ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2000
Seria: GÓRNICTWO z.246 Nr kol. 1480

Władysław ZAPAŁA
Politechnika Śląska, Gliwice

DEFINICJA I PRZYKŁADOWE ZASTOSOWANIE MACIERZY NEWTONA-PASCALA

Streszczenie. Przedstawiono definicję macierzy Newtona-Pascala i podano przykład jej zastosowania do projektowania filtrów cyfrowych.

DEFINITION OF NEWTON-PASCAL MATRIX AND ITS EXEMPLARY APPLICATION

Summary. Definition of Newton-Pascal matrix and its exemplary application for designing digital filters has been presented in the paper.

1. Wstęp

Jednym z powszechnie stosowanych w algebrze wzorów jest dwumian Newtona

$$(a+b)^k = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} a^{k-i} b^i \tag{1}$$

Współczynniki rozwinięcia dwumianu można obliczać rekurencyjnie według schematu zwanego trójkątem Pascala

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array} \tag{2}$$

Według tego schematu wartości elementów leżących w każdym kolejnym wierszu są obliczane jako suma sąsiednich elementów leżących w wierszu poprzednim. Nie dotyczy to elementów skrajnych w każdym wierszu, których wartości są zawsze równe jedności.

2. Macierz Newtona-Pascala i macierz odwrotna

Macierzą Newtona-Pascala M_{q+1} nazwiemy macierz kwadratową o rozmiarach (q+1)x(q+1), której elementy mają następujące wartości i rozmieszczone są w następujący sposób:

a) równe zero, gdy elementy macierzy leżą powyżej głównej przekątnej,

b) równe wartościom współczynników rozwinięcia dwumianu $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^k$ kolejno dla k=0 do k=q, gdy elementy leżą na głównej przekątnej i poniżej.

Elementy przyjmujące wartości niezerowe tworzą w macierzy trójkąt Pascala, który zaczyna się w prawym dolnym rogu macierzy i rozwija w kierunku lewej skrajnej kolumny. Przykłady macierzy Newtona-Pascala o rozmiarach odpowiednio 2,3,4,5 przedstawiono poniżej.

$$\mathbf{M}_2=\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix},\quad \mathbf{M}_3=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&1&1\end{vmatrix},\quad \mathbf{M}_4=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\3&1&0&0\\3&2&1&0\\1&1&1&1\end{vmatrix},\quad \mathbf{M}_5=\begin{vmatrix}1&0&0&0&0\\4&1&0&0&0\\6&3&1&0&0\\4&3&2&1&0\\1&1&1&1&1\end{vmatrix} \tag{3}$$

Odwrotną macierzą Newtona-Pascala M^{-1}_{q+1} nazwiemy macierz, która powstaje z macierzy Newtona-Pascala przez umieszczenie w kolejnych kolumnach tej macierzy przy elementach niezerowych na przemian dodatnich i ujemnych znaków, zaczynając od elementów na głównej przekątnej i postępując od góry do dołu. A zatem niezerowe elementy odwrotnej macierzy Newtona-Pascala są równe współczynnikom rozwinięcia dwumianu Newtona $(\mathbf{a}-\mathbf{b})^k$ kolejno dla k=0 do k=q. Przykłady odwrotnych macierzy Newtona-Pascala o rozmiarach 2,3,4,5 przedstawiono poniżej.

$$\mathbf{M}_2^{-1}=\begin{vmatrix}1&0\\-1&1\end{vmatrix},\quad \mathbf{M}_3^{-1}=\begin{vmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\1&-1&1\end{vmatrix},\quad \mathbf{M}_4^{-1}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\-3&1&0&0\\3&-2&1&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix},\quad \mathbf{M}_5^{-1}=\begin{vmatrix}1&0&0&0&0\\-4&1&0&0&0\\6&-3&1&0&0\\-4&3&-2&1&0\\1&-1&1&-1&1\end{vmatrix} \tag{4}$$

Macierz Newtona-Pascala M_{q+1} jest operatorem przesunięcia w przód wielomianu stopnia q. Odwrotna macierz Newtona-Pascala M^{-1}_{q+1} jest operatorem przesunięcia wstecz wielomianu stopnia q. Iloczyn zdefiniowanej powyżej macierzy Newtona-Pascala i macierzy odwrotnej Newtona-Pascala jest równy macierzy jednostkowej. Stwierdzenie to uzasadnione zostanie w dalszej części referatu.

3. Przesunięcie wielomianu

Przesunięciem wielomianu nazwiemy wielomian $C^{(n)}(x)$, który powstaje z wielomianu początkowego C(x) przez zmianę wartości zmiennej x wielomianu o pewną liczbę całkowitą n

$$C^{(n)}(x) = C(x+n) \tag{5}$$

Gdy liczba n jest dodatnia, mówimy o przesunięciu wielomianu w przód, a gdy jest ujemna, mówimy o przesunięciu wstecz. Jednokrotne przesunięcie wielomianu jest wtedy, gdy wartość bezwzględna przesunięcia zmiennej wielomianu jest równa jedności. Wielokrotne przesunięcie wielomianu jest wtedy, gdy wartość bezwzględna przesunięcia zmiennej wielomianu jest liczbą całkowitą większą od jedności. Wielokrotne przesunięcie wielomianu jest zatem złożeniem jednokrotnych przesunięć wielomianu. Zgodnie z powyższymi określeniami można zapisać:

$$\begin{aligned}
C^{(0)}(x) &= C(x) = \sum_{i=0}^{q} c_i^{(0)} x^i \\
C^{(1)}(x) &= C^{(0)}(x+1) = \sum_{i=0}^{q} c_i^{(1)} x^i \\
C^{(2)}(x) &= C^{(1)}(x+1) = \sum_{i=0}^{q} c_i^{(2)} x^i \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
C^{(n)}(x) &= C^{(n-1)}(x+1) = \sum_{i=0}^{q} c_i^{(n)} x^i
\end{aligned} \tag{6}$$

gdzie: $c_0^{(0)}, c_1^{(0)}, \dots, c_q^{(0)}$ - współczynniki wielomianu przed wykonaniem operacji przesunięcia,
$c_0^{(n)}, c_1^{(n)}, \dots, c_q^{(n)}$ - współczynniki po n-krotnym przesunięciu wielomianu, q - stopień wielomianu.

Procedurę n-krotnego przesunięcia wielomianu można zrealizować zatem rekurencyjnie za pomocą macierzy Newtona-Pascala wykonując operację kolejno dla r=1,2,3, ... , n zgodnie ze wzorem

$$\begin{vmatrix} c_q^{(r)} \\ c_{q-1}^{(r)} \\ \cdot \\ \cdot \\ c_0^{(r)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \\ \\ M_{q+1} \\ \\ \\ \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_q^{(r-1)} \\ c_{q-1}^{(r-1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ c_0^{(r-1)} \end{vmatrix} \tag{7}$$

lub bezpośrednio według wzoru

$$\begin{vmatrix} c_q^{(n)} \\ c_{q-1}^{(n)} \\ \cdot \\ \cdot \\ c_0^{(n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & \\ & M_{q+1} & \\ & & \end{vmatrix}^n \cdot \begin{vmatrix} c_q^{(0)} \\ c_{q-1}^{(0)} \\ \cdot \\ \cdot \\ c_0^{(0)} \end{vmatrix} \tag{8}$$

W zapisie uproszczonym można operację n-krotnego przesunięcia wielomianu w przód, a następnie n-krotnego przesunięcia w tył przedstawić w postaci:

$$C^{(n)} = M_{q+1}^{n} C^{(0)} \tag{9}$$

$$C^{(0)} = M_{q+1}^{-n} \cdot C^{(n)} = M_{q+1}^{-n} \cdot M_{q+1}^{n} \cdot C^{(0)} \tag{10}$$

i stąd, ponieważ wynikowe przesunięcie wielomianu jest zerowe,

$$M_{q+1}^{-n} \cdot M_{q+1}^{n} = 1, \tag{11}$$

gdzie: $C^{(0)}$ - wektor współczynników wielomianu przed przesunięciem, $C^{(n)}$ - wektor współczynników wielomianu po przesunięciu, M_{q+1} - macierz Newtona-Pascala, M_{q+1}^{n} - macierz Newtona-Pascala podniesiona do potęgi n, M_{q+1}^{-n} - odwrotna macierz Newtona-Pascala podniesiona do potęgi n, 1 - macierz jednostkowa.

4. Kombinacja liniowa przesunięć wielomianu

Kombinacją liniową przesunięć wielomianu C(x) stopnia q nazwiemy wielomian $C_y(x)$, który powstaje w wyniku następującego przekształcenia:

$$C_y(x) = g_0 C(x) + g_1 C(x+1) + \ldots + g_n C(x+n) \tag{12}$$

lub z uwagi na (5)

$$C_y(x) = g_0 C^{(0)}(x) + g_1 C^{(1)}(x) + \ldots + g_n C^{(n)}(x), \tag{13}$$

gdzie: $g_0, g_1, \ldots, g_n$ - stałe współczynniki.

Stąd wektor współczynników C_y wielomianu $C_y(x)$, który powstaje w wyniku kombinacji liniowej przesunięć wielomianu C(x) o wektorze współczynników C, jest równy

$$C_y = (g_0 \cdot 1 + g_1 \cdot M_{q+1} + g_2 \cdot M_{q+1}^2 + \ldots + g_n \cdot M_{q+1}^n) \cdot C, \tag{14}$$

gdy wielomian przesuwany jest w przód lub

$$C_y = (g_0 \cdot 1 + g_1 \cdot M_{q+1}^{-1} + g_2 \cdot M_{q+1}^{-2} + \ldots + g_n \cdot M_{q+1}^{-n}) \cdot C, \tag{15}$$

gdy wielomian przesuwany jest wstecz. W dwóch ostatnich wzorach 1 - oznacza macierz jednostkową o rozmiarze (q+1)x(q+1).

Tak więc wektor C_y współczynników wielomianu $C_y(x)$ będącego liniową kombinacją przesunięć wielomianu C(x) jest równy iloczynowi kombinacji liniowej kolejnych potęg macierzy Newtona-Pascala (kolejnych potęg operatora przesunięcia) i wektora współczynników przesuwanego wielomianu.

5. Przykład projektowania filtrów cyfrowych za pomocą transformacji wielomianowej

Na podstawie rozważań przedstawionych w poprzednich punktach podamy obecnie przykład wyprowadzenia wzorów do wyznaczania pochodnych rzędu 0,1,2,3 sygnału obserwowanego w dyskretnych chwilach czasu. W literaturze znane są wzory filtrów cyfrowych realizujących to zadanie, np. filtry, które zostały opracowane za pomocą wielomianów i metody najmniejszych kwadratów. Niemniej jednak wykażemy, że filtry opracowane według prezentowanej metody są niegorsze, a nawet lepsze od filtrów wielomianowych wyznaczanych na podstawie metody najmniejszych kwadratów.

Przedstawione zadanie rozwiążemy za pomocą transformacji wielomianowej sygnału czasowego. W tym celu rozwijamy obserwowaną funkcję czasu x(t) w szereg Taylora w otoczeniu $\pm j$ wybranej chwili czasu t, przyjmując w tym konkretnym przypadku pierwsze cztery wyrazy szeregu

$$x(t+j) = c_0 + c_1 j + c_2 j^2 + c_3 j^3, \tag{16}$$

gdzie: $c_0 = \frac{1}{0!} \cdot x(t)$, $c_1 = \frac{1}{1!} \cdot \frac{dx(t)}{dt}$, $c_2 = \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2}$, $c_3 = \frac{1}{3!} \cdot \frac{d^3x(t)}{dt^3}$

Dokonujemy dyskretyzacji sygnału x(t+j) i tworzymy kombinację liniową kolejnych czterech wartości tego sygnału (dla odróżnienia po dyskretyzacji argument funkcji zapisywany jest w postaci indeksu)

$$y_{t+j} = \frac{1}{8} \cdot x_{t+j} + \frac{3}{8} \cdot x_{t+j-1} + \frac{3}{8} \cdot x_{t+j-2} + \frac{1}{8} \cdot x_{t+j-3} \tag{17}$$

W przedstawianym przykładzie współczynniki kombinacji liniowej przyjęto arbitralnie i pomija się dyskusję na temat ich wyboru.

Przyjmujemy macierz odwrotną Newtona-Pascala M_4^{-1} i dokonujemy przekształcenia

$$\begin{vmatrix} c_3^{(y)} \\ c_2^{(y)} \\ c_1^{(y)} \\ c_0^{(y)} \end{vmatrix} = \frac{1}{8}\cdot\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}^3\right)\cdot\begin{vmatrix} c_3 \\ c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} c_3^{(y)} \\ c_2^{(y)} \\ c_1^{(y)} \\ c_0^{(y)} \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -18 & 4 & 0 & 0 \\ 36 & -12 & 4 & 0 \\ -27 & 12 & -6 & 4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} c_3 \\ c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{vmatrix} \tag{18}$$

$$y_{t+j} = \sum_{i=0}^{3} c_i^{(y)}\cdot j^i = \frac{1}{4}\cdot((4j^3 - 18j^2 + 36j - 27)\cdot c_3 + (4j^2 - 12j + 12)\cdot c_2 + (4j - 6)\cdot c_1 + 4c_0) \tag{19}$$

Sygnał y_{t+j} ze wzoru (19) jest transformatą wielomianową trzeciego stopnia (transformatą wielomianową wykonaną za pomocą wielomianu trzeciego stopnia) sygnału y_{t+j} ze wzoru (17). Ponieważ wartości sygnału y_{t+j} we wzorach (17) i (19) są takie same, to podstawiając kolejno wartości j=0,1,2,3 można zapisać:

$$\begin{vmatrix} 4 & -6 & 12 & -27 \\ 4 & -2 & 4 & -5 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 12 & 27 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4\cdot(\frac{1}{8}\cdot x_t + \frac{3}{8}\cdot x_{t-1} + \frac{3}{8}\cdot x_{t-2} + \frac{1}{8}\cdot x_{t-3}) \\ 4\cdot(\frac{1}{8}\cdot x_{t+1} + \frac{3}{8}\cdot x_t + \frac{3}{8}\cdot x_{t-1} + \frac{1}{8}\cdot x_{t-2}) \\ 4\cdot(\frac{1}{8}\cdot x_{t+2} + \frac{3}{8}\cdot x_{t+1} + \frac{3}{8}\cdot x_t + \frac{1}{8}\cdot x_{t-1}) \\ 4\cdot(\frac{1}{8}\cdot x_{t+3} + \frac{3}{8}\cdot x_{t+2} + \frac{3}{8}\cdot x_{t+1} + \frac{1}{8}\cdot x_t) \end{vmatrix}, \tag{20}$$

a stąd

$$c_0 = -\frac{1}{32}\cdot x_{t+3} + 0\cdot x_{t+2} + \frac{9}{32}\cdot x_{t+1} + \frac{16}{32}\cdot x_t + \frac{9}{32}\cdot x_{t-1} + 0\cdot x_{t-2} - \frac{1}{32}\cdot x_{t-3} \tag{21}$$

$$c_1 = -\frac{5}{96}\cdot x_{t+3} + \frac{12}{96}\cdot x_{t+2} + \frac{39}{96}\cdot x_{t+1} + 0\cdot x_t - \frac{39}{96}\cdot x_{t-1} - \frac{12}{96}\cdot x_{t-2} + \frac{5}{96}\cdot x_{t-3} \tag{22}$$

$$c_2 = \frac{1}{32}\cdot x_{t+3} + \frac{2}{32}\cdot x_{t+2} - \frac{1}{32}\cdot x_{t+1} - \frac{4}{32}\cdot x_t - \frac{1}{32}\cdot x_{t-1} + \frac{2}{32}\cdot x_{t-2} + \frac{1}{32}\cdot x_{t-3} \tag{23}$$

$$c_3 = \frac{1}{48}\cdot x_{t+3} + 0\cdot x_{t+2} - \frac{3}{48}\cdot x_{t+1} + 0\cdot x_t + \frac{3}{48}\cdot x_{t-1} + 0\cdot x_{t-2} - \frac{1}{48}\cdot x_{t-3} \tag{24}$$

Sprawdzenie

Niech wartości obserwowanego sygnału w otoczeniu punktu t spełniają równanie

$$x_{t+i} = b_0 + b_1 \cdot (t+i) + b_2 \cdot (t+i)^2 + b_3 \cdot (t+i)^3 \tag{25}$$

dla i = ± 1, ± 2, ± 3. Stąd na podstawie (21) do (25):

$$0! \cdot c_0 = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 = x(t) \tag{26}$$

$$1! \cdot c_1 = b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 = \frac{dx(t)}{dt} \tag{27}$$

$$2! \cdot c_2 = 2b_2 + 6b_3 t = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \tag{28}$$

$$3! \cdot c_3 = 6b_3 = \frac{d^3x(t)}{dt^3} \tag{29}$$

6. Uwagi na temat przedstawionej metody projektowania filtrów cyfrowych

Projektowanie filtrów cyfrowych według przedstawionej metody wymaga utworzenia kombinacji liniowej kolejnych wartości obserwowanego sygnału czasowego. Należy ustalić liczbę składników tworzących kombinację liniową, współczynniki kombinacji liniowej oraz stopień wielomianu, za pomocą którego wykonywana jest transformacja. Żeby uzyskać symetryczną postać filtrów może być konieczne wprowadzenie opóźnienia czasowego do tworzonej kombinacji.

Współczynniki kombinacji liniowej zawierającej (p+1) elementów można przyjmować (ale nie wyłącznie) równe unormowanym współczynnikom rozwinięcia dwumianu Newtona

$$g_i = \frac{1}{2^p} \cdot \frac{p!}{i! \cdot (p-i)!} \tag{30}$$

dla i=0, 1, ... , p.

Wprowadzenie opóźnienia czasowego do tworzonej kombinacji liniowej w celu uzyskania symetrycznej postaci projektowanych filtrów zilustrowane zostanie na przykładzie.

Ponieważ w następującym przykładzie będziemy wykonywać transformację wielomianową kombinacji liniowej zawierającej dwa elementy za pomocą wielomianu trzeciego stopnia, konieczne jest wprowadzenie opóźnienia czasowego, które dla zachowania symetrii projektowanych filtrów powinno być w tym przypadku równe jeden.

$$y_{t+j-1} = \frac{1}{2}\cdot x_{t+j-1} + \frac{1}{2}\cdot x_{t+j-2} \tag{31}$$

Stosujemy podstawienie s=j-1 i wykonujemy transformację wielomianową równania

$$y_{t+s} = \frac{1}{2}\cdot x_{t+s} + \frac{1}{2}\cdot x_{t+s-1} \tag{32}$$

$$\begin{vmatrix} c_3^{(y)} \\ c_2^{(y)} \\ c_1^{(y)} \\ c_0^{(y)} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}\right)\cdot\begin{vmatrix} c_3 \\ c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} c_3 \\ c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{vmatrix} \tag{33}$$

$$y_{t+s} = \sum_{i=0}^{3} c_i^{(y)}\cdot s^i = \frac{1}{2}\cdot((2s^3 - 3s^2 + 3s - 1)\cdot c_3 + (2s^2 - 2s + 1)\cdot c_2 + (2s - 1)\cdot c_1 + 2c_0) \tag{34}$$

Dla j=0, 1, 2, 3 zmienna s przyjmuje wartości s= -1, 0, 1, 2, tak więc

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & -9 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 9 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cdot(\frac{1}{2}\cdot x_{t-1} + \frac{1}{2}\cdot x_{t-2}) \\ 2\cdot(\frac{1}{2}\cdot x_t + \frac{1}{2}\cdot x_{t-1}) \\ 2\cdot(\frac{1}{2}\cdot x_{t+1} + \frac{1}{2}\cdot x_t) \\ 2\cdot(\frac{1}{2}\cdot x_{t+2} + \frac{1}{2}\cdot x_{t+1}) \end{vmatrix} \tag{35}$$

$$c_0 = -\frac{1}{16}\cdot x_{t+2} + \frac{4}{16}\cdot x_{t+1} + \frac{10}{16}\cdot x_t + \frac{4}{16}\cdot x_{t-1} - \frac{1}{16}\cdot x_{t-2} \tag{36}$$

$$c_1 = -\frac{1}{12}\cdot x_{t+2} + \frac{8}{12}\cdot x_{t+1} + 0\cdot x_t - \frac{8}{12}\cdot x_{t-1} + \frac{1}{12}\cdot x_{t-2} \tag{37}$$

$$c_2 = \frac{1}{8}\cdot x_{t+2} + 0\cdot x_{t+1} - \frac{2}{8}\cdot x_t + 0\cdot x_{t-1} + \frac{1}{8}\cdot x_{t-2} \tag{38}$$

$$c_3 = \frac{1}{12}\cdot x_{t+2} - \frac{2}{12}\cdot x_{t+1} + 0\cdot x_t + \frac{2}{12}\cdot x_{t-1} - \frac{1}{12}\cdot x_{t-2} \tag{39}$$

Porównanie charakterystyk amplitudowych i charakterystyk fazowych dwóch par filtrów dolnoprzepustowych, tj. pary filtrów zaprojektowanych według znanej w literaturze procedury Savitzkego i Golaya (za pomocą wielomianów i metody najmniejszych kwadratów)

$$z_t^{(1)} = -\frac{3}{35}\cdot x_{t+2} + \frac{12}{35}\cdot x_{t+1} + \frac{17}{35}\cdot x_t + \frac{12}{35}\cdot x_{t-1} - \frac{3}{35}\cdot x_{t-2} \tag{40}$$

$$z_t^{(2)} = -\frac{2}{21}\cdot x_{t+3} + \frac{3}{21}\cdot x_{t+2} + \frac{6}{21}\cdot x_{t+1} + \frac{7}{21}\cdot x_t + \frac{6}{21}\cdot x_{t-1} + \frac{3}{21}\cdot x_{t-2} - \frac{2}{21}\cdot x_{t-3} \tag{41}$$

oraz pary filtrów zaprojektowanych za pomocą przedstawionej transformacji wielomianowej

$$w_t^{(1)} = -\frac{1}{16}\cdot x_{t+2} + \frac{4}{16}\cdot x_{t+1} + \frac{10}{16}\cdot x_t + \frac{4}{16}\cdot x_{t-1} - \frac{1}{16}\cdot x_{t-2} \tag{42}$$

$$w_t^{(2)} = -\frac{1}{32}\cdot x_{t+3} + 0\cdot x_{t+2} + \frac{9}{32}\cdot x_{t+1} + \frac{16}{32}\cdot x_t + \frac{9}{32}\cdot x_{t-1} + 0\cdot x_{t-2} - \frac{1}{32}\cdot x_{t-3} \tag{43}$$

przemawia zdecydowanie na korzyść filtrów z drugiej pary, ponieważ ich charakterystyki amplitudowe nie mają zafalowań w paśmie zaporowym, a charakterystyki fazowe są liniowe, co zapewnia, że filtry nie wprowadzają zniekształceń sygnałów. Tych cennych własności nie mają filtry należące do pierwszej z porównywanych par filtrów.

LITERATURA

1. Zapała W.: Algorithm determining zeros of real polynomials. Proceedings of the First International Symposium on Mathematical Models in Automation and Robotics, pp. 154-158. Technical University of Szczecin Press. Międzyzdroje, September 1-3, 1994
2. Zapała W.: Wielomianowe wygładzanie przebiegów czasowych w trybach off-line i on-line. Mechanizacja i Automatyzacja Górnictwa nr 6-7, s. 44-47, 1997
3. Zapała W.: Przykłady filtrów cyfrowych do przetwarzania sygnałów w zakładach przeróbki mechanicznej węgla. Materiały VI Konferencji nt. Automatyzacja Procesów Przeróbki Kopalin, s. 159-166. Szczyrk 10-13 maja 2000
4. Zapała W.: True linear phase filters designed by means of polynomials. Proceedings of the 28th Conference on Automation and Telecommunication in Mines and Processing Plants - Coal and Minerals, pp.196-199. Poland, Szczyrk 14-17 June 2000

Recenzent: Dr hab.inż. Anna Walaszek-Bobiszewska
Prof. Politechniki Zielonogórskiej

Abstract

Definition of Newton-Pascal matrix and its exemplary application for designing digital filters has been presented in the paper. The method allows to design true linear phase filters. Therefore the suggested method can be applied when solving many different technical problems where it is necessary to apply digital filtration by means of filters with great accuracy of signal processing.