ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 43 Nr kol. 795

Janina MACURA

NIERÓWNOŚCI GRUNSKY'EGO-NEHARIEGO DLA KLASY FUNKCJI JEDNOLISTNYCH, NIEPARZYSTYCH I OGRANICZONYCH

Streszczenie. W pracy rozważa się funkcje jednolistne, nieparzyste i ograniczone. Stosując wzory wariacyjne wyprowadza się nierówności Grunsky'ego-Nehariego dla tej klasy funkcji.

Niech $H(U)$ będzie przestrzenią funkcji holomorficznych w kole jednostkowym $U = \{z: |z| < 1\}$ z metryką niemal jednostajnej zbieżności, $H^*(U)$ - przestrzenią sprzężoną, $S_1^{(2)}$ - rodziną funkcji holomorficznych i jednolistnych w kole U postaci

$$F(z) = a_1 z + a_2 z^3 + \ldots + a_n z^{2n-1} + \ldots,$$

spełniających warunki

$$F(0) = 0, \; F'(0) > 0, \; |F(z)| < 1. \tag{1}$$

Mając daną funkcję f rodziny S_1, tzn. funkcję holomorficzną, jednolistną w kole U i spełniającą warunki (1), możemy przy pomocy związku $F(z) = \sqrt{f(z^2)}$ otrzymać funkcję F rodziny $S_1^{(2)}$.

W niniejszej pracy, korzystając ze wzorów wariacyjnych typu Schiffera, otrzymanych przez K. Miśtę [2] dla funkcji rodziny S_1, wyprowadzimy wariacje funkcji rodziny $S_1^{(2)}$, a następnie zastosujemy je do oszacowania pewnych funkcjonałów w tej rodzinie.

W celu otrzymania wzorów wariacyjnych dla funkcji klasy $S_1^{(2)}$, skorzystamy z wariacji wewnętrznej Schiffera funkcji klasy S_1 (twierdzenie 2 [2]):

$$f^*(z) = f(z) + \varepsilon\Big(\frac{e^{i\alpha} f(z)}{f(z)-f(z_0)} - \frac{e^{-i\alpha} f^2(z)}{1-\overline{f(z_0)}f(z)} - e^{i\alpha}\frac{f(z_0)}{z_0 f'^2(z_0)}\,\frac{zf'(z)}{z-z_0} +$$

$$+ e^{-i\alpha}\Big(\overline{\frac{f(z_0)}{z_0 f'^2(z_0)}}\Big)\frac{z^2 f'(z)}{1-\bar{z}_0 z}\Big) + o(\varepsilon) \quad \text{dla dowolnego } z_0 \in U,$$

dowolnego $\varepsilon \in R$ oraz $\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 0$, gdy $\varepsilon \to 0$ niemal jednostajnie w U. We wzorze tym w miejsce z i z_0 kładziemy z^2 i z_0^2, a następnie całość pierwiastkujemy. Otrzymujemy w ten sposób wzór wariacyjny typu Schiffera dla funkcji nieparzystej $F(z)$:

$$F^*(z) = \sqrt{f^*(z^2)} = \sqrt{f(z^2)}\Big(1 + \varepsilon\Big(\frac{e^{i\alpha}}{f(z^2)-f(z_0^2)} - \frac{e^{-i\alpha} f(z^2)}{1-\overline{f(z_0^2)}f(z^2)} -$$

$$- e^{i\alpha}\frac{f(z_0^2)}{z_0^2 f'^2(z_0^2)} \frac{z^2 f'(z^2)}{f(z^2)(z^2-z_0^2)} + e^{-i\alpha}\overline{\Big(\frac{f(z_0^2)}{z_0^2 f'^2(z_0^2)}\Big)}\frac{z^4 f'(z^2)}{f(z^2)(1-\bar{z}_0^2 z^2)}\Big)\Big)^{1/2} + o(\varepsilon).$$

Ponieważ $F'(z) = \frac{z f'(z^2)}{F(z)}$ oraz $f(z^2) = F^2(z)$, więc otrzymujemy

$$F^*(z) = F(z) + \frac{1}{2}\varepsilon\Big(\frac{e^{i\alpha}F(z)}{F^2(z)-F^2(z_0)} - \frac{e^{-i\alpha}F^3(z)}{1-\overline{F^2(z_0)}F^2(z)} -$$

$$- \frac{e^{i\alpha} z F'(z)}{F'^2(z_0)(z^2-z_0^2)} + e^{-i\alpha}\overline{\Big(\frac{1}{F'^2(z_0)}\Big)}\frac{z^3F'(z)}{1-\bar{z}_0^2 z^2}\Big) + o(\varepsilon).$$

Dla funkcji nieparzystych można także zbudować wariację zewnętrzną, analogicznie do wariacji zewnętrznej dla funkcji rodziny S_1. Niech $F \in S_1^{(2)}$ oraz $\pm w_0, \pm \frac{1}{\bar{w}_0} \notin \overline{F(U)}$. Jeśli $F(z) = \sqrt{f(z^2)}$, gdzie $f \in S_1$, to w_0^2, $\frac{1}{\bar{w}_0^2} \notin \overline{f(U)}$ i na mocy twierdzenia 3 [2] istnieje funkcja $f^* \in S_1$ taka, że

$$f^*(z) = f(z) + \varepsilon e^{i\alpha}\frac{f(z)}{f(z)-w_0^2} - \varepsilon e^{-i\alpha}\frac{f^2(z)}{1-\bar{w}_0^2 f(z)} + o(\varepsilon), \qquad (3)$$

gdzie $\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 0$, gdy $\varepsilon \to 0$ niemal jednostajnie w U.

Kładąc w (3) z^2 w miejsce z i pierwiastkując, otrzymujemy

$$F^*(z) = \sqrt{f^*(z^2)} = F(z) + \frac{1}{2}\varepsilon\Big(\frac{e^{i\alpha}F(z)}{F^2(z)-w_0^2} - \frac{e^{-i\alpha}F^3(z)}{1-\bar{w}_0^2F^2(z)}\Big) + o(\varepsilon). \qquad (4)$$

Opierając się teraz na odwzorowaniach $U \to U$, utworzymy pewne elementarne wariacje funkcji rodziny $S_1^{(2)}$. Jeśli $F \in S_1^{(2)}$, to także $F_1(z) = F(e^{i\varepsilon}z) \in S_1^{(2)}$, gdzie ε jest dowolną liczbą rzeczywistą. Mamy stąd

$$F_1(z) = F(z) + \varepsilon izF'(z) + o(\varepsilon), \tag{5}$$

gdzie $\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 0$, gdy $\varepsilon \to 0$ niemal jednostajnie w U.

Połóżmy teraz

$$k(z) = \frac{z}{(1+e^{-2i\alpha_z}z)^2}, \quad l(z) = \sqrt{k(z^2)} = \frac{z}{1+e^{-2i\alpha_z}z^2}.$$

Funkcja $\varphi(z) = l^{-1}((1-\varepsilon)l(z)) \in S_1^{(2)}$ dla $0 < \varepsilon < 1$ i przekształca U w U. Dla funkcji $F \in S_1^{(2)}$ również $F_2(z) = F(\varphi(z)) \in S_1^{(2)}$ oraz

$$F_2(z) = F(z) - \varepsilon \frac{z(1+e^{-2i\alpha_z}z^2)}{1-e^{-2i\alpha_z}z^2}F'(z) + o(\varepsilon), \tag{6}$$

gdzie $\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 0$, gdy $\varepsilon \to 0$ niemal jednostajnie w U.

Niech Φ będzie funkcjonałem rzeczywistym, różniczkowalnym w sensie Gâteaux w rodzinie $S_1^{(2)}$, tzn. jeśli dla każdej $F \in S_1^{(2)}$ i $F^* \in S_1^{(2)}$ takiej, że $F^* = F + \varepsilon H + o(\varepsilon)$, gdzie $H \in H(U)$, $\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 0$, gdy $\varepsilon \to 0$, niemal jednostajnie w U, zachodzi równość

$$\Phi(F^*) = \Phi(F) + \varepsilon \operatorname{Re}\left\{\Lambda_F(H)\right\} + o(\varepsilon), \tag{7}$$

gdzie $\Lambda_F \in H'(U)$. Λ_F nazywa się różniczką (pochodną) w sensie Gâteaux funkcjonału w punkcie F.

Załóżmy, że funkcja $F \in S_1^{(2)}$ realizuje maksimum funkcjonału Φ, tzn. dla dowolnej funkcji $\tilde{F} \in S_1^{(2)}$ zachodzi nierówność

$$\Phi(\tilde{F}) - \Phi(F) \leq 0. \tag{8}$$

Z równania (7), ze względu na (8) oraz dowolność rzeczywistego ε, otrzymujemy

$$\operatorname{Re}\left\{\Lambda_F(H)\right\} = 0. \tag{9}$$

W podobny sposób, korzystając z równania (5), otrzymujemy

$$\operatorname{Im}\left\{\Lambda_F(zF'(z))\right\} = 0. \tag{10}$$

Z równania (6) natomiast, ze względu na dodatniość ε, mamy

$$\operatorname{Re}\left\{\Lambda_F\left(zF'(z)\frac{1+e^{-2i\alpha_z}z^2}{1-e^{-2i\alpha_z}z^2}\right)\right\} \geq 0. \tag{11}$$

Przyjmijmy teraz w (2)

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{e^{i\alpha}F(z)}{F^2(z)-F^2(z_0)} - \frac{e^{-i\alpha}F^3(z)}{1-\overline{F^2(z_0)}F^2(z)} - \frac{e^{i\alpha}zF'(z)}{F'^2(z_0)(z^2-z_0^2)} +$$

$$+ e^{-i\alpha}\overline{\left(\frac{1}{F'^2(z_0)}\right)}\frac{z^3F'(z)}{1-\bar{z}_0^2z^2}\Big) = H.$$

Korzystając z (9), otrzymujemy

$$\mathrm{Re}\Big\{e^{i\alpha}\Big(\Lambda_F\Big(\frac{F}{F^2-F^2(z_0)}\Big) - \overline{\Lambda_F\Big(\frac{F^3}{1-\overline{F^2(z_0)}F^2}\Big)} - \frac{1}{F'^2(z_0)}\Lambda_F\Big(\frac{zF'}{z^2-z_0^2}\Big) +$$

$$+ \frac{1}{F'^2(z_0)}\overline{\Lambda_F\Big(\frac{z^3F'}{1-\bar{z}_0^2z^2}\Big)}\Big)\Big\} = 0.$$

Z dowolności α wynika stąd, że

$$z_0^2F'^2(z_0)\Big(\Lambda_F\Big(\frac{F}{F^2-F^2(z_0)}\Big) - \overline{\Lambda_F\Big(\frac{F^3}{1-\overline{F^2(z_0)}F^2}\Big)}\Big) = \Lambda_F\Big(zF'\frac{z_0^2}{z^2-z_0^2}\Big) -$$

$$- \overline{\Lambda_F\Big(zF'\frac{\bar{z}_0^2z^2}{1-z_0^2z^2}\Big)},$$

lub po wykonaniu pewnych przekształceń

$$\frac{z_0^2F'^2(z_0)}{F^2(z_0)}\Big(\Lambda_F\Big(\frac{FF^2(z_0)}{F^2-F^2(z_0)}\Big) - \overline{\Lambda_F\Big(\frac{F^3\overline{F^2(z_0)}}{1-\overline{F^2(z_0)}F^2}\Big)}\Big) =$$

$$= \Lambda_F\Big(zF'\frac{z_0^2}{z^2-z_0^2}\Big) + \overline{\Lambda_F(zF')} - \overline{\Lambda_F\Big(zF'\frac{1}{1-\bar{z}_0^2z^2}\Big)}. \tag{12}$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$z_0 = \zeta, \qquad D(w) = \Lambda_F\Big(\frac{w^2F}{F^2-w^2}\Big), \qquad E(\zeta) = \Lambda_F\Big(zF'\frac{\zeta^2}{z^2-\zeta^2}\Big). \tag{13}$$

Związek (12) możemy zapisać

$$\frac{z^2 F'^2(z)}{F^2(z)}\left(D(F(z)) + \overline{\Lambda_F(F)} + \overline{D\left(\frac{1}{F(z)}\right)}\right) = E(z) + \overline{\Lambda_F(zF')} + \overline{E\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}. \tag{14}$$

Rzeczywistość prawej strony (12) na okręgu ∂U wynika z jej postaci i z (10), natomiast z (11) (a również z (10)) wynika, że ta prawa strona jest na ∂U niedodatnia.

Powyższe wyniki możemy zapisać w następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 1

Niech Φ będzie funkcjonałem rzeczywistym, różniczkowalnym w sensie Gâteaux w rodzinie $S_1^{(2)}$, F - funkcję realizującą maksimum funkcjonału Φ w tej rodzinie, Λ_F - jego pochodną w sensie Gâteaux w punkcie F. Funkcja F spełnia równania

$$\frac{z^2 F'^2(z)}{F^2(z)}\left(D(F(z)) + \overline{\Lambda_F(F)} + \overline{D\left(\frac{1}{F(z)}\right)}\right) = E(z) + \overline{\Lambda_F(zF')} + \overline{E\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)},$$

gdzie $z \in U$, $D(w)$, $E(z)$ są zdefiniowane wzorami (4), natomiast z jest dowolnym, ustalonym punktem koła U; $E(z) + \overline{\Lambda_F(zF')} + \overline{E\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$ jest rzeczywiste i niedodatnia na okręgu ∂U.

Jeżeli F jest funkcją ekstremalną ze względu na funkcjonał Φ, to z równania (4), ze względu na (9) i dowolność α, otrzymujemy

$$\Lambda_F\left(\frac{F}{F^2-w_0^2}\right) - \overline{\Lambda_F\left(\frac{F^3}{1-\bar{w}_0^2 F^2}\right)} = 0.$$

Jeżeli zatem założymy, że

$$D(w) + \overline{\Lambda_F(F)} + \overline{D\left(\frac{1}{\bar{w}}\right)} = w^2\, \Lambda_F\left(\frac{F}{F^2-w^2}\right) - w^2\, \overline{\Lambda_F\left(\frac{F^3}{1-\bar{w}^2 F^2}\right)}$$

jest funkcją meromorficzną w C i nie jest tożsamościowo równa zero, to co najmniej jeden z 4 punktów $\pm w_0$, $\pm\frac{1}{\bar{w}_0}$ musi należeć do $\overline{F(U)}$, a stąd oraz z nieparzystości funkcji F wynika, że $U-F(U)$ nie ma punktów wewnętrznych. Założenie w powyższej uwadze można osłabić, wystarczy aby $D(w) + \overline{\Lambda_F(F)} + \overline{D\left(\frac{1}{\bar{w}}\right)}$ było funkcją meromorficzną $\not\equiv 0$ w obszarze pokrywającym zbiór $U-F(U)$. Możemy zatem sformułować następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2

Jeżeli $D(w)+\overline{\Lambda_F(F)}+\overline{D(\frac{1}{w})}$ jest funkcją meromorficzną $\not\equiv 0$ w obszarze pokrywającym zbiór $U-F(U)$, gdzie F jest funkcją realizującą maksimum funkcjonału Φ w rodzinie $S_1^{(2)}$, to zbiór $U-F(U)$ nie ma punktów wewnętrznych.

Niech teraz $L\in H'(U)$. Weźmy pod uwagę funkcjonał

$$\Phi(F) = \mathrm{Re}\left\{L^2\left(\log\frac{F(z)-F(\zeta)}{F(z)+F(\zeta)}\,\frac{z+\zeta}{z-\zeta}\right)+|L|^2\left(\log\frac{1-\overline{F(\zeta)}F(z)}{1+F(\zeta)F(z)}\right)\right\}, \tag{15}$$

gdzie $L^2(\varphi(z,\zeta)) = L(L(\varphi(z,\zeta)))$, $|L|^2(\varphi(z,\bar{\zeta})) = L(\overline{L(\varphi(z,\bar{\zeta}))})$, $\varphi(z,\zeta)$ jest funkcją holomorficzną w $U\times U$.

Łatwo widać, że funkcjonał Φ jest określony w rodzinie $S_1^{(2)}$. Rodzina ta nie jest zwarta, staje się taką dopiero po dołączeniu funkcji tożsamościowo równej zero. Zdefiniujemy funkcjonał dla funkcji $F\equiv 0$ tak, aby otrzymać funkcjonał ciągły w rodzinie $S_1^{(2)}\cup\{0\}$. W tym celu zanurzymy zbiór $S_1^{(2)}\cup\{0\}$ w zbiór par $E=\{(b_1,\hat{F}):\ 0\le b_1\le 1,\ \hat{F}\in S^{(2)},\ b_1\hat{F}\in S_1^{(2)}\cup\{0\}\}$. Widać, że $E=E_1\cup E_2$, gdzie $E_1=\{(b_1,\hat{F}):\ 0<b_1\le 1,\ \hat{F}\in S^{(2)},\ b_1\hat{F}\in S_1^{(2)}\}$, $E_2=\{(0,\hat{F}):\ \hat{F}\in S^{(2)}\}$. Zbiór E jest zwarty, ponieważ jest podzbiorem domkniętym zbioru zwartego $E_0=\{(b_1,\hat{F}):\ 0\le b_1\le 1,\ \hat{F}\in S^{(2)}\}$.

Funkcjonał

$$\Phi(b_1,\hat{F}) = \begin{cases} \Phi(F) & \text{gdy } (b_1,\hat{F})\in E_1,\quad F=b_1\hat{F} \\[2mm] \mathrm{Re}\left\{L^2\left(\log\dfrac{\hat{F}(z)-\hat{F}(\zeta)}{\hat{F}(z)+\hat{F}(\zeta)}\,\dfrac{z+\zeta}{z-\zeta}\right)\right\} & \text{gdy } (b_1,\hat{F})\in E_2 \end{cases} \tag{16}$$

jest ciągły, co łatwo widać, w E, osiąga zatem w E swoje maksimum. W przypadku gdy to maksimum jest przyjęte w zbiorze E_1, jest równe maksimum w $S_1^{(2)}$ funkcjonału (F), a w przypadku gdy jest przyjęta w E_2, jest równe maksimum funkcjonału

$$\mathrm{Re}\left\{L^2\left(\log\frac{F(z)-F(\zeta)}{F(z)+F(\zeta)}\,\frac{z+\zeta}{z-\zeta}\right)\right\}$$

w rodzinie zwartej $S^{(2)}$.

Przypuśćmy, że funkcjonał (16) przyjmuje swoją wartość największą w E_1, co jest równoważne temu, że $\Phi(F)$ przyjmuje wartość największą w rodzinie $S_1^{(2)}$ i niech funkcją ekstremalną będzie funkcja $F=b_1\hat{F}\in S_1^{(2)}$. Po łatwym rachunku otrzymujemy wzór na pochodną Gâteaux funkcjonału (15). I tak

$$\Lambda_F(H) = 2L^2\left(\frac{H(z)F(\zeta)-H(\zeta)F(z)}{F^2(z)-F^2(\zeta)}\right) - 2|L|^2\left(\frac{\overline{H(\zeta)}F(z)}{1-\overline{F^2(\zeta)}F^2(z)}\right) -$$

$$- 2|L|^2\overline{\left(\frac{\overline{F(\zeta)}H(z)}{1-\overline{F^2(\zeta)}F^2(z)}\right)}.$$

W celu uzyskania równania (14) w naszym przypadku, po łatwych rachunkach otrzymujemy

$$D(w) + \overline{\Lambda_F(F)} + \overline{D(\tfrac{1}{\bar w})} = -2w^2\left(L\left(\frac{F(z)}{F^2(z)-w^2}\right) + \overline{L\left(\frac{F(z)}{1-\bar w^2F^2(z)}\right)}\right)^2.$$

Prawa strona (14), na mocy twierdzenia Caccioppoli-Köthego jest holomorficzna co najmniej w pewnym pierścieniu $P = \left\{\zeta\in C:\ r<|\zeta|<\frac{1}{r}\right\}$, gdzie r zależy od funkcjonału L. Równanie, które spełnia funkcja ekstremalna F, ma więc postać

$$\zeta^2F'^2(\zeta)\left(L\left(\frac{F(z)}{F^2(z)-F^2(\zeta)}\right) + \overline{L\left(\frac{F(z)}{1-\overline{F^2(\zeta)}F^2(z)}\right)}\right)^2 = B(\zeta)$$

gdzie $B(\zeta) = -2\left(E(\zeta) + \overline{\Lambda_F(zF')} + \overline{E(\tfrac{1}{\bar\zeta})}\right)$ jest funkcją nieujemną na ∂U, holomorficzną w pierścieniu P.

Rozumowanie podobne jak w [2] prowadzi do wniosku, że funkcja

$$\phi(z) = L\left(\frac{\zeta F'(\zeta)F(z)}{F^2(z)-F^2(\zeta)} - \frac{\zeta z}{z^2-\zeta^2}\right) + \overline{L\left(\frac{\bar\zeta\overline{F'(\zeta)}F(z)}{1-\overline{F^2(\zeta)}F^2(z)}\right)} + \overline{L\left(\frac{\bar\zeta z}{1-\bar\zeta^2z^2}\right)}$$

jest holomorficzna w kole U i przedłuża się w sposób ciągły na koło domknięte $\overline{U}$, pozostając rzeczywista na ∂U. Jest zatem stała i ta stała jest równa zero. Ma więc miejsce związek

$$L\left(\frac{\zeta F'(\zeta)F(z)}{F^2(z)-F^2(\zeta)} - \frac{\zeta z}{z^2-\zeta^2}\right) + \overline{L\left(\frac{\bar\zeta\overline{F'(\zeta)}F(z)}{1-\overline{F^2(\zeta)}F^2(z)}\right)} + \overline{L\left(\frac{\bar\zeta z}{1-\bar\zeta^2z^2}\right)} = 0. \qquad (17)$$

Ponadto zachodzą związki

$$\frac{\zeta F'(\zeta)F(z)}{F^2(z)-F^2(\zeta)} - \frac{\zeta z}{z^2-\zeta^2} = -\frac{1}{2}\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\log\frac{F(z)-F(\zeta)}{F(z)+F(\zeta)}\,\frac{z+\zeta}{z-\zeta},$$

$$\frac{\bar{\zeta}\,\overline{F'(\zeta)}F(z)}{1-\overline{F^2(\zeta)}F^2(z)} = -\frac{1}{2}\bar{\zeta}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\log\frac{1-\overline{F(\zeta)}F(z)}{1+\overline{F(\zeta)}F(z)},$$

$$\frac{\bar{\zeta}z}{1-\bar{\zeta}^2z^2} = -\frac{1}{2}\bar{\zeta}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\log\frac{1-\bar{\zeta}z}{1+\bar{\zeta}z}.$$

Stosując powyższe równości do (17), otrzymujemy (ze względu na ciągłość L)

$$\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\left(L\left(\log\frac{F(z)-F(\zeta)}{F(z)+F(\zeta)}\,\frac{z+\zeta}{z-\zeta}\right) + \overline{L\left(\log\frac{1-\overline{F(\zeta)}F(z)}{1+\overline{F(\zeta)}F(z)}\right)} + \overline{L\left(\log\frac{1-\bar{\zeta}z}{1+\bar{\zeta}z}\right)}\right) = 0,$$

a stąd po scałkowaniu

$$L\left(\log\frac{F(z)-F(\zeta)}{F(z)+F(\zeta)}\,\frac{z+\zeta}{z-\zeta}\right) + \overline{L\left(\log\frac{1-\overline{F(\zeta)}F(z)}{1+\overline{F(\zeta)}F(z)}\right)} = -\overline{L\left(\log\frac{1-\bar{\zeta}z}{1+\bar{\zeta}z}\right)}.$$

Obkładając obie strony funkcjonałem L, otrzymujemy

$$L^2\left(\log\frac{F(z)-F(\zeta)}{F(z)+F(\zeta)}\,\frac{z+\zeta}{z-\zeta}\right) + |L|^2\left(\log\frac{1-\overline{F(\zeta)}F(z)}{1+\overline{F(\zeta)}F(z)}\right) = -|L|^2\left(\log\frac{1-\bar{\zeta}z}{1+\bar{\zeta}z}\right).$$

Przypadek, gdy funkcjonał (16) przyjmuje swoją wartość największą w zbiorze E_2, rozpatrzony jest w [1].

Powyższe wyniki możemy zapisać w następujących twierdzeniach:

Twierdzenie 3

Jeżeli F jest funkcją ekstremalną ze względu na funkcjonał (15), to spełnia ona następujące równanie:

$$L\left(\log\frac{F(z)-F(\zeta)}{F(z)+F(\zeta)}\,\frac{z+\zeta}{z-\zeta}\right) + \overline{L\left(\log\frac{1-\overline{F(\zeta)}F(z)}{1+\overline{F(\zeta)}F(z)}\right)} = -\overline{L\left(\log\frac{1-\bar{\zeta}z}{1+\bar{\zeta}z}\right)},$$

a wartość funkcjonału (15) dla tej funkcji wynosi

$$\Phi(F) = -|L|^2\left(\log\frac{1-\bar{\zeta}z}{1+\bar{\zeta}z}\right).$$

Twierdzenie 4

Dla dowolnej funkcji $F \in S_1^{(2)}$ zachodzi następująca nierówność:

$$\operatorname{Re}\left\{L^2\left(\log\frac{F(z)-F(\zeta)}{F(z)+F(\zeta)}\,\frac{z+\zeta}{z-\zeta}\right) + |L|^2\left(\log\frac{1-\overline{F(\zeta)}F(z)}{1+\overline{F(\zeta)}F(z)}\right)\right\} \leqslant -|L|^2\left(\log\frac{1-\bar{\zeta}z}{1+\bar{\zeta}z}\right). \tag{18}$$

Stosując teraz powyższe twierdzenia oszacujemy pewne funkcjonały w rodzinie $S_1^{(2)}$.

1. Niech $L(H) = \sum_{m=1}^{N}\lambda_m(H(z_m) - H(0))$, gdzie $H \in H(U)$, λ_m są dowolnymi liczbami zespolonymi, z_m - dowolnymi punktami koła U, $m = 1,\dots,N$. Zachodzi $L(1) = 0$. Z twierdzenia 4 wynika, że dla dowolnej funkcji $F \in S_1^{(2)}$ zachodzi nierówność

$$\operatorname{Re}\left\{\sum_{m,n=1}^{N}\left(\lambda_m\lambda_n\log\frac{F(z_m)-F(z_n)}{F(z_m)+F(z_n)}\,\frac{z_m+z_n}{z_m-z_n} + \bar{\lambda}_m\lambda_n\log\frac{1-F(z_n)\overline{F(z_m)}}{1+F(z_n)\overline{F(z_m)}}\right)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant -\sum_{m,n=1}^{N}\bar{\lambda}_m\lambda_n\log\frac{1-z_n\bar{z}_m}{1+z_n\bar{z}_m}. \tag{19}$$ 0 $\bar{\lambda}$

W przypadku gdy $m = n$, jako wartość ilorazu $\frac{F(z_m)-F(z_n)}{z_m-z_n}$ przyjmujemy $F'(z_m)$. Funkcja, która realizuje maksimum funkcjonału (15) spełnia równanie

$$\sum_{m=1}^{N}\left(\lambda_m\log\frac{F(z_m)-F(\zeta)}{F(z_m)+F(\zeta)}\,\frac{z_m+\zeta}{z_m-\zeta} + \bar{\lambda}_m\log\frac{1-F(\zeta)\overline{F(z_m)}}{1+F(\zeta)\overline{F(z_m)}}\right) = -\sum_{m=1}^{N}\bar{\lambda}_m\log\frac{1-\zeta\bar{z}_m}{1+\zeta\bar{z}_m}.$$

W szczególności, kładąc w nierówności (19) $N = 1$, $z_1 = z$, $\lambda_1 = 1$, otrzymujemy

$$\left|\frac{zF'(z)}{F(z)}\right|\frac{1-|F(z)|^2}{1+|F(z)|^2} \leqslant \frac{1+|z|^2}{1-|z|^2}.$$

Funkcja ekstremalna spełnia wtedy następujący związek:

$$\frac{(F(z)-F(\zeta))(z+\zeta)(1-F(\zeta)\overline{F(z)})}{(F(z)+F(\zeta))(z-\zeta)(1+F(\zeta)\overline{F(z)})} = \frac{1+\zeta\bar{z}}{1-\zeta\bar{z}}.$$

2. Połóżmy teraz $L(H) = \sum_{m=1}^{N} \lambda_m H'(z_m)$, gdzie $H \in H(U)$, λ_m są dowolnymi liczbami zespolonymi, z_m – dowolnymi punktami koła U, $m = 1,\dots,N$. Nierówność (18) dla wyżej zdefiniowanego funkcjonału przyjmuje postać

$$\mathrm{Re}\left\{\sum_{m,n=1}^{N}\left(\lambda_m\lambda_n\left(\frac{F'(z_m)F'(z_n)(F^2(z_m)+F^2(z_n))}{(F^2(z_m)-F^2(z_n))^2} - \frac{z_m^2+z_n^2}{(z_m^2-z_n^2)^2}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \bar\lambda_m\lambda_n\,\frac{\overline{F'(z_m)}F'(z_n)(\overline{F^2(z_m)}F^2(z_n)+1)}{(1-\overline{F^2(z_m)}F^2(z_n))^2}\right)\right\} \leqslant \sum_{m,n=1}^{N}\bar\lambda_m\lambda_n\,\frac{1-z_n^2\bar z_m^2}{(1-z_n^2\bar z_m^2)^2}. \tag{20}$$

W przypadku gdy $z_m = z_n$ bądź $z_m = -z_n$, przyjmujemy

$$\frac{F'(z_m)F'(z_n)(F^2(z_m)+F^2(z_n))}{(F^2(z_m)-F^2(z_n))^2} - \frac{z_m^2+z_n^2}{(z_m^2-z_n^2)^2} =$$

$$\lim_{z\to\pm z_m}\left(\frac{F'(z_m)F'(z)(F^2(z_m)+F^2(z))}{(F^2(z_m)-F^2(z))^2} - \frac{z_m^2+z^2}{(z_m^2-z^2)^2}\right) = \frac{1}{8}\left(\left(\frac{F'(z_m)}{F(z_m)}\right)^2 - \frac{1}{z_m^2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{12}\,\frac{F'''(z_m)}{F'(z_m)} - \frac{1}{8}\left(\frac{F''(z_m)}{F'(z_m)}\right)^2 = \frac{1}{8}\left(\left(\frac{F'(z_m)}{F(z_m)}\right)^2 - \frac{1}{z_m^2}\right) + \frac{1}{12}\left\{F(z_m),z_m\right\},$$

gdzie $\left\{F(z),z\right\}$ oznacza operator Schwarza w punkcie z.

Funkcja ekstremalna spełnia równanie

$$\sum_{m=1}^{N}\left(\lambda_m\left(\frac{F'(z_m)F(\zeta)}{F^2(z_m)-F^2(\zeta)} - \frac{\zeta}{z_m^2-\zeta^2}\right) - \bar\lambda_m\left(\frac{\overline{F'(z_m)}F(\zeta)}{1-\overline{F^2(z_m)}F^2(\zeta)} + \frac{\zeta}{1-\bar z_m^2\zeta^2}\right)\right) = 0.$$

W szczególnym przypadku, przyjmując w nierówności (20) $N = 1$, $z_1 = z$, $\lambda_1 = \lambda$, otrzymujemy

$$\mathrm{Re}\left\{\lambda^2\left(\frac{1}{12}\left\{F(z),z\right\} + \frac{1}{8}\left(\left(\frac{F'(z)}{F(z)}\right)^2 - \frac{1}{z^2}\right)\right)\right\} \leqslant |\lambda|^2\left(\frac{|F'(z)|^2(|F(z)|^4+1)}{(|F(z)|^4-1)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{|z|^4+1}{(|z|^4-1)^2}\right).$$

3. Niech $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem liczb zespolonych takim, że $\limsup_{n\to\infty}|\lambda_n|^{1/n} < 1$. Na mocy twierdzenia Töplitza istnieje funkcjonał $L\in H'(U)$ taki, że $L(z^n) = \lambda_n$ dla $n = 1,2,\ldots$ oraz $L(1) = 0$. Przyjmując oznaczenia

$$\log\frac{F(z)-F(\zeta)}{F(z)+F(\zeta)}\,\frac{z+\zeta}{z-\zeta} = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}(F)z^m\zeta^n,$$

$$\log\frac{1-F(z)\overline{F(\zeta)}}{1+F(z)\overline{F(\zeta)}} = \sum_{m,n=1}^{\infty} \overline{b}_{mn}(F,\overline{F})z^m\overline{\zeta}^n$$

oraz korzystając z twierdzenia 4 otrzymujemy, dla dowolnej funkcji $F\in S_1^{(2)}$, następującą nierówność:

$$\operatorname{Re}\left\{\sum_{m,n=1}^{\infty}\left(a_{mn}(F)\lambda_m\lambda_n + b_{mn}(F,\overline{F})\overline{\lambda}_m\lambda_n\right)\right\} \le 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\lambda_{2n-1}|^2}{2n-1}.$$

Dla funkcji realizującej maksimum funkcjonału zachodzą związki

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{mo}(F)\lambda_m = 0$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_{mn}(F)\lambda_m + b_{mn}(F,\overline{F})\overline{\lambda}_m\right) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } n=2k,\ k = 1,2,\ldots \\ \dfrac{2\overline{\lambda}_n}{n} & \text{gdy } n=2k-1,\ k = 1,2,\ldots \end{cases}$$

LITERATURA

[1] Macura J.: Nierówności Grunsky'ego dla funkcji jednolistnych i nieparzystych. (Praca oddana do druku w Zeszytach Naukowych Politechniki Śląskiej).

[2] Miśta K.: Wzory wariacyjne w pewnej podklasie funkcji jednolistnych i ich zastosowanie. (Praca oddana do druku w Zeszytach Naukowych Politechniki Śląskiej).

Recenzent: doc. dr hab. Janina Śladkowska-Zahorska

Wpłynęło, 29.XI.1983 r.

НЕРАВЕНСТВА ГРУНСКОГО – НЕХОРАЕГО ДЛЯ ОДНОЛИСТНЫХ НЕЧЁТНЫХ И ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Р е з ю м е

В работе рассматриваются однолистные нечётные и ограниченные функции. При помощи вариационных формул доказываются неравенства Грунского-Нехораего для класса функций.

GRUNSKY-NEHARI INEQUALITIES FOR THE CLASS OF UNIVALENT, ODD AND BOUNDED FUNCTIONS

S u m m a r y

The class of univalent, odd and bounded functions is considered. Grunsky-Nehari inequalities for this class are derived using variational formulas.