ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 39 Nr kol. 686

Zdzisław KUBIK

PRZYBLIŻENIE QUASISTATYCZNE RÓWNAŃ MAXWELLA ORAZ PEWNE ZWIĄZKI ENERGETYCZNE DLA FAL ULTRADŹWIĘKOWYCH ROZCHODZĄCYCH SIĘ W MATERIAŁACH PIEZOELEKTRYCZNYCH

Streszczenie. W artykule uzasadniono słuszność stosowania przybliżenia quasistatycznego równań Maxwella dla fal ultradźwiękowych rozchodzących się w materiałach piezoelektrycznych.

Falom sprężystym wysokiej częstotliwości towarzyszą w piezoelektrykach wzbudzone nimi fale elektromagnetyczne i odwrotnie - falom elektromagnetycznym towarzyszą fale sprężyste. Przyczyną tego zjawiska jest efekt piezoelektryczny, powodujący zarazem wzrost efektywnych wartości odpowiednich modułów sprężystości, a więc powodujący "zwiększenie sztywności" kryształu. W ogólnym przypadku w piezoelektrycznych kryształach mogą rozchodzić się w danym kierunku trzy typy fal sprężystych i dwa typy fal elektromagnetycznych.

Ze względu na swe prędkości fazowe fale te dzielą się na dwa typy: jedne z nich mają fazowe prędkości, w przybliżeniu równe prędkości fal elektromagnetycznych w danym ośrodku, drugie - prędkości fal sprężystych. Wśród nich mamy między innymi "szybkie" fale sprężyste interpretowane jako mechaniczne odkształcenia towarzyszące "zwykłej" elektromagnetycznej fali i "powolne" fale elektromagnetyczne powstające w ślad zmian pola elektrycznego w "normalnej" sprzężystej fali. Nas interesują przede wszystkim "powolne" sprężyste fale i towarzyszące im "powolne" fale elektromagnetyczne przy zaniedbaniu faktu rozchodzenia się fal elektromagnetycznych "zwykłych" i "szybkich" fal sprężystych. Wynika to stąd, że nawet dla częstotliwości fali rzędu gigaherców długość "szybkiej" fali elektromagnetycznej jest rzędu 0,5 m i tego samego rzędu jest długośc fali odkształcenia mechanicznego, co przy nieznacznych wymiarach próbek nie wnosi nic istotnego (tym bardziej, że energia takiej "szybkiej" fali mechanicznej jest pomijalna z energią "powolnej").

Pozostaje istotne zagadnienie rozchodzenia się "powolnej" fali mechanoelektromagnetycznej. Wykażemy tu, że w tym przypadku interesujące nas równania Maxwella "części" elektromagnetycznej tej fali redukują się do równań quasistatycznych, a ponadto, że energia pola magnetycznego jest pomijalna w stosunku do energii pola elektrycznego. Problem rozchodzenia się fal ultradźwiękowych w ośrodkach wykazujących efekt piezoelektryczny sprowadza się wtedy do rozpatrzenia fali sprężystej i twoarzyszącego jej quasistatycznego pola elektrycznego.

Pole elektromagnetyczne opisuję równania Maxwella:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \varrho \tag{3}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0, \tag{4}$$

w przypadku stosowania przybliżenia ośrodka izotropowego:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_o\vec{E} \qquad \vec{B} = \mu\mu_o\vec{H} \tag{5}$$

gdzie:

$\vec{j}$ - gęstość prądu elektrycznego,

ϱ - gęstość ładunku,

$\vec{E}$ - wektor natężenia pola elektrycznego,

$\vec{D}$ - wektor indukcji pola elektrycznego,

$\vec{H}$ - wektor natężenia pola magnetycznego,

$\vec{B}$ - wektor indukcji pola magnetycznego,

ε - względna przenikalność dielektryczna,

ε_o - stała dielektryczna,

μ - względna przenikalność magnetyczna,

μ_o - stała magnetyczna pola.

Wprowadźmy teraz potencjały pola elektromagnetycznego:

potencjał wektorowy $\vec{A}$

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A} \tag{6}$$

potencjał skalarny Φ

$$\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\,\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{7}$$

(równania (1) i (4) są teraz spełnione tożsamościowo).

Potencjały te podlegają transformacji Lorentza:

$$\operatorname{div}\vec{A} + \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0. \tag{8}$$

Korzystając z powyższych równań można równania (2) i (3) zapisać w postaci równań falowych potencjałów:

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\mu_0\vec{j} \tag{9}$$

$$\nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{\varphi}{\varepsilon\varepsilon_0} \tag{10}$$

gdzie $c = (1/\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0)^{\frac{1}{2}}$ – prędkość fali elektromagnetycznej w ośrodku.

Pamiętamy przy tym, że pola elektryczne i magnetyczne są nierozdzielne (równania (7) i (6)).

Rozpatrzmy równania (10). Postać rozwiązania w przypadku rozchodzenia się fali ultradźwiękowej jest następująca:

$$\Phi = \Phi_0(\vec{r})e^{i(\omega t-\vec{k}\,\vec{r})} \tag{11}$$

gdzie:

$\vec{r}$ – wektor wodzący,

$\vec{k}$ – wektor falowy fali sprężystej.

Po wstawieniu do (10) uzyskujemy:

$$\frac{\nabla^2\Phi_0}{k^2} - \Phi_0 + \left(\frac{v}{c}\right)^2\Phi_0 = -\frac{\varphi_0}{k^2\varepsilon\varepsilon_0} \tag{12}$$

gdzie:

φ_0 – amplituda gęstości ładunku,

$v = \omega/|\vec{k}|$ – prędkość fali sprężystej.

Oszacujmy rząd wielkości $(v/c)^2$:

$$(v/c)^2 \cong 10^{-8}. \tag{13}$$

A więc wyraz $(v/c)^2\ \Phi_o$, odpowiadający wyrazowi $(1/c^2)(\partial^2\Phi/\partial t^2)$ w równaniu (10), jest znacznie mniejszy od wyrazu Φ_o, odpowiadającemu wyrazowi $\nabla^2\Phi$. W związku z czym można równanie (10) uprościć:

$$\nabla^2\Phi = -\frac{\varphi}{\varepsilon\varepsilon_o}, \tag{14}$$

a jest to przecież równanie Poissona pola statycznego!

Podobnie można rozpatrzyć równanie (9). Po założeniu, że potencjał wektorowy jest postaci:

$$A_j = A_{jo}(\vec{r})e^{i(\omega t - \vec{k}\,\vec{r})}$$

i po podstawieniu do (9) otrzymujemy:

$$\frac{\nabla^2 A_{jo}}{k^2} - A_{jo} + \left(\frac{v}{c}\right)^2 A_{jo} = -\frac{\mu\mu_o j_{jo}}{k^2}. \tag{15}$$

I tu również wyraz $(v/c)^2 A_{jo}$ pomijalny w stosunku do A_{jo}, co oznacza uproszczenie równania (9) do postaci:

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu\mu_o\vec{j}, \tag{16}$$

a to z kolei jest równaniem quasistatycznego pola magnetycznego!

Widzimy, że już w tym momencie układ równań Maxwella można zastąpić w naszym przypadku układem składającym się z równania quasistatycznego (14) i równania quasistacjonarnego (16), a więc pole elektromagnetyczne możemy przybliżyć polem elektromagnetycznym quasistacjonarnym, bowiem nadal obowiązuje równanie (7), wiążące pola elektryczne i magnetyczne.

Możemy teraz dodatkowo założyć, że wektor falowy $\vec{k}$ jest zespolony, a więc uwzględnić możliwość tłumienia fali sprężystej:

$$\vec{k} = \vec{k}_o + i\vec{\alpha} \tag{17}$$

gdzie:

$|\vec{k}_o|$ - liczba falowa,

$|\vec{\alpha}|$ - współczynnik tłumienia.

Wykorzystując teraz transformację Lorentza i wyrażenie (11) uzyskamy:

$$\Phi_o = \frac{c^2}{\omega}\,\vec{k}\,\vec{A}_o. \tag{18}$$

Możemy teraz oszacować rząd wielkości modułów wyrazów prawej strony wyrażenia (7):

$$\left|-\operatorname{grad}\Phi\right| \tag{19}$$

i

$$\left|-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right| \tag{20}$$

Korzystając z (17) mamy:

$$\left|-\operatorname{grad}\Phi\right| = \left|i\vec{k}\Phi_0\right|\left|e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r})}\right| \tag{21}$$

$$\left|-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right| = \omega\left|i\vec{A}_0\right|\left|e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r})}\right| \tag{22}$$

A dalej z (18):

$$\left|-\operatorname{grad}\Phi\right| = \omega\left(\frac{c}{v}\right)^2\left|i\vec{A}_0\right|\left|e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r})}\right| \tag{23}$$

Wynika stąd jasno, że wyraz (20) jest znacznie mniejszy od wyrazu (19) i można go w równaniu (7) pominąć, a stąd:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\Phi \tag{24}$$

W naszym więc przypadku możemy pola elektryczne i magnetyczne traktować jako pola od siebie niezależne, opisywane rozdzielnymi równaniami: pole elektryczne równaniami (24), (14) i (5), pole magnetyczne - (6), (16), (5).

Można się teraz zastanowić nad wpływem tych pól na dowolne zjawiska fizyczne, a wystarczy w tym celu porównać ich gęstości energii φ_E i φ_M. Korzystając z definicji tych gęstości, równań (17), (24) oraz (18) uzyskujemy:

$$\varphi_E = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \left(\frac{c}{v}\right)^2 \frac{k^2A^2}{2\mu\mu_0} \tag{25}$$

$$\varphi_M = \frac{1}{2}\mu\mu_0 H^2 = \frac{k^2A^2}{2\mu\mu_0} \tag{26}$$

Widzimy, że energia pola elektrycznego jest wielokrotnie większa od energii pola magnetycznego "powolnej" fali elektromagnetycznej, w związku z czym dopuszczalne jest pominięcie oddziaływania pola magnetycznego.

Reasumując, jeżeli rozpatrujemy problem rozchodzenia się fali ultradźwiękowej w dowolnym materiale piezoelektrycznym, to zamiast rozwiązywać pełny układ równań Maxwella (1,2,3,4,5), możemy ograniczyć się do rozpatrzenia quasistatycznych równań pola elektrycznego (24,14,5), a tylko w razie potrzeby korzystać z innych równań, na przykład z równania ciągłości prądu elektrycznego:

$$\mathrm{div}\vec{j} + \frac{\partial\varrho}{\partial t} = 0, \tag{27}$$

wynikającego z równań (2) i (3), a więc uwzględniającego w opisie pól elektrycznych związek z polem magnetycznym.

Wykażemy jeszcze pewną interesującą własność zjawiska rochodzenia się fali ultradźwiękowej w materiałach piezoelektrycznych, a mianowicie brak wypromieniowania "szybkiej" fali elektromagnetycznej z obszaru, w którym rozchodzi się fala sprężysta, przy warunku przybliżenia liniowego prądów elektrycznych płynących w materiale piezoelektrycznym [1] ($n \ll n_0$, n_0 - koncentracja równowagowa nośników ładunku, n - koncentracja nadmiarowa nośników). Wystarczy w tym celu oszacować równanie (2):

$$|\mathrm{rot}\,\vec{H}| = |\vec{j}| + \left|\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right| \qquad \left(\text{tu } \vec{J} \text{ równoległe do } \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right),$$

posługując się wyrażeniami uzyskanymi w pracy [1]. Wynika stamtąd, że:

$$j = -\frac{6e}{\varepsilon\varepsilon_0}\,\frac{\varepsilon'}{1 + i[(\omega_c/\omega) + (\omega/\omega_D)]} \tag{28}$$

$$E = -\frac{e}{\varepsilon\varepsilon_0}\,\frac{1 + i(\omega/\omega_D)}{1 + i[(\omega_c/\omega) + (\omega/\omega_D)]}\,\varepsilon' \tag{29}$$

$$D = e\varepsilon' + \varepsilon\varepsilon_0 E \tag{30}$$

gdzie:

σ - przewodność właściwa,

e - efektywna stała piezoelektryczna,

ω_c - częstotliwość relaksacji makswellowskiej,

ω_D - częstotliwość dyfuzji,

ε' - odkształcenie.

Stąd po podstawieniu do (2) uzyskujemy:

$$|\mathrm{rot}\,\vec{H}| = 0. \tag{31}$$

Jest to równanie stacjonarnego pola magnetycznego, a więc właśnie dzięki temu możemy twierdzić o braku wypromieniowania "szybkiej" fali elektromagnetycznej (zauważmy, że twierdzenie powyższe jest w pełni słuszne dla piezodielektryków).

LITERATURA

[1] MEZON I.: Fiziczieskaja Akustika, tom IV, Moskwa 1973.

КВАЗИСТАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА И НЕКОТОРЫЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ ДЛЯ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВЕЩЕСТВАХ

Р е з ю м е

В статье доказано правильность применения квазистатического приближения уравнений Максвелла для ультразвуковых волн распространяющихся в пьезоэлектрических веществах.

THE QUASISTATIC APPROXIMATION OF THE MAXWELL EQUATIONS AND SOME ENERGETIC RELATIONS FOR PROPAGATION OF ULTRASONIC WAVES IN PIEZOELECTRIC MATERIALS

S u m m a r y

The paper presents the proof of the applicability of a quasistatic approxiomation of the Maxwell ewuations for the propagation of ultrasonic waves in piezoelectric medium.

Wpłynęło do Redakcji 22.V.1980 r.

Recenzent:

Prof. dr hab. Aleksander Opilski