Aleksander KOWAL Politechnika Śląska, Gliwice

PROMIEŃ STYKU KULI Z PŁASKĄ POWIERZCHNIĄ W NAPRĘŻE-NIACH KONTAKTOWYCH

Streszczenie. Opisano sposób obliczania promienia styku hertzowskiego b_H wykorzystując wyznaczone za pomocą wahadła wartości współczynnika tarcia tocznego μ_0 dla różnych materiałów w ruchu oscylacyjnym. Zaletą tego sposobu jest prostota uzyskiwania wyników końcowych bez znajomości wartości modułów Younga *E* i liczb Poissona *v* badanej pary materiałów. Wyniki badań dla przykładowych materiałów zamieszczono w tablicy.

CONATACT RADIUS OF THE BALL WITH THE FLAT PLANE IN CONTACT STRESSES

Summary. One describes the method of calculating Hertz contact radius b_H , which uses the values of coefficient of rolling friction π_o (calculated by means of pendulum), for different materials in oscillation. The advantage of this method is that you can simply get the results without knowlage of Young's modulus value E and Poisson coefficient v. There are some examples for the different materials in the table below.

1. Wstęp

Naprężenia kontaktowe, zwane także naprężeniami stykowymi, wywołane są wzajemnym dociskiem elementów i stanowią osobną grupę zagadnień spiętrzenia naprężeń.

W przypadku współpracującej pary, kula na powierzchni próbki płaskiej, do obliczania promienia styku *a* korzysta się ze wzoru Hertza [6] o postaci

$$a = \left[\frac{3}{4} \cdot F \cdot R_k \cdot \left(\frac{1 - v_1^2}{E_1} + \frac{1 - v_2^2}{E_2}\right)\right]^{\frac{1}{2}},\tag{1}$$

a największe naprężenia p_{max} nacisku zależą od wymiaru styku dociskanych elementów i oblicza się je ze wzoru

$$p_{\max} = 0.578 \cdot \left\{ F \cdot \frac{E_1 \cdot E_2}{R_k^2 \cdot \left[E_2 \cdot (1 - v_1^2) + E_1 \cdot (1 - v_2^2) \right]} \right\}^{\frac{1}{3}}, [N/m^2],$$
(2)

gdzie: R_k - promień kuli [m].

F - obciązenie [N],

 $E_{1,2}$ - moduł Younga, dla stali 2,07.10⁵ [MPa],

VI.2 - współczynnik Poissona, dla stali 0,3.

Wymiar promienia styku *a* ma istotny wpływ na wartość tarcia tocznego, a wielkość tarcia decyduje o zużyciu elementów maszyn, o ich trwałości. Jak wynika ze wzoru (1), wpływ na wielkość promienia styku posiadają cechy materiałowe, obciążenie oraz promień kuli. Cechy materiałowe są podawane w literaturze technicznej. Jednak ich dobór do obliczeń promienia styku *a* sprawia niekiedy trudności związane z brakiem danych dla określonych materiałów bądź też podawaniem ich w szerokim przedziale wartości. Dość obszerne dane materiałowe podano w tablicy 1 [10].

Tablica 1

Materiał	E [Mpa] 10 ⁵	ν.
Stal o 0.07+0.14 C	2,02	0.25-0.3
Stal o 0,42+0,50 C	2,06	0,25-0,3
Stal o 0,25÷0,35 zahartowana	2,11	0.25-0.3
Stal chromowo-krzemowa na sprężyny	2.11	0,25-0,3
Żeliwo szare	1.0	0,23-0,27
Stopy aluminium	0,67-0,74	0.32-0.35
Stopy Cu-Sn	1,0-1,1	0.23
Drewno	0,08-0,2	0,045-0,065
Beton	0,18-0,42	0,16-0,18
Szkło potasowe	0,6-0,65	0,23
Szkło organiczne	0.019-0.028	0,34-0.27
Tworzywo epoksydowe –typu Epidian	0.033-0.035	0.35

Wartości E i ν dla niektórych materiałów [10]

W wytwórniach łożysk tocznych prowadzone są badania oporów ruchu elementów tocznych w bieżniach oraz opory ruchu kompletnych łożysk, stąd podawane są zależności do ich obliczania, zazwyczaj momentu tarcia w produkowanych przez siebie łożyskach tocznych [6, 8]. Dla przykładu w [1] za [5] podane są na wykresie zależności współczynnika tarcia łożysk tocznych μ_i w zależności od obciążenia łożyska (od 0 do 60 kN). Wartości te wynoszą $\mu_i = (0,08 + 2,5) \cdot 10^{-3}$, natomiast w [7] dla łożysk wieńcowych (wielkogabarytowych) w zależności od konstrukcji łożyska, $\mu = 0,003 \pm 0,008$.

Współczynnik tarcia tocznego zazwyczaj objaśniany jest z warunku równowagi momentów; $Q \neq Pr$, stąd k = rP/Q, (rys.1) [11]. Warunek ten zastosowano pierwotnie do rozpatrywania problemu obtaczania się koła kolejowego po szynie, stąd też powszechnie używany jest jako model obciążanego koła, jak np. rysunek 1a. Model obciążenia walców (rys. 1b) wynika z zadania dotyczącego przetaczania ciężarów.



Rys. 1. Objasnienie geometrii tarcia [11]* Fig. 1. Explanation of friction geometry [11]

Współczynnik tarcia tocznego (rys. 1a) wynosi $k = tg\rho_o$. Z rys. 1b wynikają także inne zależności: $tg\alpha = B_1C/BC = (k+k_1) / D$; $T/N = (k+k_1) / D$ oraz $P = T = (k+k_1) / D$.

Tablica 2

Lp.	Materiał	Współczynnik tarcia tocznego k [mm]
1	Stal miękka - stal miękka	0.05
2	Stal hartowana - stal hartowana	0.01
3	Żeliwo – żeliwo	0,05
4	Drewno – drewno	0,5 - 0,8

Orientacyjne wartości współczynnika tarcia tocznego k w przypadku toczenia kuli na płaskim podłożu [11]

Z tych przybliżonych danych można wnioskować o wielkości współczynnika tarcia toczenia. Z przeprowadzonych badań eksperymentalnych, mających na celu wyznaczenie współczynnika tarcia tocznego k dla kulistego kształtu, uzyskano następujące rezultaty [11]:

Dla kuli o średnicy d_k = 11,113 [mm], k = 0,04 – 0,060 [mm],

a dla średnicy d_k = 14,288 [mm], k = 0.05 - 0.065 [mm],

w przedziale kąta tarcia tocznego $\rho \approx 0^{\circ}25' \div 0^{\circ} 30'$ z warunku $\rho = arctg k/r_k$, gdzie r_k jest promieniem kuli. Jest w [11] także uwaga, że w przypadku mniejszych wymiarów kulek kąty tarcia będą większe, lecz przy właściwym wyborze nacisków i właściwej obróbce cieplnochemicznej elementów oraz po dokładnym wykonaniu kąt tarcia tocznego nigdy nie przekracza 1°.

Dane dotyczące współczynników tarcia dla współpracującej pary ze stali z [4] zawarte sa w tablicy 3, a dane z innego źródła [2] w tablicy 4.

[•] Oznaczenia wg literatury [11]

Tablica 3

Wartości współczynników tarcia tocznego dla niektórych materiałów wg [9]

Rodzaj tarcia	Typ tarcia	Współczynnik tarcia tocznego µ	
	Tarcie ślizgowe spoczynkowe	0,1-1	
\$	Tarcie graniczne	0,1-0,2	
Tarcie ślizgowe	Tarcie mieszane	0.01-0,1	
	Tarcie płynne	0.001-0.01	
	Tarcie gazowe	0,0001	
Tarcie toczne	Smarowane	0,005-0.001	

Tablica 4

Wartości współczynników tarcia ślizgowego μ_G oraz tocznego μ_R z warunku $P=Q\cdot\mu_R/r_k$ [2]

	μ_G	μ _R [cm]
Stal na drewnie	0.8-0.5	
Stal na stali	0.05-0.1	10-4
Stal na stali z filmem olejowym	0.06-	
Stal na lodzie	0.014	
Aluminium na aluminium	1.8-1	
Opony na suchej drodze	1,05	0,7
Opony na mokrej drodze	0.4	

Wartości ramion momentów tarcia tocznego f dla łożysk [10] pokazano w tablicy 5.

Tablica 5

Współczynnik tarcia tocznego w łożyskach [10]

Typ łożyska	f [cm]	Typ łożyska	f [cm]
Kulkowe. promieniowe (obciążenie promieniowe)	0.002	Igiełkowe	0,008
Kulkowe, promieniowe (obciążenie osiowe)	0,004	Baryłkowe dwurzędowe	0,004
Kulkowe sferyczne dwurzędowe	0.0015	Орогоwе	0,003
Rolkowe z krótkimi rolkami	0,003	Stożkowe (obciążenie promieniowe)	0,008
Rolkowe z długimi rolkami	0.006	Stożkowe (obciążenie osiowe)	0.020

2. Badania własne

Jak wynika z przedstawionych danych dotyczących tarcia tocznego, obliczanie oporów ruchu dla dowolnego przypadku jest sprawą złożoną, ponieważ mała jest liczba par współpracujących materiałów, dla których podawane są współczynniki tarcia tocznego.

Kłopotliwa jest także ocena ramienia momentu reakcji w styku.

Do oceny porównawczej wartości współczynników tarcia tocznego dla wybranych par materiałowych wykorzystano urządzenie w postaci wahadła [9].

Do układu wahadła, kula na płaskim podłożu z wybranych materiałów, dostarczano energię potencjalną E_p przez wychylenie, uzyskując określoną wysokość podnoszenia h środka ciężkości masy m wahadła.

Dostarczona wartość energii potencjalnej

$$E_p = m \cdot g \cdot h \,, \tag{3}$$

gdzie: m. - masa wahadła,

g - przyspieszenie ziemskie,

h - wysokość podnoszenia.

Całkowita dyssypacja w styku kuli z płaską próbką zadanej energii potencjalnej jest pracą tarcia. Pracę tarcia do chwili zatrzymania się ruchu wahadła można wyznaczyć z zależności

$$L_{T} = T \cdot S = m \cdot g \cdot \mu_{o} \cdot i \cdot s_{s}, \qquad (4)$$

gdzie: T - siła tarcia,

S - całkowita droga tarcia,

 μ_o - współczynnik oporów ruchu tocznego,

i - całkowita liczba wahnięć wahadła,

 s_s - uśredniona droga pojedynczego, względnego ruchu w styku pomiędzy kulą i współpracującym płaskim elementem (podłożem).

Z porównania (3) i (4) oraz wymiarów geometrycznych wahadła wyznaczono dla oscylacyjnego ruchu tocznego wartość współczynnika oporu [9]

$$\mu_o = \frac{h}{i \cdot s_e} = \frac{0.536}{i} \tag{5}$$

Do wyznaczenia k [mm] przyjmuje się różne miejsca przyłożenia reakcji obciążenia R_Q , jak np. na rys. 1a. Ogólnie, w zależności od zastosowanych warstw pośrednich, można przyjąć, że $f=x \cdot b_{Hw}$. Szczególnymi a możliwymi do założenia miejscami przyłożenia reakcji mogą być np.:

- $f=0,42 \cdot b_H$ jako środek ciężkości połowy koła pola nacisków,
- f=0,64·b_H jako środek ciężkości półokręgu pola nacisków.

W [3] pokazano rozkład naprężeń i odkształceń, a największe z nich - białe pole na rys. 2, znajduje się w odległości ok. $2b_H/7$ od brzegu styku.



Rys. 2. Rozkład nacisków na polu styku herzowskiego [3] Fig.2. Pressures distribution in Hertz contac area [3]

W przypadku ogólnym, a w tym dla przypadku zastosowania wahadła, proponuje się model obciążenia kuli przedstawiony na rys. 3. Do dalszej analizy przyjęto, że ramię przyłożenia reakcji znajduje się w odległości promienia styku (w kierunku potencjalnego ruchu) od głównej jego osi symetrii, tj. przy x=1, stąd

$$f = b_{Hw} \tag{6}$$



Z rys. 3 wynika, że równanie równowagi momentów względem centralnego punktu styku ma postać

$$P \cdot e = b_{Hw} \cdot R_O \tag{7}$$

Z sumy sił na oś x wynika, że $P=T=Q:\mu_o$, natomiast z sumy sił na oś y; $R_Q = Q$. Podstawiając to do (16) i upraszczając otrzymuje się:

$$\mathbf{b}_{\mathrm{Hw}} = \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{o}} \,, \tag{8}$$

gdzie: b_{Hw} - promień styku w wahadle w [mm] dla zastosowanej kuli o średnicy

 $d_w = \phi 30 \text{ [mm]}$ i przy obciążeniu $Q_w = 28,2 \text{ [N]}$, (wartości w tablicy 2),

e - odległość środka ciężkości wahadła od powierzchni styku (długość wahadła; e=l=603,52 [mm]), a w przypadku samej kuli $e=r_k$,

 μ_o - współczynnik oporu ruchu tocznego wyznaczony za pomocą wahadła [14].



Podobną zależność uzyskuje się także z analizy przypadku szczególnego, a mianowicie toczenia się kuli po równi pochyłej, co pokazano na rys. 4.

Rys. 4. Geometria i rozkład sił na równi pochyłej Fig. 4. Geometry and forces distribution on the inclined plane

Na rys. 4 pokazana jest geometria i rozkład sił na kuli znajdującej się na granicy spoczynku i toczenia się po równi pochyłej. Kąt pochylenia α z założenia jest równy kątowi tarcia tocznego dla materiałów kuli i równi pochyłej.

Z równania momentów względem centralnego punktu powierzchni styku i z równania rzutów sił na równię (oś x) wyznaczyć można wartość promienia styku hertzowskiego.

$$Q \cdot e = R_N \cdot b_H, \tag{9}$$

gdzie: Q - ciężar kuli,

e - odległość między siłą ciężkości i środka styku kuli z równią, $e = r_k \sin \alpha$,

 R_N - reakcja nacisku kuli na równię pochyłą, $R_N = F_N = Q \cos \alpha$,

 b_H - promień styku hertzowskiego,

 r_k - promień kuli,

 F_N - siła składowa ciężaru kuli prostopadła do pochylonej równi. $F_N = Q \cos \alpha$.

$$P = T , (10)$$

gdzie: P - siła składowa ciężaru kuli równoległa do pochylonej równi, $P=Q \sin \alpha$,

T - siła tarcia, $T = F_N \cdot \mu_o = Q \cdot \mu_o \cdot \cos \alpha$,

 μ_o - współczynnik tarcia tocznego wyznaczony np. z ruchu wahadła [9].

Rozwiązując układ równań (9) i (10) oraz podstawiając podstawowe zależności otrzymuje się

$$r_k \sin \alpha = b_H \cos \alpha, \tag{11}$$

a z tego zależność do określenia promienia styku b_H podobną do (8)

$$b_H = r_k \cdot \mathrm{tg}\,\alpha = \mu_o \cdot r_k \tag{12}$$

Na wartość promienia styku kuli i płaskiej powierzchni elementu z określonego materiału wpływ mają, jak wynika np. ze wzoru (1), obciążenie i promień kuli.



Dla przypadku ogólnego, innego niż w wahadle obciążenia i promienia kuli, wartość promienia styku zmieni się wg zależności:

$$b_{H} = b_{Hw} \cdot \left(\frac{Q}{Q_{w}} \cdot \frac{R_{k}}{d_{w}/2}\right)^{\gamma_{3}}$$
(13)

Podstawiając dane wahadła: średnicę $d_w = 30$ [mm] i obciążenie $Q_w = 28,2$ [N], otrzymuje się zależność do obliczania promienia styku:

$$b_{H} = 0.133 \cdot b_{Hw} \cdot (Q \cdot R_{k})^{\frac{1}{3}} \text{ [mm]}$$
 (14)

W tablicy 6 umieszczono przykładowe wyniki badań oporów ruchu tocznego kuli ze stali łożyskowej, oscylacyjnie obtaczającej się po wybranych płaskich materiałach. W tablicy tej zamieszczono współczynnik oporu ruchu tocznego μ_0 , wskaźnik oporu tocznego k_{μ} , tj. iloraz współczynnika oporu ruchu tocznego μ_0 danego materiału próbki i materiału wzorcowego (stal o twardości 50 HRC –lp. 1 w tablicy 2). Ostatnia kolumna tablicy 6 zawiera wartości promienia styku b_{Hw} [mm] obliczonego na podstawie zależności (8).

Tablica 6

Lp.	Materiał próbki (podłoże)	Współcz. oporu ruchu tocznego µ _o	Wskaźnik oporu tocznego k _µ	Promień styku hertzowskiego b _{H*} [mm]
1	Wzorzec twardości stali, 50HRC	0,000 03	1	0,018
2	Stal resorowa, szlifowana	0,000 03	1	0,018
3	Węglik spiekany SC30 typu SPKN 1504 EDR	0,000 04	1,3	0,024
4	Stopowa stal nierdzewna	0,000 05	1,6	0,030
5	Stal St5	0,000 05	1,6	0,030
6	Stal St0, na powierzchni silna korozja	0,000 54	18,0	0,326

Współczynnik oporu w ruchu oscylacyjnym łożyskowej kuli stalowej po płaskiej i technicznie suchej próbce oraz wskaźnik oporu próbki k_µi promień styku b_{Hw} [mm]

Konieczność wprowadzania nowych materiałów, często kompozytowych, do urządzeń, w których istotną rolę odgrywa tarcie toczne, wymaga poznania wielkości współczynnika tarcia tocznego. Przedstawiony w [9] sposób badania oporów oscylacyjnego ruchu tocznego pozwala wyznaczyć współczynnik tarcia dla różnych współpracujących materiałów.

Z przeprowadzonej analizy wynika, że wyznaczone współczynniki oporu oscylacyjnego ruchu tocznego dla badanych materiałów (tablica 6) pozwalają na podstawie zależności (8) określać wartość promienia b_{Hw} styku hertzowskiego. Szerokie spektrum kojarzeń materiałowych badanych w tych samych warunkach może okazać się pomocne do celów porównawczych.

Wartość promienia styku b_H dla przypadków o innych wymiarach kuli oraz przy innym obciążeniu, dla podobnych materiałów badanych za pomocą wahadła, można obliczyć z zależności (14).

LITERATURA

- Dubbel H. i in.: Taschenbuch f
 ür den Maschinenbau. Wyd. IX, T. I, Springer-Verlag, Berlin 1943
- <u>http://www.physik.rwth-aachen.de/group/IIIphys</u>/INFOS/Exscript/7Kapitel/ VII2Kapitel.html
- 3. http://monet.unibas.ch/intro/Kapitel_3/tsld053.htm
- 4. http://www.tu-hurburg.de/bim/Rep97/BilderRep97/
- 5. Jürgensmeyer: Gestaltung von Wältzlagerungen. Springer, Berlin 1953
- 6. Katalog firmy Timken: Technisches Handbuch. Kegelrollenlager. 1987
- 7. Katalog Hoesch Rothe Erde Schmiedag AG: Großwälzlager. Dortmund 1990
- Katalog Zawierciańskiej Fabryki Maszyn "ZAFAMA": Łożyska toczne wielkogabarytowe. Wyd. III, 1997
- Kowal A.: Badania oporu ruchu tocznego. Międzynarodowa Konferencja Naukowa: Górnictwo zrównoważonego rozwoju. Materiały Konferencji III: Energooszczędne i niezawodne maszyny górnicze. Gliwice 30.11.2000 (przyjęty do druku).
- 10. Mały poradnik mechanika. Tom I, s. 225. WNT, Warszawa 1985
- 11. Turpaew A.I.: Wintowye mechanizmy i peredaczi. Maszinostroenie, Moskwa 1982

Recenzent: Prof.dr hab.inz. Karol F.Reich

Abstract

The contact stresses are calculated from the Hertz formulae and they depend on the contact radius. This radius depends on the load, the diameter of ball meshing with flat plane as well as on the applied materials, i.e. Young's modulus E and Poissons coefficient ν . In case of contact of different materials these data are not determined unequivocally in every case, e.g. for steel the coefficient $\nu = 0,25 \div 0,3$, hence the contact radius and the maximum stresses are calculated not accurate.

In the proposed method of calculation of contact radius it is based on the rolling friction coefficients determined by means of physical pendulum. Physical pendulum at determined geometric features and given load of contact allows for calculation of Hertz contact radius from the dependence (8). The knowledge of this contact radius b_{Hw} allows for determination of the contact radius b_H in general case from the formula (14), i.e. at the different ball diameter and different load.

Determined exemplary values of Hertz contact radius for the geometric conditions and load coupled with applied physical pendulum are introduced in Table 5.