ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 43 Nr kol. 795

Kajetan TOCHOWICZ

FUNKCJA PIERWOTNA FUNKCJI ANALITYCZNEJ

Streszczenie. W pracy wprowadzono pojęcie funkcji pierwotnej funkcji analitycznej oraz udowodniono podstawowe jej własności. Wykazano, że dla danej funkcji analitycznej ζ_{β}, istnieje funkcja pierwotna oraz, że jest wyznaczona z dokładnością do stałej. Dowiedziono, że operacja brania funkcji pierwotnej jest w pewnym sensie liniowa oraz, że ma miejsce równość zbiorów $\zeta_{\beta} \circ f = \zeta_{(\beta \circ f) \cdot f'}$, gdzie f jest funkcją holomorficzną. Podano także zależności, jakie zachodzą między jednoznacznymi gałęziami funkcji β i ζ_{β}.

Pojęcie funkcji pierwotnej pełnej funkcji analitycznej pojawia się w wielu działach analizy zespolonej, w szczególności w teorii równań różniczkowych, nigdzie jednak w dostępnej literaturze Autorowi nie udało się znaleźć nie tylko twierdzeń dotyczących funkcji pierwotnej, ale nawet jej poprawnej definicji. Praca stawia sobie za cel częściowe zapełnienie tej luki poprzez zdefiniowanie funkcji pierwotnej i udowodnienie podstawowych jej własności.

Definicja 1.1

Mówimy, że funkcja analityczna $\zeta_{\beta}(z)$ jest funkcją pierwotną funkcji analitycznej $\beta(z)$, jeśli istnieją dwa elementy analityczne $(W, z_0) \in \zeta_{\beta}$ oraz $(U, z_0) \in \beta$, takie, że w pewnym otoczeniu punktu z_0 zachodzi:

$$W'(z) = U(z) \tag{1}$$

Nietrudno uzasadnić, że każda funkcja analityczna posiada funkcję pierwotną.

Twierdzenie 1.1 (O istnieniu funkcji pierwotnej)

Dla dowolnej funkcji analitycznej $\beta(z)$ istnieje funkcja pierwotna $\zeta_{\beta}(z)$.

Dowód:

Wybierzmy punkt z_0 należący do obszaru naturalnego funkcji $\beta(z)$, taki, że nie jest on biegunem funkcji $\beta(z)$ ani ∞. Punkt taki zawsze istnieje, gdyż zbiór biegunów funkcji $\beta(z)$ jest co najwyżej przeliczalny.

Niech teraz (U,z_o) będzie dowolnym elementem funkcji $\beta(z)$. Wówczas istnieje koło o środku z_o zawarte w kole elementu (U,z_o), nie zawierające biegunów funkcji $\beta(z)$. W przeciwnym bowiem przypadku punkt z_o byłby punktem skupienia ciągu biegunów funkcji meromorficznej $U(z)$, co oczywiście jest niemożliwe. Funkcja $U(z)$ rozpatrywana na tym kole jest tędy funkcją holomorficzną, a co za tym idzie posiada tam funkcję pierwotną $W(z)$. Z definicji 1.1 wynika natychmiast, że funkcja $\zeta_\beta(z)$ wyznaczona przez element analityczny (W,z_o) jest funkcją pierwotną funkcji $\beta(z)$.

Zanim przystąpimy do podania dalszych własności funkcji pierwotnych, wykażemy lemat, z którego niejednokrotnie przy dowodach tych własności będziemy korzystać.

LEMAT 1.1

Niech (U_a,z_a) (U_b,z_b) będą dwoma elementami analitycznymi funkcji analitycznej $\beta(z)$, takimi, że punkty z_a,z_b są różne od ∞, a także nie są biegunami funkcji $U_a(z)$ oraz odpowiednio $U_b(z)$. Załóżmy dalej, że (W,z_a) jest pewnym elementem analitycznym takim, iż $W'(z) = U_a(z)$ w pewnym otoczeniu punktu z_a. Wówczas istnieje łańcuch elementów analitycznych łączący element (W,z_a) z elementem (V,z_b), gdzie $V'(z) = U_b(z)$ w otoczeniu punktu z_b.

<u>Dowód</u>:

Dowód poprowadzimy w trzech etapach:

a) Udowodnimy prawdziwość tezy lematu przy założeniu, że element (U_b,z_b) jest bezpośrednim przedłużeniem elementu (U_a,z_a) oraz, że odcinek $[z_a,z_b]$ nie zawiera biegunów funkcji $U_a(z)$.

b) Dowiedziemy następnie, że teza lematu pozostanie prawdziwa, jeśli z dodatkowych założeń przyjętych w punkcie a) usunąć żądanie, aby bieguny funkcji $U_a(z)$ nie znajdowały się na odcinku $[z_a,z_b]$.

c) Bazując na punkcie b) udowodnimy prawdziwość tezy lematu bez żadnych dodatkowych założeń.

<u>Dowód a)</u>:

Bez szkody dla ogólności założyć możemy, że odcinek $[z_a,z_b]$ leży na osi rzeczywistej. Niech $K_a = K(z_a,r_a)$ $K_b = K(z_b,r_b)$ oznaczają koła elementów (U_a,z_a), (U_b,z_b). Oznaczmy przez ε_1 odległość odcinka $[z_a,z_b]$ od biegunów funkcji $U_a(z)$ zawartych w K_a. ε_1 jest liczbą dodatnią, gdyż w przeciwnym wypadku odcinek $[z_a,z_b]$ zawierałby punkt będący punktem skupienia biegunów funkcji $U_a(z)$, co oczywiście jest niemożliwe. Także dodatnia jest liczba ε_2 oznaczająca odległość tegoż odcinka od ∂K_a. Przyjmijmy $\varepsilon_o = \min(\varepsilon_1,\varepsilon_2) > 0$. Istnieje więc liczba naturalna N taka, że $r = \frac{z_b-z_a}{N} < \varepsilon_o$. Zdefiniujmy teraz skończony ciąg punktów:

$$z_l = z_a + lr, \qquad l = 0,1,2,\dots,N.$$

Ponieważ $r < \varepsilon_2$, koła $K_l = K(z_l,r)$ zawarte są w K_a. Łatwo dostrzec także, iż koła te pokrywają odcinek $[z_a,z_b]$ oraz $K_l \cap K_{l+1} \neq \emptyset$ dla $l = 0,1,2,\dots,N-1$. Ne koniec z warunku $r < \varepsilon_1$ otrzymujemy, iż w kołach tych nie ma biegunów funkcji $U_a(z)$. Każde z funkcji $U_l = U_a/K_l$ jest więc w K_l holomorficzna, konsekwencję czego jest istnienie dla niej na K_l funkcji pierwotnych $P_l(z)$ wyznaczonych oczywiście z dokładnością do stałej. Ponieważ na $K_l \cap K_{l+1}$ $U_l(z) = U_{l+1}(z)$, więc dla ustalonej funkcji $P_o(z)$ możemy tak wybrać funkcje pierwotne, aby zachodziło:

$$P_l(z) = P_{l+1}(z) \quad \text{na} \quad K_l \cap K_{l+1} \quad \text{dla} \quad l = 0,1,2,\dots,N-1. \tag{2}$$

Zauważmy jeszcze, że jedną z funkcji pierwotnych na K_o jest funkcja $W(z)$. Przyjmując tedy $P_o(z) = W(z)$ na K_o, następnie dobierając do tak ustalonego $P_o(z)$ ciąg skończony $P_l(z)$ $l = 1,2,\dots,N$ tak, by był spełniony warunek (2), a w końcu przeprowadzając każdy z elementów (P_l,z_l) do wszystkich tych punktów odcinka $[z_a,z_b]$, które leżą wewnątrz K_l, otrzymujemy łańcuch elementów analitycznych łączących elementów (P_o,z_o) z elementem (P_N,z_N) wzdłuż $[z_a,z_b]$. Aby zakończyć dowód a) wystarczy teraz zauważyć, że $z_N = z_b$ oraz $P'_N(z) = U_a(z) = U_b(z)$ w otoczeniu K_N punktu z_b. Ostatnia równość wynika z faktu, że $K_N \subset K_a \cap K_b$ oraz (U_b,z_b) są bezpośrednim przedłużeniem elementu (U_a,z_a).

Przed przystąpieniem do dowodu b) przypominamy, iż relacja

(A,z_a) jest w relacji z (B,z_b) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje (3)
łańcuch elementów, który je łączy, jest relacją przechodnią.

W dowodzie b) w dalszym ciągu zakładać będziemy, że element (U_b,z_b) jest bezpośrednim przedłużeniem elementu (U_a,z_a). Tym razem jednak odcinek $[z_a,z_b]$, o którym dalej zakładamy, iż leży na osi rzeczywistej, może zawierać bieguny funkcji $U_a(z)$. Opierając się na udowodnionym a) oraz przechodniości wspomnianej wyżej relacji wystarczy dowieść, że istnieje elementów (U_c,z_c) taki, że:

z_c nie jest biegunek funkcji $U_c(z)$, (4)
element (U_b,z_b) jest bezpośrednim przedłużeniem elementów (U_c,z_c),
a ten z kolei jest bezpośrednim przedłużeniem elementu (U_a,z_a),
odcinki $[z_c,z_b]$, $[z_a,z_c]$ nie zawierają biegunów funkcji $U_a(z)$.

Istotnie. Istnieje wówczas na mocy a) łańcuch elementów łączący element (W,z_a) z pewnym elementem (P,z_c) takim, iż $P' = U_c$ w pewnym otoczeniu z_c. Stosując jeszcze raz udowodnioną część a) dla elementów (U_c,z_c), (U_b, z_b) oraz ustalonego elementu (P,z_c), otrzymujemy istnienie łańcucha elementów łączących element (P,z_c) z pewnym elementem (V,z_b) takim, że $V(z) = U_b(z)$ w pewnym otoczeniu z_b. Z (3) wnioskujemy o istnieniu łańcucha łączącego elementy (W,z_a) i (V,z_b), co kończyłoby dowód b). Aby wyznaczyć element (U_c,z_c) spełniający (4) rozpatrzmy dowolną półprostą L wychodzącą z punktu z_b, nie będącą ponadto podzbiorem osi rzeczywistej. Istnieją punkty z_c, nie będące biegunami funkcji $U_a(z)$, leżące na tej półprostej, położone dowolnie blisko punktu z_b, takie, że odcinki $[z_a,z_c]$, $[z_c,z_b]$ zawierają się w K_a oraz nie zawierają biegunów funkcji $U_a(z)$. W przeciwnym bowiem wypadku odcinek $[z_a,z_b]$ zawierałby punkt skupienia biegunów funkcji $U_a(z)$.

Ponieważ dist $(z_b,\partial K_a) > 0$ można tak wybrać z_c, aby:

$$|z_c - z_b| < \text{dist}\,(z_c,\partial K_a). \tag{5}$$

Przyjmijmy teraz $(U_c,z_c) = (U_{a_{z_c}},z_c)$. Przypomnijmy, że symbol $U_{a_{z_c}}$ oznacza funkcję meromorficzną identyczną z U_a w otoczeniu z_c. Zgodnie z definicją element (U_c,z_c) jest więc bezpośrednim przedłużeniem elementu (U_a,z_a). Zauważmy teraz, że ze względu na (5) $z_b \in K_a \cap K_b \cap K_c$, gdzie K_c - koło elementu (U_c,z_c). Mamy więc $(U_{c_{z_b}},z_b) = (U_{a_{z_b}},z_b) = (U_b,z_b)$. Element (U_b,z_b) jest więc bezpośrednim przedłużeniem elementu (U_c,z_c). Zdefiniowany powyżej element (U_c,z_c) czyni zatem zadość warunkowi (4), co kończy dowód b).

Aby dowieść teraz prawdziwości tezy lematu bez dodatkowych założeń, korzystamy z faktu, że ponieważ istnieje łańcuch łączący elementy (U_a,z_a) (U_b,z_b), więc istnieje także ciąg skończony elementów (U_i,z_i) $i = 1,2,3,\dots,n$, który je łączy. W ciągu tym każdy następny element jest bezpośrednim przedłużeniem poprzedniego, a elementy skrajne (U_1,z_1) (U_n,z_n) są bezpośrednimi przedłużeniami elementów (U_a,z_a) (U_b,z_b). Co więcej, założyć możemy, że środki tych elementów należą do z góry ustalonego, wszędzie gęstego w obszarze naturalnym funkcji $\beta(z)$ zbioru. Niech zbiorem tym będzie cały obszar naturalny funkcji $\beta(z)$, z którego usunięto jej bieguny (jest ich ilość przeliczalna). Wówczas stosując udowodnioną część b) kolejno do par (U_i,z_i) (U_{i+1},z_{i+1}) oraz korzystając z (3), otrzymujemy tezę lematu.

Wykażemy teraz, przy pomocy udowodnionego lematu, że funkcje pierwotne dla funkcji analitycznych posiadają własności podobne do własności funkcji pierwotnych dla funkcji holomorficznych.

<u>Twierdzenie 1.2</u> (o jednoznaczności)

Funkcja pierwotna $\zeta_\beta(z)$ funkcji analitycznej $\beta(z)$ jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do stałej, tzn. jeśli $\zeta^1_\beta(z)$, $\zeta^2_\beta(z)$ są dwiesa funkcjami pierwotnymi funkcji $\beta(z)$, wówczas różnią się one o stałą. Ponadto jeśli $\zeta_\beta(z)$ jest funkcją pierwotną $\beta(z)$, wówczas funkcja $\zeta_\beta(z)+c$ są także funkcjami pierwotnymi $\beta(z)$.

Dowód:

Fakt, iż dla ustalonej funkcji pierwotnej $\zeta_\beta(z)$ funkcje $\zeta_\beta(z)+c$ są także funkcjami pierwotnymi funkcji $\beta(z)$ wynika natychmiast z def. 1.1. Załóżmy teraz, że $\zeta^1_\beta(z)$, $\zeta^2_\beta(z)$ są dwiema funkcjami pierwotnymi funkcji $\beta(z)$. Z definicji 1.1 wynika, że istnieją elementy analityczne $(W_1,z_1)\in\zeta^1_\beta$ $(W_2,z_2)\in\zeta^2_\beta$, $(U_1,z_1)\in\beta$, $(U_2,z_2)\in\beta$ takie, że w pewnym otoczeniu z_1 $W_1'(z)= = U_1(z)$, a w pewnym otoczeniu z_2 $W_2'(z) = U_2(z)$. Bez szkody dla ogólności założyć możemy, że z_1 i z_2 nie są biegunami odpowiednio funkcji $U_1(z)$ i $U_2(z)$. W przeciwnym razie moglibyśmy wybrać inne punkty leżące w kołach elementów (W_1,z_1), (W_2,z_2) i nie będące biegunami funkcji $U_1(z)$ oraz odpowiednio $U_2(z)$, przy czym w pewnych ich otoczeniach $W_1'(z) = = U_1(z)$ i odpowiednio $W_2'(z) = U_2(z)$.

Z lematu 1.1 otrzymujemy, że istnieje łańcuch elementów łączący elementy (W_1,z_1) z (W,z_2), przy czym w otoczeniu z_2 $W'(z) = U_2(z)$. W otoczeniu tym zachodzi więc $W(z) = W_2(z) + c$. Element (W,z_2) należy do funkcji ζ^1_β zaś element (W_2+c,z_2) do funkcji $\zeta^2_\beta+c$. Elementy te są sobie równe, więc $\zeta^1_\beta = \zeta^2_\beta+c$, co kończy dowód twierdzenia.

W dalszej części pracy, jeśli nie zaznaczono, że jest inaczej, równość $\zeta_\beta(z) = \zeta_\varphi(z)$ funkcji pierwotnych dla funkcji analitycznych $\beta(z)$ i $\varphi(z)$ oznaczać będzie równość z dokładnością do stałej.

LEMAT 1.2

Niech H_β oraz H_{ζ_β} oznaczają obszary naturalne funkcji $\beta(z)$ oraz $\zeta_\beta(z)$. Wówczas dla dowolnego z_0 należącego do H_{ζ_β} oraz elementu $(W, z_0)\in\zeta_\beta$ element $(W',z_0)\in\beta$. Ponadto $H_\beta\setminus H_{\zeta_\beta}$ jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym.

Dowód:

Weźmy z_0 takie, aby $(W,z_0)\in\zeta_\beta$. Niech zgodnie z definicją 1.1 elementy $(W_1,z_1)\in\zeta_\beta$, $(U_1,z_1)\in\beta$ będą takie, że w otoczeniu punktu z_1 $W_1'(z) = = U_1(z)$. Jeśli $(W,z_0) = (W_1,z_1)$ otrzymujemy natychmiast $(W',z_0)\in\beta$. W przeciwnym wypadku istnieje ciąg skończony elementów $(W_2,z_2)\ldots(W_N,z_N)$ łączący elementy (W,z_0) i (W_1,z_1). Zauważmy, że ciąg skończony elementów $(W_2',z_2)\ldots(W_N',z_N)$ łączy wtedy element (W',z_0) z elementem (W_1',z_1). Istotnie. Jeśli (W_2,z_2) jest bezpośrednim przedłużeniem elementu (W,z_0), wówczas z_2 jest punktem wewnętrznym koła elementu (W,z_0) oraz w otoczeniu z_2 $W(z) = W_2(z)$. Otrzymujemy stąd natychmiast, że $W'(z) = W_2'(z)$ w tym otoczeniu, a ponieważ koło elementu (W',z_0) jest nie mniejsze od koła elementu (W,z_0), więc z_2 musi być jego punktem wewnętrznym. Element (W_2',z_2) jest więc bezpośrednim przedłużeniem elementu (W',z_0). Stosując podobne rozumowanie do par (W_i,z_i), (W_{i+1},z_{i+1}), $i = 2,3,\ldots,N-1$, oraz pary (W_N,z_N), (W_1,z_1), widzimy, że ciąg skończony elementów (W_2',z_2) $\ldots(W_N',z_N)$ łączy element (W',z_0) z (W_1',z_1). Elementy te należą wówczas do tej samej funkcji analitycznej $\beta(z)$, co kończy dowód pierwszej części lematu. Weźmy teraz punkt $z \in H_\beta \setminus H_{\xi_\beta}$. Jeśli istniałby przynajmniej jeden element $(U,z) \in \beta$, dla którego z nie byłby biegunem, wówczas rozumując jak w dowodzie twierdzenia 1.1 uzyskalibyśmy element (W,z) $\in \xi_\beta$. Punkt z należałby więc do H_{ξ_β}, co wobec założenia, że $z \in H_\beta \setminus H_{\xi_\beta}$, świadczy o tym, że taki element (U,z) nie istnieje. Punkt z musi być więc biegunem każdego elementu funkcji $\beta(z)$, którego jest środkiem. Zbiór tych punktów zawiera się oczywiście w zbiorze biegunów funkcji $\beta(z)$, czyli może być co najwyżej przeliczalny, więc dowód lematu można uznać za zakończony.

Z lematu 1.2 wynika pewna uwaga, która jest uzupełnieniem twierdzenia 1.2.

UWAGA 1.1

Jeśli $\psi(z)$ jest funkcją pierwotną funkcji $\beta_1(z)$ i $\beta_2(z)$ to $\beta_1(z) = \beta_2(z)$.

Istotnie. Z tego co powiedzieliśmy o biegunach funkcji analitycznych oraz o bezpośrednich przedłużeniach elementów wynika, że gdyby $\beta_1(z) \neq \beta_2(z)$, to istniałyby dwa elementy (U_1,z_1) i (U_2,z_2), należące odpowiednio do funkcji $\beta_1(z)$ oraz $\beta_2(z)$, takie iż z_1 nie byłby biegunem $U_1(z)$, a z_2 - biegunem $U_2(z)$. Istniałyby także elementy (W_1,z_1), (W_2,z_2) należące do $\psi(z)$, takie, że $W_1'(z) = U_1(z)$ w otoczeniu z_1, a $W_2'(z) = U_2(z)$.

Z lematu 1.2 wynika natychmiast, że elementy (U_1,z_1), (U_2,z_2) należałyby do jednej funkcji analitycznej. Uzyskana sprzeczność świadczy o prawdziwości uwagi 1.1.

Przejdźmy do dowodów dalszych własności funkcji pierwotnych. Okazuje się, że operacja brania funkcji pierwotnych jest operacją liniową. Zachodzi mianowicie:

Twierdzenie 1.3

Dla dowolnych liczb λ,τ oraz funkcji analitycznych $\beta_1(z)$, $\beta_2(z)$ mających ten sam obszar naturalny zachodzi:

$$\xi_{\tau\beta_1+\lambda\beta_2} = \tau\xi_{\beta_1} + \lambda\xi_{\beta_2} \tag{6}$$

Uwaga:

Równość ta wymaga pewnego komentarza. Jak wiadomo dodawanie dwóch funkcji analitycznych $\tau\beta_1 + \lambda\beta_2$ prowadzi do całego zbioru funkcji analitycznych, a $\xi_{\tau\beta_1+\lambda\beta_2}$ oznacza wtedy zbiór funkcji pierwotnych dla funkcji należących do zbioru $\tau\beta_1 + \lambda\beta_2$. Podobnie zbiorem funkcji analitycznych jest suma $\tau\xi_{\beta_1} + \lambda\xi_{\beta_2}$. Powyższą równość należy więc rozumieć jako równość zbiorów. Równość między elementami tych zbiorów, a więc konkretnymi funkcjami analitycznymi, rozumiemy jako równość z dokładnością do stałej.

Dowód twierdzenia:

Niech $\phi(z) \in \xi_{\tau\beta_1+\lambda\beta_2}$. Istnieje więc element $(W,z_0)\in\phi$ taki, że $(W',z_0)\in\rho$, gdzie $\rho(z)$ jest funkcją typu $\tau\beta_1 + \lambda\beta_2$. Bez szkody dla ogólności założyć możemy, że z_0 nie jest biegunem funkcji $\beta_1(z)$ ani $\beta_2(z)$. Istnieją dalej dwa elementy analityczne $(U_1,z_1)\in\beta_1$, $(U_2,z_1)\in\beta_2$, takie, że $\rho(z)$ jest wyznaczona przez element $(\tau U_1+\lambda U_2,z_1)$. O punkcie z_1 założyć można, że nie jest biegunem funkcji $U_1(z)$ i $U_2(z)$.

Na mocy lematu 1.1 element (W,z_0) można połączyć łańcuchem z elementem (V,z_1) tak, iż:

$$V' = \tau U_1 + \lambda U_2 \quad \text{w otoczeniu } z_1. \tag{7}$$

Istnieją elementy (W_1,z_1) (W_2,z_1) takie, że:

$$W_1' = U_1, \quad W_2' = U_2 \quad \text{w otoczeniu } z_1. \tag{8}$$

Elementy te wyznaczają odpowiednio funkcje ξ_{β_1} i ξ_{β_2}. Element $(\tau W_1+\lambda W_2, z_1)$ wyznacza wtedy pewną funkcję postaci $\tau\xi_{\beta_1} + \lambda\xi_{\beta_2}$, która ze względu na (7) i (8) różni się od funkcji wyznaczonej przez element (V,z_1), czyli od $\phi(z)$ najwyżej o stałą. Świadczy to o tym, iż $\phi \in \tau\xi_{\beta_1} + \lambda\xi_{\beta_2}$. Załóżmy teraz, że funkcja $\Phi(z) \in \tau\xi_{\beta_1} + \lambda\xi_{\beta_2}$. Funkcja $\Phi(z)$ jest wówczas wyznaczona przez pewien element $(\tau W_1+\lambda W_2,z_0)$, gdzie $(W_1,z_0)\in\xi_{\beta_1}$, $(W_2,z_0)\in\xi_{\beta_2}$. Z lematu 1.2 otrzymujemy: $(W_1',z_0)\in\beta_1$, $(W_2',z_0)\in\beta_2$. Możemy oczywiście założyć, że z_0 nie jest biegunem funkcji W_1 oraz W_2 a więc nie jest też biegunem funkcji $\tau W_1' + \lambda W_2'$. Stąd otrzymujemy, że dla elementu $(\tau W_1' + \lambda W_2',z_0)$ wyznaczającego pewną funkcję ze zbioru $\tau\beta_1 + \lambda\beta_2$ istnieje element (V,z_0) wyznaczający pewną funkcję ϕ ze zbioru $\xi_{\tau\beta_1+\lambda\beta_2}$, taki, że $V' = \tau W_1' + \lambda W_2'$ w otoczeniu z_0. Funkcje Φ oraz ϕ różnią się więc o stałą, co świadczy o tym, że $\Phi(z)\in\xi_{\tau\beta_1+\lambda\beta_2}$.

Następne twierdzenie można określić jako twierdzenie o podstawieniu. Sens tego twierdzenia stanie się jasny, gdy będziemy rozpatrywać zależności między gałęziami funkcji $\xi_\beta(z)$ oraz $\beta(z)$, rozważanych na tych obszarach, na których są one jednoznaczne.

Twierdzenie 1.4

Niech D będzie dowolnym obszarem, a $f(z)$ funkcją na nim holomorficzną. Wówczas dla dowolnej funkcji analitycznej $\beta(z)$ oraz jej funkcji pierwotnej $\xi_\beta(z)$ zachodzi:

$$\xi_\beta \circ f = \xi_{(\beta\circ f).f'} \tag{9}$$

Równość tę, podobnie jak równość (6), traktować należy jako równość zbiorów.

Dowód:

Oznaczmy podobnie jak w lemacie 1.2 przez H_β oraz H_{ξ_β} obszary naturalne $\beta(w)$ oraz $\xi_\beta(w)$. Możliwe są dwa przypadki:

a) $f(D) \cap H_{\xi_\beta} = \emptyset$

W tym wypadku nie istnieje żadna funkcja typu $\xi_\beta \circ f$. Ponieważ $f(D)$ jest obszarem, a $H_\beta \setminus H_{\xi_\beta}$ zbiorem co najwyżej przeliczalnym, więc $f(D) \cap H_\beta = \emptyset$. Nie istnieje więc żadna funkcja typu $\beta \circ f$, a co za tym idzie, żadna funkcja $\xi_{(\beta\circ f).f'}$. Równość (9) jest więc spełniona ($\emptyset = \emptyset$).

b) $\emptyset \neq f(D) \cap H_{\xi_\beta} \subset f(D) \cap H_\beta$.

Wybierzmy dowolną funkcję $\varphi(z)$ typu $\xi_\beta \circ f$. Wówczas istnieje przynajmniej jeden element postaci $(W\circ f, z) \in \varphi$, gdzie z należy do D, a $(W, f(z))$ jest elementem funkcji $\xi_\beta(w)$. Rozważmy otoczenie punktu z na tyle małe, aby zawierało się ono w kole elementu $(W\circ f, z)$ oraz aby jego obraz przy odwzorowaniu przez funkcję $f(z)$ zawierał się w H_{ξ_β}, a co za tym idzie w H_β. Wówczas istnieje w tym otoczeniu punkt z_1, taki, że $w_1 = f(z_1)$ nie jest biegunem funkcji $\beta(w)$. Ponieważ z_1 należy do koła elementu $(W\circ f, z)$, więc element $(W_1 \circ f, z_1) = (W_{z_1} \circ f, z_1)$ jest elementem funkcji $\varphi(z)$. Element $(W_1', f(z_1))$ należy wówczas do funkcji $\xi_\beta(w)$. Z lematu 1.2 wynika, że $(W_1', f(z_1)) \in \beta(w)$. Rozpatrzmy element $((W_1' \circ f) f', z_1)$. Element ten wyznacza pewną funkcję $\rho(z)$ typu $(\beta\circ f) f'$. Ponieważ z_1 nie jest biegunem funkcji $(W_1' \circ f) f'(z)$, więc rozumując jak w dowodzie twierdzenia 1.1 otrzymujemy funkcję $\xi_\rho(z)$ wyznaczoną przez element (P, z_1), taki iż w otoczeniu z_1 $P'(z) = (W_1' \circ f) f'(z) = (W_1' \circ f)(z))'$. Funkcje $\varphi(z)$ oraz $\xi_\rho(z)$ różnią się więc o stałą, co świadczy o tym, że $\varphi(z)$ jest funkcją postaci $\xi_{(\beta\circ f) f'}$.

Załóżmy teraz na odwrót, że pewna funkcja $\Phi(z)$ jest typu $\xi_{(\beta\circ f)f'}$. Istnieje więc funkcja $\rho(z)$ typu $(\beta\circ f)f'$ taka, że $\Phi(z) = \beta_\rho(z)$. Istnieje także taki element $(P,f(z_1))\in\beta$, że $\rho(z)$ jest wyznaczona przez $((P\circ f)f',z_1)$. Podobnie jak w pierwszej części dowodu, o $f(z_1)$ założyć można, iż nie jest biegunem funkcji $\beta(w)$. Istnieje wówczas taki element $(R,f(z_1))\in\xi_\beta$, że $R'(w) = P(w)$ w otoczeniu $f(z_1)$. Niech teraz funkcja $\phi(z)$ będzie wyznaczona przez element analityczny $(R\circ f,z_1)$. Funkcja $\phi(z)$ jest więc typu $\xi_\beta\circ f$. Różniczkując funkcję $(R\circ f)(z)$ w otoczeniu z_1, otrzymujemy $(R\circ f)'(z) = (P\circ f)f'(z)$. Funkcja $\phi(z)$ jest więc postaci $\xi_\rho(z)$, a co za tym idzie różni się od $\Phi(z)$ o stałą, co kończy dowód twierdzenia.

Ostatnim twierdzeniem będzie twierdzenie podające związek między gałęziami jednoznacznymi funkcji $\xi_\beta(z)$ oraz $\beta(z)$. Związek ten szczególnie jasno będzie widoczny, gdy gałęzie te rozpatrywać będziemy na krzywych gładkich. Twierdzenie to uzasadnia w jakiś sposób fakt, iż funkcję $\xi_\beta(z)$, która występuje w definicji 1.1, nazywamy funkcją pierwotną funkcji $\beta(z)$.

Twierdzenie 1.5

Dla dowolnej funkcji analitycznej $\beta(z)$ oraz jej funkcji pierwotnej $\xi_\beta(z)$ prawdziwe są implikacje:

1. Jeśli na obszarze D $\xi_{\beta D}(z)$ jest jednoznaczną gałęzią funkcji $\xi_\beta(z)$, wówczas $\xi'_{\beta D}(z)$ jest gałęzią $\beta_D(z)$ funkcji $\beta(z)$ na D.

2. Jeśli na obszarze jednospójnym D nie zawierającym biegunów funkcji z oraz ∞ funkcja $\beta_D(z)$ jest jednoznaczną gałęzią funkcji $\beta(z)$, wówczas istnieje jednoznaczne gałąź $\beta_D(z)$ funkcji $\beta(z)$ na obszarze D, taką, że $\xi'_{\beta D}(z) = \beta_D(z)$.

3. W obu przypadkach, gdy $z(t)$ jest dowolną krzywą gładką przebiegającą w D, to:

$$\xi_{\beta D}(z(t)) = \int \beta_D(z(t))\, z'(t)dt.$$

Dowód:

1. Weźmy dowolny punkt $z_0 \in D$ i rozpatrzmy element analityczny $(\xi'_{\beta D}, z_0)$. Element ten należy do $\beta(z)$. Z drugiej strony funkcja meromorficzna $\xi'_{\beta D}(z)$ jest wyznaczona przez ten element. Funkcja $\xi'_{\beta D}(z)$ jest więc w D gałęzią $\beta_D(z)$ funkcji analitycznej $\beta(z)$.

2. Z założeń o funkcji $\beta_D(z)$ oraz obszarze D wynika, że istnieje w D funkcja pierwotna $\phi(z)$ dla funkcji holomorficznej $\beta_D(z)$.

Z definicji 1.1 wynika natychmiast, że funkcja $\phi(z)$ jest gałęzią $\xi_{\beta D}(z)$ funkcji $\xi_\beta(z)$. Mamy także $\xi'_{\beta D}(z) = \phi'(z) = \beta_D(z)$.

3. Słuszność tej równości jest oczywiście natychmiastową konsekwencją punktów 1.2.

Wróćmy raz jeszcze do twierdzenia 1.4. Z twierdzenia 1.5 otrzymujemy, że jeśli na pewnym obszarze D istnieje gałąź jednoznaczna $\xi_{\beta_D}(z)$ funkcji $\xi_\beta(z)$, a $f(z)$ jest funkcją holomorficzną na D' oraz $f(D')=D$ wówczas

$$(\xi_{\beta_D}\circ f)' = (\beta_D\circ f)f',$$

gdzie $\beta_D(z)$ oznacza gałąź funkcji $\beta(z)$, o której mówi twierdzenie 1.5/1. Analogiczną równość otrzymujemy, gdy założymy istnienia gałęzi jednoznacznej $\beta_D(z)$ funkcji $\beta(z)$ na obszarze jednospójnym nie zawierającym biegunów funkcji $\beta(z)$ oraz ∞ (tw. 1.5/2). Funkcja $(\xi_{\beta_D}\circ f)(z)$ jest więc funkcją pierwotną funkcji $((\beta_D\circ f)f')(z)$. Twierdzenie 1.4 stanowi tedy pewne uogólnienie tego rezultatu.

LITERATURA

[1] Saks S., Zygmund A.: Funkcje analityczne.

Recenzent: doc. dr hab. Janina Śladkowska-Zahorska

Wpłynęło, 29.XI.1983 r.

ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Р е з ю м е

В работе вводится понятие первообразной функции ξ_β аналитической функции β. Аналитическая функция ξ_β называется первообразной функцией аналитической функции β, если существует точка z_0 и существуют аналитические элементы $(W,z_0)\in\xi_\beta(U,z_0)\in\beta$, такие, что в некоторой окрестности точки z_0 имеем $W'=U$. Исследуются основные свойства первообразной функции, доказывается ряд теорем. Первообразная функция существует для любой аналитической функции и определяется с точностью до постоянной. Доказаны равенства $\xi_{\tau\beta_1+\lambda\beta_2} = \tau\xi_{\beta_1}+\lambda\xi_{\beta_2}$, $\xi_\beta\circ f = \xi_{(\beta\circ f)f'}$ где f голоморфическая функция. Получена связь между однозначными ветвями аналитических функции ξ_β и β.

ORGINAL FUNCTION FOR ANALYTIC FUNCTION

S u m m a r y

The paper contains definition of original functions for analytic functions and fundamental properties of those functions. The analytic function ξ_β is called an original function for the analytic function β, ,if there exists a point z_0 and two analytic elements $(W,z_0)\in\xi_\beta$, $(U,z_0)\in\beta$, such that, in a neighbourhood of z_0 $W'(z) = U(z)$. We prove, that for every analytic function β, there exist an original function ξ_β. If two analytic functions ξ_β^1 and ξ_β^2 are original for the function β, then there exists a scalar c, such that $\xi_\beta^1 = \xi_\beta^2 + c$. Next, we show, that the operation $\beta \to \xi_\beta$ is in certain sense linear and that for every holomorphic function f the sets of analytic functions $\xi_\beta \circ f$ and $\xi_{(\beta\circ f)f'}$ are equal.