

Eugeniusz ŚWITOŃSKI  
Politechnika Śląska, Gliwice

## SYMULACJA ZJAWISK DYNAMICZNYCH W NAPĘDACH GÓRNICZYCH

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono sposób modelowania drgań giętno-skrętnych elektromechanicznego układu napędowego dużej mocy. Układ rozpatrzono jako dyskretno-ciągły ze sprzężeniem pomiędzy częścią elektryczną i mechaniczną. Do dyskretyzacji wałów zastosowano metodę elementów skończonych.

## SIMULATION OF DYNAMIC PHENOMENA IN MINING DRIVE SYSTEMS

**Summary.** The way of modelling if transverse-torsional vibrations of high power electromechanical driving system has been presented in the paper. The system has been considered as a discrete-continuous one with mutual interaction between electrical and mechanical parts. The FEM has applied for discretization of shafts.

### 1. Wstęp

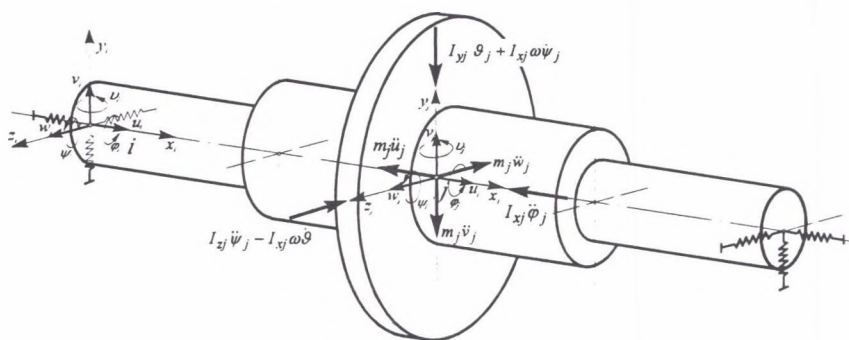
Nowoczesne maszyny i urządzenia górnicze o wysokich parametrach eksploatacyjnych charakteryzują się dużą mocą, która zapewnia realizację założonej trajektorii ruchu organu roboczego przy dynamicznie zmiennym obciążeniu. Dynamicznie zmieniający się stan obciążenia i złożona postać konstrukcyjna maszyny wywołują w układzie drgania, które pośrednio prowadzą do zwiększenia intensywności i poszerzenia spektrum pola sygnałów wibracyjnych i wibroakustycznych. Analiza tych zjawisk wymaga opracowania złożonych modeli dynamicznych, które można rozwiązać z wykorzystaniem metod numerycznych [2, 4, 5]. Analiza dynamiczna układu napędowego dostarcza wielu cennych informacji, które po odpowiednim ich opracowaniu mogą być wykorzystane w procesie projektowo-konstrukcyjnym. W układach napędowych dużej mocy zjawiska dynamiczne zależą od wzajemnego oddziaływania układu mechanicznego i silnika elektrycznego. Opracowane modele dynamiczne mogą być w dalszym etapie wykorzystywane do analizy wrażliwości i optymalizacji charakterystyk dynamicznych układów napędowych dużej mocy [2, 3].

## 2. Modelowanie drgań układu napędowego

Analiza prac dotyczących dynamiki układów napędowych dużych mocy wskazuje na konieczność uwzględnienia w badaniach dynamicznych sztywności giętno-skrętnej wałów i sztywności łożysk. Uwzględnienie tych zjawisk prowadzi do opisu zagadnień dynamicznych układu napędowego w postaci drgań giętno-skrętnych. Do opracowania modelu dynamicznego układu napędowego, który uwzględniałby podatność wałów, można zastosować metodę elementów skończonych (MES). Najbardziej popularną i efektywną reprezentacją MES jest reprezentacja przemieszczeniowa, w której niewiadomymi są przemieszczenia. Aproksymacji poddaje się tutaj pole przemieszczeń za pomocą funkcji kształtu.

Układ mechaniczny można przedstawić jako odizolowane podukłady, którymi zazwyczaj będą poszczególne wały przekładni z osadzonymi na nich kołami zębatymi, sprzęgłami itd. Wały mogą być sprężysto podparte w miejscu osadzenia łożysk. Siłami zewnętrznymi działającymi na wyodrębnione podukłady są siły napędowe od silnika elektrycznego, stan obciążenia organu roboczego oraz siły wzajemnego oddziaływania wałów, które najczęściej są siłami międzyzębnymi lub w sprzęgłach. W ujęciu globalnym układu napędowego siły międzyzębne i siły w sprzęgłach są siłami wewnętrznymi.

W celu zbudowania fizycznego modelu układu mechanicznego w pierwszej kolejności zajmiemy się pojedynczym wałem przedstawionym na rys. 1.



Rys. 1. Model fizyczny wału przekładni

Fig. 1. Physical model of gear shaft

Podziału wału na prętowe elementy skończone należy tak dokonać, aby węzły podziału znalazły się w miejscach podparcia wału, osadzenia kół zębatych, zmian średnic wału itd. Każdy węzeł może posiadać w ogólnym przypadku 6 stopni swobody. Trzy stopnie translacyjne o kierunkach osi lokalnego układu współrzędnych oraz trzy rotacyjne względem tych osi. Przemieszczenia uogólnione węzłów przedstawimy w postaci następującej macierzy kolumnowej:

$$\mathbf{q}_i = [u_i, v_i, \psi_i, w_i, \vartheta_i, \varphi_i]^T \quad (1)$$

Koło modelowane w postaci nieodkształcalnej tarczy sztywno osadzonej na wale wykonuje ruch złożony z postępowego ruchu unoszenia środka masy z prędkością

$$\mathbf{v}_u = u_j \mathbf{i} + v_j \mathbf{j} + w_j \mathbf{k} \quad (2)$$

i ruchu kulistego względem tego środka opisanego małymi obrotami wokół osi  $y_j$  i  $z_j$  oraz prędkością obrotu własnego  $\omega + \dot{\varphi}_j$ , gdzie  $\omega$  jest stałą prędkością kątową wału.

Dla pojedynczego wału, z osadzonymi na nim kołami zębatymi i łożyskami, możemy napisać następujące równanie ruchu:

$$\mathbf{M}_w \ddot{\mathbf{q}}_w + (\mathbf{B}_w + \mathbf{G}_w) \dot{\mathbf{q}}_w + \mathbf{K}_w \mathbf{q}_w = \mathbf{Q}_w, \quad (3)$$

gdzie:  $\mathbf{M}_w, \mathbf{B}_w, \mathbf{K}_w, \mathbf{G}_w$  są odpowiednio macierzami bezwładności, tłumienia, sztywności efektu żyroskopowego całego wału,  $\mathbf{q}_w = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$  jest macierzą kolumnową uogólnionych przemieszczeń węzłowych,  $\mathbf{Q}_w = [Q_1, Q_2, \dots, Q_n]^T$  jest macierzą kolumnową uogólnionych sił zewnętrznych działających w węzłach,  $n$  jest liczbą węzłów podziału wału.

W przypadku ogólnym, tj. dla przekładni wielostopniowej układ równań można zapisać jednym równaniem macierzowym

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{B} + \mathbf{G}) \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}(t) = \mathbf{Q}, \quad (4)$$

które jest równaniem różniczkowym opisującym ruch całej przekładni zębatej. W równaniu tym macierze  $\mathbf{M}, \mathbf{B}, \mathbf{K}, \mathbf{G}$  są globalnymi macierzami bezwładności, tłumienia, sztywności i efektu żyroskopowego, natomiast przemieszczenia uogólnione i siły uogólnione opisane są macierzami kolumnowymi [4].

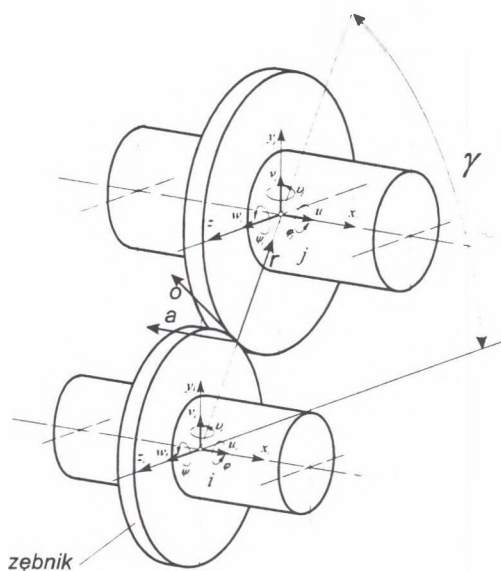
### 3. Modelowanie sztywności zazębienia

#### 3.1. Macierz sztywności zazębienia

W celu obliczenia macierzy  $\mathbf{K}_z$  i  $\mathbf{B}_z$  przeanalizujemy jednostopniową przekładnię z walcowymi kołami zębatymi o użębieniu skośnym (rys. 2). Uwzględniając fakt, że wzajemne oddziaływania zębów skierowane są wzdłuż linii przyporu, siłę międzyzębną można opisać następującą zależnością:

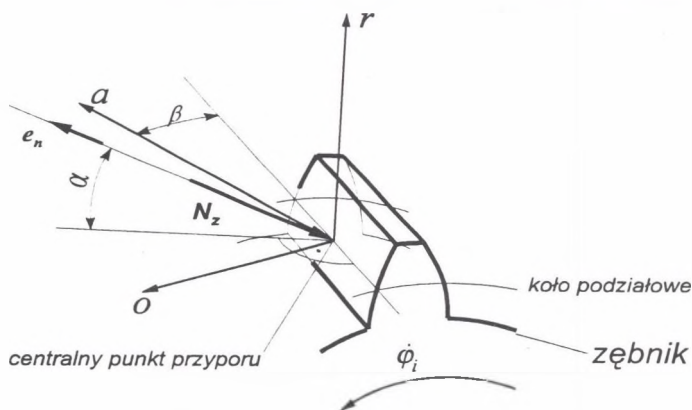
$$N_z = k_z (d_i - d_j) \mathbf{e}_n, \quad (5)$$

gdzie:  $d_i, d_j$  są wektorami przemieszczeń punktów styku, znajdujących się w biegunie zazębienia,  $\mathbf{e}_n$  jest wersorem osi prostopadłej do płaszczyzny przyporu w tym punkcie,  $k_z$  jest współczynnikiem średniej sztywności zazębienia sprowadzonej do linii przyporu.



Rys.2. Jednostopniowa przekładnia zębata  
Fig.2. One stage of spur gear

Obliczając współrzędne wektorów  $d_i, d_j$  i  $e_n$  w układzie współrzędnych  $ora$  w funkcji przemieszczeń uogólnionych węzłów, w których osadzone są współpracujące koła zębata oraz w funkcji kąta  $\gamma$ , otrzymuje się następującą zależność na siłę międzyzębną:



Rys.3. Oś układu  $ora$  w punkcie zazębienia  
Fig.3. Axis of  $ora$  coordinate system in meshing point

$$N_z = k_z(\delta_i^T q_i - \delta_j^T q_j), \quad (6)$$

gdzie  $\delta_i, \delta_j$  - macierze kolumnowe geometrycznych parametrów kół zębatych.

Pochodne cząstkowe energii odkształcenia zazębienia względem  $q$  są różne od zera tylko dla wektorów  $q_i$  i  $q_j$  i wynoszą:

$$\frac{\partial E_{pz}}{\partial q_i} = k_z(\delta_i \delta_i^T q_i - \delta_i \delta_j^T q_j), \quad (7)$$

$$\frac{\partial E_{pz}}{\partial q_j} = k_z(-\delta_j \delta_i^T q_i + \delta_j \delta_j^T q_j) \quad (8)$$

Macierz sztywności zazębienia dla przekładni jednostopniowej ma zatem postać:

$$K_z = k_z \begin{bmatrix} \delta_i \delta_i^T & -\delta_i \delta_j^T \\ -\delta_j \delta_i^T & \delta_j \delta_j^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \end{Bmatrix} = q \quad (9)$$

Postępując podobnie jak przy wyznaczaniu macierzy sztywności zazębienia otrzymamy macierz tłumienia  $B_z$

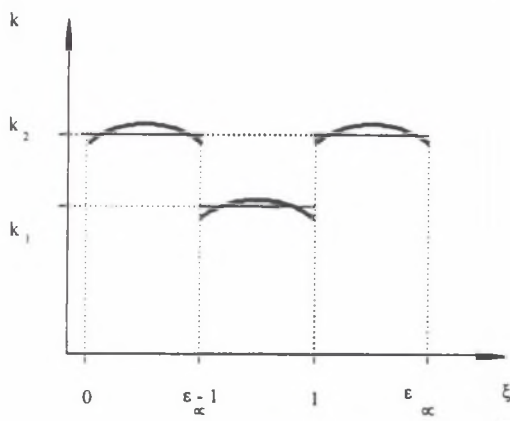
$$B_z = b_z \begin{bmatrix} \delta_i \delta_i^T & -\delta_i \delta_j^T \\ -\delta_j \delta_i^T & \delta_j \delta_j^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_i \\ \dot{q}_j \end{Bmatrix} = \dot{q} \quad (10)$$

### 3.2. Zmienna sztywność zazębienia

Jednym z głównych czynników mających wpływ na charakter zjawisk dynamicznych w przekładniach zębatych jest zmienna sztywność zazębienia. Zależy ona od sztywności jednej pary zębów zmiennej wzdłuż odcinka przyporu oraz liczby par zębów będących aktualnie w zazębieniu, wyrażonej za pomocą liczby przyporu  $\varepsilon_\alpha$ . Przebieg zmian sztywności zazębienia podczas współpracy dwóch kół zębatych o zębach prostych przedstawiono na rys. 4. Wartości sztywności całkowitej zazębienia, wyznaczone dla przypadku zmiennej sztywności zazębienia jednej pary zębów, można z dobrym przybliżeniem aproksymować odcinkami linii prostych. Przy założeniu stałych wartości współczynnika sztywności dla zazębienia jednoparowego i dwuparowego przebieg zmian sztywności można opisać funkcją:

$$k(\xi) = \begin{cases} k_2 & 0 \leq \xi \leq \varepsilon_\alpha - 1 \\ k_1 & \varepsilon_\alpha - 1 < \xi < 1 \end{cases}, \quad (11)$$

gdzie  $\xi$  - względna współrzędna wzdłuż odcinka przyporu odniesiona do podziałki zazębienia.



Rys.4. Przebieg zmian sztywności zazębienia kół zębatych o zębach prostych  
Fig.4. Changes of stiffness of spur gear meshing

Stosunek sztywności zazębienia dwuparowego do jednoparowego wynosi około 1,7 i jest mniejszy od 2. Wartość tego stosunku zależy od przełożenia przekładni, wartości współczynników przesunięcia zarysu oraz liczby przyporu. Zmiany sztywności zazębienia można w sposób przybliżony opisać za pomocą funkcji harmonicznej [1]. Ten sposób modelowania przedstawia zmiany sztywności zazębienia w funkcji kąta obrotu wału:

$$k(\varphi(t)) = k_s + k_d \sin(z\varphi(t)), \quad (12)$$

gdzie:  $k_s$  - wartość średnia sztywności zazębienia,  $k_d$  - amplituda składowej dynamicznej sztywności,  $z$  - liczba zębów.

### 3.3. Luzy

Ze względu na konieczność swobodnego zazębienia i wyzębienia się zębów w każdej przekładni zębatej występuje luz międzyzębny i wierzchołkowy większy od zera. W zależności od wielkości luzu może wystąpić całkowite oddzielenie się zębów od siebie lub współpraca ich przeciwległych boków. Najprostszym sposobem symulacji występowania luzu w zazębieniu jest opisanie siły dynamicznej w zazębieniu następującą funkcją:

$$F(k, \Delta q) = k(q) \begin{cases} (\Delta q - 0.5l) & \Delta q > 0.5l \\ 0 & -0.5l \leq \Delta q \leq 0.5l \\ (\Delta q + 0.5l) & \Delta q < -0.5l \end{cases}, \quad (13)$$

gdzie:  $F$  - siła w parze kinematycznej,

$\Delta q$  - różnica współrzędnych uogólnionych,

$k(q)$  - współczynnik sztywności,

$l$  - zadana wartość luzu.

### 4. Modelowanie silnika asynchronicznego

Zjawiska dynamiczne występujące w maszynach asynchronicznych mogą być opisane układem różniczkowych równań nieliniowych.

Równania różniczkowe opisujące stan dynamiczny silnika asynchronicznego sformułowano w układzie współrzędnych  $(\alpha, \beta)$  wykorzystując przy ich zapisie wektory przestrzenne wielkości elektromagnetycznych (napięcia, prądy, strumienie magnetyczne sprzężone) silnika [6]. Przy formułowaniu tych równań oprócz tradycyjnych założeń stosowanych w teorii maszyn elektrycznych dodatkowo przyjęto, że:

- pole magnetyczne główne w maszynie oraz pola magnetyczne rozprożeń uzwojeń stojana i wirnika są całkowicie niezależne od siebie, tak że zjawiska nasycenia obwodów magnetycznych dla tych pól można analizować oddzielnie,
- charakterystyki magnesowania obwodów magnetycznych dla wyżej wymienionych pól są nieliniowe, ale jednoznaczne,
- amplitudy (długości) wektorów przestrzennych strumieni magnetycznych sprzężonych z tymi polami są nieliniowymi funkcjami amplitud wektorów przestrzennych odpowiednich prądów: prądu magnesującego, prądu stojana i wirnika.

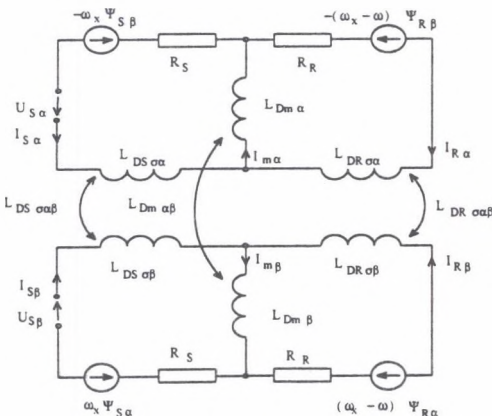
$$\Psi_m = \Psi_m(I_m); \quad \Psi_{S\sigma} = \Psi_{S\sigma}(I_S); \quad \Psi_{R\sigma} = \Psi_{R\sigma}(I_R); \tag{14}$$

gdzie:  $I_S, I_R, I_m$  - przestrzenne wektory prądów stojana, wirnika oraz prądu magnesowania,

Uwzględniając powyższe założenia można sformułować układ równań prądowo-napięciowych obwodu elektrycznego w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} U_s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{SS} & R_{SR} \\ R_{RS} & R_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_S \\ I_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{DSS} & L_{DSR} \\ L_{DSR}^T & L_{DRR} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_S \\ I_R \end{bmatrix} \tag{15}$$

Na podstawie równań schemat zastępczy maszyny asynchronicznej uwzględniający zjawisko nasycenia obwodów magnetycznych maszyny dla pola głównego i pól rozproszenia stojana i wirnika przedstawiono na rys. 5.



Rys.5. Schemat zastępczy silnika asynchronicznego uwzględniający zjawisko nasycenia obwodów magnetycznych silnika  
 Fig.5. Substitute diagram of asynchronous motor considering saturation of magnetic circuits

gdzie:

$U_{S\alpha}, U_{S\beta}, I_{S\alpha}, I_{S\beta}, I_{R\alpha}, I_{R\beta}$  - napięcia stojana, prądy stojana i wirnika we współrzędnych  $\alpha, \beta$ .

$\Psi_{S\sigma}, \Psi_{R\sigma}, \Psi_m$  - amplitudy wektorów przestrzennych sprzężeń magnetycznych silnika z polem rozproszenia stojana, wirnika, polem głównym,

$R_S, R_R$  - rezystancja stojana i wirnika,

$\omega_x, \omega = p\omega_m, p$  - prędkość kątowna elektryczna wirowania układu współrzędnych ( $\alpha, \beta$ ) względem stojana, prędkość kątowna elektryczna wirnika, prędkość kątowna mechaniczna wirnika, liczba par biegunów,

Występujące w powyższych równaniach oraz na schemacie zastępczym indukcyjności statyczne maszyny  $L_{S\sigma}, L_{S\sigma}, L_m$  oraz idukcyjności różniczkowe  $L_{DS\sigma\alpha}, L_{DS\sigma\beta}, L_{DS\sigma\alpha\beta}, L_{DR\sigma\alpha}, L_{DR\sigma\beta}, L_{DR\sigma\alpha\beta}, L_{Dm\alpha}, L_{Dm\beta}, L_{Dm\alpha\beta}$ . nie są wielkościami stałymi, lecz zależą od wartości odpowiednich prądów zgodnie z ogólnymi zależnościami:

- dla indukcyjności statycznych

$$L_K = \frac{\Psi_K(I_K)}{I_K}; \quad K=S\sigma, R\sigma, m \quad (16)$$

- dla indukcyjności różniczkowych

$$L_{DK\alpha} = L_{DK} \frac{I_{K\alpha}^2}{I_K^2} + L_K \frac{I_{K\beta}^2}{I_K^2}; \quad L_{DK\beta} = L_{DK} \frac{I_{K\beta}^2}{I_K^2} + L_K \frac{I_{K\alpha}^2}{I_K^2} \quad (17)$$

$$L_{DK\alpha\beta} = (L_{DK} - L_K) \frac{I_{K\alpha} I_{K\beta}}{I_K^2}; \quad K=S\sigma, R\sigma, m, \quad (18)$$

gdzie:

$$I_K = \sqrt{I_{K\alpha}^2 + I_{K\beta}^2}; \quad K=S\sigma, R\sigma; \quad I_m = \sqrt{(I_{S\alpha} + I_{R\alpha})^2 + (I_{S\beta} + I_{R\beta})^2}; \quad L_{DK} = \frac{\partial \Psi_K(I_K)}{\partial I_K} \quad (19)$$

$L_K, L_{DK\alpha}, L_{DK\beta}, L_{DK\alpha\beta}$  - indukcyjność statyczna, indukcyjności różniczkowe silnika w osi  $\alpha, \beta$  oraz indukcyjność różniczkowa wzajemna.

Przedstawiony powyżej układ równań różniczkowych łącznie z wyrażeniami na moment elektromagnetyczny stanowi nieliniowy model matematyczny silnika asynchronicznego. Wszystkie wielkości i parametry wirnika sprowadzone są na stronę uzwojenia. Parametry modelu silnika elektrycznego określa się na podstawie cech dynamicznych silnika elektrycznego i badań doświadczalnych.

## 5. Wnioski

Przedstawiony model dynamiczny elektromechanicznego układu napędowego umożliwia szczegółową analizę zjawisk dynamicznych w parach kinematycznych. Opracowany model dynamiczny układu napędowego oraz algorytmy obliczeń numerycznych mają charakter



ogólny i mogą uwzględniać w obliczeniach dowolny charakter związków fizycznych w parach kinematycznych i dowolny przebieg stanu obciążenia. Nieliniowe związki fizyczne opisują nieliniowości charakterystyk ząbów, niedokładności eksploatacyjne i wykonawcze oraz cechy dynamiczne układu napędowego. Przyjęty model dynamiczny uwzględnia sprzężenie elektromechaniczne i pozwala na symulację komputerową zjawisk dynamicznych, występujących w parach kinematycznych układu napędowego dla różnych warunków początkowych.

## LITERATURA

1. Laschet A.: Simulation von Antriebssystemen. Springer-Verlag 1988
2. Mężyk A.: Minimization of transient forces in an electromechanical system. Structural Optimization, v.8, No 4, 1994
3. Mężyk A., Switoński E.: Optimising dynamic characteristics of machinery. Proceeding of European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Barcelona Spain 2000
4. Rak Z.: Modelowanie drgań giętno-skrętnych elektromechanicznych układów napędowych. Rozprawa doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice 1995
5. Świtoński E., Mężyk A., Rak Z.: Dynamics of the Mining Machines Including Electromechanical Phenomena. Mechanizacja i Automatyzacja Górnictwa nr 9-10, Katowice 1991
6. Vas P.: Electrical Machines and Drives. A Space-Vector Theory Approach. Oxford Science Publications 1992

Recenzent: Prof.dr hab.inż. Karol F.Reich

## Abstract

The way of modelling of transverse-torsional vibrations of high power electromechanical driving system has been presented in the paper. The system has been considered as a discrete-continuous one with mutual interaction between electrical and mechanical parts. The FEM has been applied for discretization of shafts. The model takes into account varying stiffness of meshings, clearances in kinematic pairs of mechanical part as well as saturation of magnetic circuits of the electric motor.