k_g(t) \frac{\cos(\beta_b)}{r_{b1}} \sum \dot{\delta} + c_{x5} X_5 + c_g(t) \cdot \cos(\beta_b) \sum \delta = 0 \quad (5)$$

$$m_6 \ddot{X}_6 + k_{x6} \dot{X}_6 + k_g(t) \frac{\cos(\beta_b)}{r_{b2}} \sum \dot{\delta} + c_{x6} X_6 + c_g(t) \cdot \cos(\beta_b) \sum \delta = 0 \quad (6)$$

$$J_{z7} \ddot{\Theta}_{z7} + k_{z7} \dot{\Theta}_{z7} + k_g(t) \cdot \sin(\beta_b) \sum \dot{\delta} + c_{z7} \Theta_{z7} + c_g(t) \cdot r_{b1} \sin(\beta_b) \sum \delta = 0 \quad (7)$$

$$J_{z8} \ddot{\Theta}_{z8} + k_{z8} \dot{\Theta}_{z8} - k_g(t) \cdot \sin(\beta_b) \sum \dot{\delta} + c_{z8} \Theta_{z8} - c_g(t) \cdot r_{b2} \sin(\beta_b) \sum \delta = 0 \quad (8)$$

gdzie:

$$\sum \delta = [H] \cdot ((r_{b2} \Theta_3 - r_{b1} \Theta_2 - X_6 + X_5) \cos(\beta_b) - (r_{b2} \Theta_{z8} - r_{b1} \Theta_{z7}) \sin(\beta_b)) \quad (9)$$

$$\sum \dot{\delta} = [H] \cdot \left(\left(\dot{\Theta}_3 - \dot{\Theta}_2 - \frac{\dot{X}_6}{r_{b2}} + \frac{\dot{X}_5}{r_{b1}} \right) \cos(\beta_b) - (\dot{\Theta}_{z8} - \dot{\Theta}_{z7}) \sin(\beta_b) \right) \quad (10)$$

Przedstawione równania stanowią podstawę do wyznaczenia przebiegu czasowego siły międzyzębnej F_{bt} , której wartość chwilowa wynosi:

$$F_{bt}(t) = k_g(t) \sum \dot{\delta} + c_g(t) \sum \delta \quad (11)$$

Jednakże chcąc uwzględnić nieliniowe zachowanie układu w stanie rezonansu, musi być spełniony warunek symulujący zjawisko utraty kontaktu pary zębów, nominalnie znajdującej się w przyporze. Warunek ten pozwala określić wartość funkcji Heaviside'a $[H]$ w kryterium sumy zredukowanych na odcinek przyporu przemieszczeń poszczególnych mas skupionych.

1. $\sum \delta \geq 0$ – zęby znajdują się w nominalnym przyporze, $[H] = 1$, zatem siła międzyzębna wynosi:

$$F_{bt}(t) = k_g(t) \sum \dot{\delta} + c_g(t) \sum \delta \quad (12)$$

2. $-\lambda < \sum \delta < 0$ – wystąpiła utrata kontaktu między współpracującymi zębami, $[H] = 0$, zatem:

$$F_{bt}(t) = 0 \quad (13)$$

3. $\sum \delta \leq -\lambda$ – oderwany ząb uderza o ząb sąsiedni koła współpracującego, $[H] = 1$, a siła międzyzębna wynosi:

$$F_{bt}(t) = k_g(t) \sum \dot{\delta} + c_g(t) (\sum \delta - \lambda) \quad (14)$$

3.2.1. Przebieg funkcji sztywności i tłumienia

W celu wyznaczenia przebiegu funkcji sztywności ząbienia należy określić ugięcie pary zębów w funkcji chwilowego położenia punktu przyporu. Na potrzeby niniejszych badań wykorzystano równania przedstawione w [12], a następnie poprawione i opublikowane w [2]. Zostały one zweryfikowane eksperymentalnie poprzez test statycznego obciążenia pary zębów śrubowych. W pracach tych założono, iż zęby mają w przekroju normalnym uproszczony zarys, sprowadzony do linii prostej. Aproksymowana funkcja wynosi:

$$c_p(t) = c \cdot \exp\left[C_s \cdot \frac{t - (\varepsilon_\gamma \cdot t_z) \cdot 2^3}{(\varepsilon_a \cdot t_z / 2m_n) \cdot h}\right] \quad (15)$$

Współczynnik C_s jest liniowo zależny od kąta pochylenia linii zębów β_b i wynosi:

$$C_s = 0.322 \cdot (\beta_b - 5) + \left[0.23 \cdot \frac{b}{h} - 23.26\right] \quad (16)$$

W równaniu (15) c jest sztywnością ząbienia na średnicy podziałowej i wynosi:

$$c = \frac{b}{\delta_o + C_1 \left(\frac{1}{z_{n1}} + \frac{1}{z_{n2}}\right) + C_2 \left(\frac{y_1}{z_{n1}} + \frac{y_2}{z_{n2}}\right) + C_3 \left(\frac{1}{z_{n1}^2} + \frac{1}{z_{n2}^2}\right) + C_4(y_1 + y_2) + C_5(y_1^2 + y_2^2)}, \quad (17)$$

przy czym δ_o jest ugięciem pary współpracujących zębów:

$$\delta_o = \frac{2.25}{\left(-0.166 \cdot \frac{b}{h} + 0.08\right)(\beta_b - 5) + 44.5}, \quad (18)$$

gdzie:

$$C_1 = -0.00854, C_2 = -0.11654, C_3 = 2.9784, C_4 = -0.00635, C_5 = 0.00529.$$

Pozostałe wartości sztywności występujące w układzie równań różniczkowych są wielkościami niezależnymi od czasu i wyznaczone na podstawie następujących równań:

1. Sztywności skrętnie wałów:

$$c_{s1} = G \cdot I_{O1} / I_1 \quad (19), \quad c_{s2} = G \cdot I_{O2} / I_2 \quad (20)$$

2. Sztywności zginania wałów w kierunku linii przyporu (dla przypadku wału podpartego symetrycznie):

$$c_{rs} = 32 \frac{E \cdot I_1}{I_1^3} \quad (21), \quad c_{rs} = 32 \frac{E \cdot I_2}{I_2^3} \quad (22)$$

3. Sztywności zginania wałów w kierunku osi podłużnej wału (dla przypadku wału podpartego symetrycznie):

$$c_{rs} = 24 \frac{E \cdot I_1}{I_1} \quad (23), \quad c_{rs} = 24 \frac{E \cdot I_2}{I_2} \quad (24)$$

Przebieg funkcji tłumienia został określony następująco:

$$k_{x1} = 2\zeta_1 \left(\frac{c_{x1}}{1/J_1 + 1/J_2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (25), \quad k_{x2} = 2\zeta_2 \left(\frac{c_{x2}}{1/J_3 + 1/J_4} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (26)$$

$$k_{x1} = 2\zeta_3 \left(\frac{c_{x1}}{1/J_{x1} + 1/J_{x2}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (27), \quad k_{x2} = 2\zeta_4 \left(\frac{c_{x2}}{1/J_{x3} + 1/J_{x4}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (28)$$

$$k_{x1} = 2\zeta_5 \left(\frac{2c_{x1} \cdot J_2}{I_{b2}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (29), \quad k_{x2} = 2\zeta_4 \left(\frac{2c_{x2} \cdot J_3}{I_{b3}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (30)$$

$$k_g(t) = 2\zeta_g \left(\frac{c_g(t)}{I_{b2}^2/J_2 + I_{b3}^2/J_3} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (31)$$

Współczynniki ζ kształtują się w granicach 0.03 do 0.17 [2].

3.2.2. Moment tarcia

Siła tarcia na powierzchni zębów, będąca efektem względnego poślizgu zębów w czasie ich współpracy, generuje na wale zębniaka oraz koła moment tarcia w zależności od chwilowej prędkości poślizgu $v_{\Sigma m}$ i chwilowej wartości zastępczego promienia zarysu ρ_m :

$$\sum T_\mu(t) = \mu_m \cdot F_{bt} \cdot r_\mu \quad (32), \quad \mu_m = 0,045 \left(\frac{F_{bt}/b}{v_{\Sigma m} \rho_m} \right)^{0,2} \eta_M^{-0,05} \cdot 3,8 \left(R_s/d_1 \right)^{0,25} \quad (33)$$

4. Podsumowanie

W artykule przedstawiono nowy model jednostopniowej walcowej przekładni zębatej przeznaczony do badań nad stanami pracy nieustalanej napędów górniczych. Model ten umożliwia wyznaczenie wartości współczynnika dynamiczności wewnętrznej K_v dla różnych konfiguracji geometrii zazębienia, obciążenia i dokładności wykonania przekładni.

LITERATURA

1. Dolipski M.: Dynamika górniczych przenośników zgrzeblowych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Górnictwo nr 177, Gliwice 1989
2. Cai Y.: Simulation on the rotational vibration of helical gears in consideration of the tooth separation phenomenon (a new stiffness function of helical involute tooth pair). ASME Journal of Mechanical Design, september 1995, Vol. 117, str. 460-468
3. Cannon R.H.: Dynamika układów fizycznych. WNT, Warszawa 1973
4. ISO 6336: Calculation of load capacity of spur and helical gears. Genewa 1996
5. Jaśkiewicz Z.: Przekładnie stożkowe i hipoidalne. WKiŁ, Warszawa 1978
6. Müller L.: Przekładnie zębate – projektowanie. WNT, Warszawa 1979
7. Müller L.: Przekładnie zębate – dynamika. WNT, Warszawa 1986
8. Niemann G., Winter H.: Maschinenelemente. Springer Verlag, Berlin 1983
9. Ochęduszek K.: Koła zębate – konstrukcja. WNT, Warszawa 1971
10. Skoć A.: Dynamika przekładni zębatych stożkowych maszyn górniczych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Górnictwo nr 226, Gliwice 1996
11. Schabana A.A.: Theory of vibration. Springer-Verlag, New York 1991
12. Umezawa K.: Deflection due to contact between gear teeth with finite width. Bulletin of JSME, Vol. 16, Nr 97, str. 1085-1092
13. Wilk A.: Wpływ parametrów technologicznych i konstrukcyjnych na dynamikę przekładni o zębach prostych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Mechanika nr 72, Gliwice 1981

Recenzent: Prof.dr hab.inż. Karol F.Reich

Abstract

In this paper, a new single stage helical gear model has been developed. The model is designed for studies of nonstationary work states of mining drive units and allows to determine a value of the internal dynamic factor K_v for the various configurations of tooth geometry, loads and manufacturing accuracy of the gear.

Wielkości fizyczne występujące w tekście:

b – szerokość koła [m],

J_1, J_2 – masowe momenty bezwładności [kgm^2],

T_{in}, T_{out} – momenty skracające wejściowy i wyjściowy [Nm],

r_{b1}, r_{b2} – promienie zasadnicze [m],

$\Sigma \delta$ – suma ugięć elementów [m],

$\Sigma \dot{\delta}$ – suma prędkości drgań elementów [m/s],

β_b – kąt pochylenia linii zębów na średnicy zasadniczej [deg],

λ – luz międzyzębny obwodowy [m],

h – wysokość zębów [m],

ε_a – czołowy wskaźnik przyporu,

ε_γ – całkowity wskaźnik przyporu,

m_n – moduł normalny [m],

t_z – czas zazębienia pary zębów [s],

t – wartość chwilowa czasu [s],

z_{n1}, z_{n2} – liczba zębów na kole zastępczym,

G – moduł sprężystości poprzecznej [MPa],

E – moduł sprężystości podłużnej [MPa],

I_1, I_2 – główne centralne momenty bezwładności dla przekroju wałów [m^4],

I_{o1}, I_{o2} – biegunowe momenty bezwładności dla przekroju wałów [m^4],

l_1, l_2 – długości wałów [m],

ξ – tłumienie względne,

μ_m – współczynnik tarcia,

R_a – chropowatość powierzchni [μm],

d_f – średnica podziałowa zębnika [mm],

η – lepkość dynamiczna oleju [MPa]