ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 43 Nr kol. 795

Lucjan MERES

O PEWNYCH OSOBLIWYCH PRINGSHEIMA-DU BOIS REYMONDA FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH

Streszczenie. W pracy udowodniono, że warunki (I) i (II) znalezione przez Z. Zahorskiego, które w pełni charakteryzują zbiory osobliwości Pringsheima i Cauchy'ego dla funkcji jednej zmiennej, są w klasie funkcji wielu zmiennych, nie mających osobliwości Cauchy'ego wystarczające. Konieczność tych warunków jest dowiedziona [3]. Metoda konstrukcji potrzebnej funkcji, oparta na rezultacach pracy [6], nie korzysta z wyniku Zahorskiego (dla osi liczbowej), obejmuje analogiczny wynik Zahorskiego i ma szansę być wykorzystana do konstrukcji ogólnej, tj. do dowodu wystarczalności warunków (I) i (II), gdy oba zbiory P i C są niepuste. Ponadto w pracy pokazano, że domkniętość obu zbiorów P i C leżących w E^m, ich rozłączność i nigdzie gęstość zbioru C wystarcza do tego, by istniała funkcja $H(x_1,\dots,x_m)$ klasy C w E^m mająca w P osobliwości Pringsheima, w C osobliwości Cauchy'ego i taka, że punkty leżące poza sumą $P \cup C$ są dla niej regularne.

WSTĘP

Niech E^m będzie przestrzenią Euklidesa m wymiarową. $F(x)$, gdzie $x = (x_1,x_2,\dots,x_m)$ niech będzie funkcją m zmiennych rzeczywistych klasy C^∞ w E^m. Dla funkcji $F(x)$ można w każdym punkcie $x \in E^m$ napisać jej szereg Taylora

$$T_F(x_1,\dots,x_m,h_1,\dots,h_m) =$$

$$= F(x_1,\dots,x_m) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\sum \frac{n!}{t_1!t_2!\dots t_m!} \frac{\partial^n F(x_1,\dots,x_m)}{\partial x_1^{t_1}\dots\partial x_m^{t_m}} h_1^{t_1}\dots h_m^{t_m}, \quad (*)$$

gdzie sumowanie w drugiej sumie rozciąga się na wszystkie możliwe układy nieujemnych liczb całkowitych $t_1,t_2,\dots,t_m$, spełniających warunek $t_1 + t_2 + \dots + t_m = n$. Jeżeli x jest ustalonym punktem przestrzeni E^m, to możliwe są następujące trzy przypadki:

A. Istnieje liczba $R(x) > 0$ taka, że dla $|h_i| < R(x)$, $i = 1,2,\dots,m$, szereg (*) jest bezwzględnie zbieżny i istnieje liczba $\delta(x) \in (0,R(x)>$ taka, że $T_F(x_1,\dots,x_m,h_1,\dots,h_m) = F(x_1+h_1,\dots,x_m+h_m)$ dla $|h_i| < \delta(x)$, $i = 1,\dots,m$. W tym przypadku punkt x nazywamy punktem regularnym dla funkcji $F(x)$.

B. Istnieje liczba $R(x) > 0$ taka, że dla $|h_i| < R(x)$, $i = 1,\dots,m$, szereg (*) jest bezwzględnie zbieżny ale nie istnieje liczba $\delta(x)$, o której mowa w punkcie A, to znaczy w każdej kuli otwartej, o środku w punkcie x, hnajdzie się punkt $(x_1+h'_1,\dots,x_m+h'_m)$ taki, że

$$T_F(x_1,\dots,x_m,h'_1,\dots,h'_m) \neq F(x_1+h'_1,\dots,x_m+h'_m).$$

W tym przypadku punkt x nazywa się punktem osobliwym (C) Cauchy'ego.

C. Nie istnieje liczba $R(x)$, o której mowa w punktach A i B. W tym przypadku punkt x nazywa się punktem osobliwym (P) Pringsheima - Du Bois Reymonda.

Wiadomo [1], że na to, by punkt x był dla funkcji $F(x)$ osobliwy w sensie (P) potrzeba i wystarcza, by

$$\lambda(x) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}\sum \frac{n!}{t_1!t_2!\dots t_m!}\,\frac{\partial^n F(x_1,\dots,x_m)}{\partial x_1^{t_1}\dots\partial x_m^{t_m}}} = +\infty, \qquad (**)$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie układy nieujemnych liczb całkowitych $t_1,\dots,t_m$, których suma równa jest n.

Z. Zahorski udowodnił [2], że na to, by zbiór $P\subset E^1$ był dla funkcji klasy C^∞ jednej zmiennej zbiorem wszystkich jej punktów osobliwych (P), a zbiór $C\subset E^1$, zbiorem wszystkich jej punktów osobliwych (C), potrzeba i wystarcza, by

(I) P był klasy G, C był klasy F_σ pierwszej kategorii,
(II) $P\cup C = \overline{P\cup C}$, $P\cap C = \Phi$.

Dowód jest długi i trudny, a ponadto nie da się przenieść na przypadek wielowymiarowy. Powody, dla których tak jest są opisane w [5]. Wiadomo [3], że warunki (I) i (II) są konieczne również dla funkcji klasy C^∞ wielu zmiennych, a w przypadku gdy P jest zbiorem pustym również wystarczające. W pracach [4] i [5] L. Meres udowodnił, że warunki (I) i (II) są, w przypadku $m = 2$, wystarczające gdy C jest zbiorem pustym. Pełna charakteryzacja pary zbiorów P i C nie jest dotąd znana, nawet dla $m = 2$, to znaczy nie wiemy, czy warunki (I) i (II) są dla $m \geqslant 2$ wystarczające (gdy oba zbiory P i C są niepuste).

W tej pracy udowodnimy, że dla każdego zbioru domkniętego $P\subset E^m$ istnieje funkcja $F(x_1,\dots,x_m)$ klasy C^∞ w E^m, dla której każdy punkt $(x_1,\dots,x_m)$ P jest osobliwy (P), a każdy punkt $(x_1,\dots,x_m)\in E^m-P$ jest dla tej funkcji regularny, to znaczy, że warunki (I) i (II) są wystarczające w E^m, gdy C jest zbiorem pustym. Inaczej mówiąc, domkniętość w E^m stanowi pełną charakteryzację zbioru osobliwości typu (P) w klasie funkcji nie mających osobliwości typu Cauchy'ego. Metoda konstrukcji potrzebnej funkcji jest uogólnieniem metody opisanej w [4] i [5]. Analogiczny wynik Zahorskiego (na osi liczbowej) otrzymuje się z tej metody jako przypadek szczególny, ponadto ma ona szansę być wykorzystana do konstrukcji ogólnej (gdy oba zbiory P i C są niepuste).

1. Niech dany będzie niepusty zbiór domknięty $P \subset E^m$. Niech

$$K_1, K_2, \dots, K_n, \dots \tag{1}$$

będzie zdefiniowany w pracy [6] ciągiem kostek domkniętych, o równoległych do osi współrzędnych krawędziach długości $2l_n < 1$, ($2l_n \to 0$, gdy $n \to \infty$). Każdy punkt zbioru P należy do nieskończenie wielu K_n. Punkt $(a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})$ niech będzie środkiem kostki K_n. Weźmy pod uwagę dowolny ciąg $\{M_n\}$ liczb rzeczywistych $M_n \geq 1$ i połóżmy

$$\begin{aligned} r_n &= 20^n, \quad C_n = (M_n^m / l_n^m) \cdot 10^{2n+1}, \\ B_n &= (M_n^{m/2} / l_n^{m/2}) \cdot 10^n, \quad L_n = l_n + l_n^{m/2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Rozważmy następnie, zdefiniowany w [6] ciąg funkcji

$$f_n(x_1, \dots, x_m) = (M_n^m / C_n^{4mr_n}) \prod_{j=1}^{m} (U(x_j - a_{jn}, B_n, L_n) \cos C_n (x_j - a_{jn})) \tag{3}$$

i zbudujmy rodzinę funkcji

$$F(x_1, \dots, x_m) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_1, \dots, x_m).$$

Funkcja $U(\cdot)$ jest tą samą funkcją, której własności przedyskutowano w [6], ($h_n = l_n^{m/2} \leq l_n$).

Oznaczmy jeszcze

$$a = 1 - (2e^{-100}/100\sqrt{\pi}), \quad b = 2e^{-20}/\sqrt{10\pi}.$$

<u>Lemat 1</u>

Jeżeli

1. $k \geq 2$,
2. $p_j \in \{0, 1\}$, $j = 1, 2, \dots, m$,
3. $\left| \cos^{(p_j)} C_k (x_j - a_{jk}) \right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, $j = 1, 2, \dots, m$,

to w każdym punkcie $x = (x_1,\dots,x_m) \in K_k$ spełnione są nierówności

$$\left| \frac{\partial^{4mr_k+p_1+p_2+\dots+p_m} f_k(x_1,\dots,x_m)}{\partial x_1^{4r_k+p_1}\,\partial x_2^{4r_k+p_2}\dots\partial x_m^{4r_k+p_m}} \right| >$$

$$> M_k^m . C_k^{p_1+p_2+\dots+p_n} . \prod_{j=1}^{m} \left(\left|\cos^{(p_j)} C_k(x_j-a_{jk})\right| a - b \right), \tag{5}$$

gdzie

$$\cos^{(p_j)} C_k(x_j-a_{jk}) = \begin{cases} \cos C_k(x_j-a_{jk}) & \text{dla} \quad p_j = 0 \\ -\sin C_k(x_j-a_{jk}) & \text{dla} \quad p_j = 1. \end{cases}$$

(Nierówności typu (5) jest 2^m - tyle bowiem jest możliwych układów $p_1,\dots,p_m$, m liczb, z których każda może przyjmować wartość 0 lub 1).

Dowód:

Zauważmy najpierw, że dla każdego naturalnego $k \geqslant 2$ jest

$$(2 + \frac{1}{20^k})\ln(4.20^k+1) + 4\ln 1,3 + 1 < 5^k,$$

co łatwo sprawdzić metodą indukcji. Mnożąc tę nierówność obustronnie przez 20^k, otrzymamy

(*) $\quad (2.20^k+1)\ln(4.20^k+1) + 4.20^k.\ln 1,3-10^{2k} < -20^k, \quad$ dla $\quad k \geqslant 2.$

Jeżeli $x = (x_1,\dots,x_m) \in K_k$, to dla każdego $j \in \{1,2,\dots,m\}$ mamy

$$-l_k \leqslant x_j-a_{jk} \leqslant l_k,$$

czyli

$$(x_j-a_{jk}) \in \langle -l_k, l_k \rangle = \langle -L_k+h_k, L_k-h_k \rangle, \quad (L_k=l_k+h_k=l_k+l_k^{m/2}),$$

$$j = 1,2,\dots,m.$$

Wobec tego, zgodnie z nierównością (9), [6], jest

$$U(x_j-a_{jk},B_k,L_k) \geqslant 1 - (2/\sqrt{\pi}B_k h_k)\exp(-B_k^2 h_k^2) =$$

$$= 1 - (2/M_k^{m/2}\sqrt{\pi}.10^k)\exp(-M_k^m.10^{2k}) \geqslant 1 - (2/\sqrt{\pi}.10^2)\exp(-10^{2.1}.1) = a,$$

$$(M_k \geqslant 1).$$

A więc

(b) $\quad U(x_j-a_{jk},B_k,L_k) \geqslant a, \quad j = 1,\ldots,m.$

Z tego, że $x \in K_k$ wynika, że spełnione są nierówności

(c) $\quad |x_j-a_{jk} \pm L_k| \geqslant l_k^{m/2}, \quad j = 1,\ldots,m.$

Nierówności (c) łatwo uzasadnia się nie wprost. Gdyby mianowicie dla któregoś j nierówność (c) była fałszywa, to mielibyśmy

$$-l_k^{m/2} < x_j-a_{jk} + L_k < l_k^{m/2} \quad \text{lub} \quad -l_k^{m/2} < x_j-a_{jk}-L_k < l_k^{m/2}.$$

W pierwszym przypadku $x_j-a_{jk} < -L_k + l_k^{m/2} = -l_k$, czyli $x \notin K_k$, wbrew założeniu. W drugim przypadku jest $x_j-a_{jk} > L_k - l_k^{m/2} = l_k$, czyli $x \notin K_k$ - wbrew założeniu.

Ze wzoru (13), [6], w którym $t_j = 4r_k + p_j$, otrzymujemy

$$\frac{\partial^{4mr_k+p_1+p_2+\ldots+p_m} f_k(x_1,\ldots,x_m)}{\partial x_1^{4r_k+p_1}\partial x_2^{4r_k+p_2}\ldots\partial x_m^{4r_k+pm}} =$$

$$= M_k^m \prod_{j=1}^{m}(C_k^{p_j}\cos^{(4r_k+p_j)}C_k(x_j-a_{jk}) \,.\, U(x_j-a_{jk},B_k,L_k) + E_{j,4r_k+p_j}) =$$

$$= M_k^m \prod_{j=1}^{m}(C_k^{p_j}\cos^{(p_j)}C_k(x_j-a_{jk}) \,.\, U(x_j-a_{jk},B_k,L_k) + E_{j,4r_k+p_j}).$$

Przypominamy, że $p_j = 0$ lub 1, czyli $E_{j,4r_k+p_j} = E_{j,4r_k}$ lub $E_{j,4r_k+1}$. Zgodnie z nierównościami (13a), [6], dla $t_j = 4r_k+1$, jest

(d) $$\left|E_{j,4r_k+1}\right| \leqslant (B_k(4r_k+1)!/\sqrt{\pi}(2r_k)!C_k^{4r_k}) \, .$$
$$.\,((C_k+B_k+2B_k^2|x_j-a_{jk}+L_k|)^{4r_k}.\exp(-B_k^2(x_j-a_{jk}+L_k)^2) +$$
$$+ (C_k+B_k+2B_k^2|x_j-a_{jk}-L_k|)^{4r_k}.\exp(-B_k^2(x_j-a_{jk}-L_k)^2)) =$$

$$= \frac{B_k(4r_k+1)!}{(2r_k)!}((1 + \frac{B_k}{C_k} + 2\frac{B_k^2}{C_k}|x_j-a_{jk}+L_k|)^{4r_k}.\exp(-B_k^2(x_j-a_{jk}+L_k)^2) +$$

$$+ (1 + \frac{B_k}{C_k} + 2\frac{B_k^2}{C_k}|x_j-a_{jk}-L_k|)^{4r_k}.\exp(-B_k^2(x_j-a_{jk}-L_k)^2)) \quad \overset{\text{ozn.}}{=} \quad \bar{E}_{j,4r_k+1}.$$

Z tej samej nierówności (13a), [6], dla $t_j = 4r_k$, dostaje się

$$\left|E_{j,4r_k}\right| \leqslant (B_k(4r_k)!/\sqrt{\pi}\left[\frac{4r_k-1}{2}\right]!C_k).((1 + \frac{B_k}{C_k} + 2\frac{B_k^2}{C_k}|x_j-a_{jk}+L_k|)^{4r_k-1} .$$

$$.\exp(-B_k^2(x_j-a_{jk}+L_k)^2) + (1+\frac{B_k}{C_k} + 2\frac{B_k^2}{C_k}|x_j-a_{jk}-L_k|)^{4r_k-1}.\exp(-B_k^2(x_j-a_{jk}-L_k)^2))$$

$$\overset{\text{ozn.}}{=} \bar{E}_{j,4r_k}.$$

Ponieważ $\frac{n!}{\left[\frac{n-1}{2}\right]!}$ rośnie ze wzrostem n,

$$(1 + \frac{B_k}{C_k} + 2\frac{B_k^2}{C_k}|x_j-a_{jk}\pm L_k|)^{4r_k-1} < (1 + \frac{B_k}{C_k} + 2\frac{B_k^2}{C_k}|x_j-a_{jk}\pm L_k|)^{4r_k},$$

więc widoczne jest, że

(e) $$\bar{E}_{j,4r_k} < \frac{1}{C_k} \cdot \bar{E}_{j,4r_k+1}.$$

Oszacujemy teraz od góry wyrażenia $\left|E_{j,4r_k+1}\right|$ i $\left|E_{j,4r_k}\right|$.

Oczywiście, wobec (d) i (e), wystarczy oszacować od góry wyrażenie

$$\bar{E}_{j,4r_k+1}.$$

Oznaczmy: $p = 1 + \frac{B_k}{C_k}$, $q = 2\frac{B_k^2}{C_k}$, $c = 4r_k$, $d = B_k^2$ i rozważmy funkcję dodatnią

$$g(t) = (p+qt)^c.\exp(-dt^2), \qquad t \geqslant 0.$$

Funkcja $g(t)$ ma maksimum absolutne dla

$$t = t_o = \frac{-2pd + 2\sqrt{p^2d^2 + 2q^2cd}}{4qd} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{q} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{p^2}{q^2} + 2\frac{c}{d}} \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{q} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p^2}{q^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{2\frac{c}{d}} = \frac{1}{2}\sqrt{2\frac{4r_k}{B_k^2}} = \frac{1}{2B_k}\sqrt{2.4.10^k} < \frac{10^k}{B_k} =$$

$$= \frac{l_k^{m/2}}{M_k^{m/2}} \leqslant l_k^{m/2}, \qquad (\text{bo } M_k \geqslant 1).$$

Funkcja $g(t)$ maleje dla $t > t_o$, więc dla $t \geqslant l_k^{m/2}$ jest $g(t) \leqslant g(l_k^{m/2})$. Dzięki temu i nierównościom (c), możemy napisać, że

$$\left(1 + \frac{B_k}{C_k} + 2\frac{B_k^2}{C_k}|x_j - a_{jk} \pm L_k|\right)^{4r_k}.\exp(-B_k^2(x_j - a_{jk} \pm L_k)^2) \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 + \frac{B_k}{C_k} + 2\frac{B_k^2}{C_k} l_k^{m/2}\right)^{4r_k}.\exp(-B_k^2(l_k^{m/2})^2) =$$

$$= \left(1 + \frac{l_k^{m/2}}{M_k^{m/2}.10^{k+1}} + \frac{2l_k^{m/2}}{10}\right)^{4.20^k}.\exp(-M_k^m.10^{2k}) <$$

$$< \left(1 + \frac{1}{10^2} + 2.10^{-1}\right)^{4.20^k}.\exp(-10^{2k}) < (1,3)^{4.20^k}.e^{-10^{2k}},$$

$$(M_k \geqslant 1,\ l_k < 1).$$

Z tego oszacowania i nierówności (a) wynika, że

$$E_{j,4r_k+1} < \frac{2B_k(4r_k+1)!}{\sqrt{\pi}(2r_k)!}(1,3)^{4.20^k}.e^{-10^{2k}} =$$

$$= \frac{2C_k^{1/2}(4.20^k+1)!}{\sqrt{10\pi}(2.20^k)!}(1,3)^{4.20^k}.e^{-10^{2k}} <$$

$$\frac{2}{\sqrt{10\pi}}\,C_k(2.20^k+1)(2.20^k+2)\dots(4.20^k+1)(1,3)^{4.20^k}.e^{-10^{2k}}$$

$$< \frac{2C_k}{\sqrt{10\pi}}\,(4.20^k+1)^{2.20^k+1}(1,3)^{4.20^k}.e^{-10^{2k}} =$$

$$= \frac{2C_k}{\sqrt{10\pi}}\,e^{(2.20^k+1)\ln(4.20^k+1)\,+\,4.20^k\ln 1,3\,-\,10^{2k}} < \frac{2C_k}{\sqrt{10\pi}}\,e^{-20^k} <$$

$$< (2e^{-20}/\sqrt{10\pi})C_k = C_k.b.$$

A więc

$$\left|E_{j,4r_k+1}\right| < C_k.b \quad \text{i, wobec (e),} \quad \left|E_{j,4r_k}\right| < b.$$

W rezultacie

$$\text{(f)} \qquad \left|E_{j,4r_k+p_j}\right| < b.C_k^{p_j}, \quad (p_j = 0 \ \text{ lub } \ 1), \quad j = 1,2,\dots,m.$$

Ponieważ $|ab+c| \geq |a||b| - c$, więc dzięki (*), nierównościom (b) i (f), założeniu 3, możemy, po uwzględnieniu wielkości liczb a i b, napisać

$$\left|\frac{\partial^{4mr_k+p_1+p_2+\dots+p_m} f_k(x_1,\dots,x_m)}{\partial x_1^{4r_k+p_1}\partial x_2^{4r_k+p_2}\dots\partial x_m^{4r_k+p_m}}\right| \geq$$

$$\geq M_k^m\sum_{j=1}^{m}\left(C_k^{p_j}\left|\cos^{(p_j)}C_k(x_j-a_{jk})\right|U(x_j-a_{jk},B_k,L_k) - \left|E_{j,4r_k+p_j}\right|\right) >$$

$$\geq M_k^m\prod_{j=1}^{m}\left(C_k^{p_j}\left|\cos^{(p_j)}C_k(x_j-a_{jk})\right|.a - b.C_k^{p_j}\right) =$$

$$= M_k^m\prod_{j=1}^{m}C_k^{p_j}\prod_{j=1}^{m}\left(\left|\cos^{(p_j)}C_k(x_j-a_{jk})\right|.a - b\right) =$$

$$= M_k^m.C_k^{p_1+p_2+\dots+p_m}\prod_{j=1}^{m}\left(\left|\cos^{(p_j)}C_k(x_j-a_{jk})\right|.a - b\right)$$

c.b.d.u.

Lemat 2

Dla każdego ciągu $\{A_n\}$, liczb rzeczywistych $A_n \geq 1$, istnieje ciąg $\{M_n\}$, liczb rzeczywistych $M_n \geq 1$ taki, że w każdym punkcie $x = (x_1,\dots,x_m) \in K_n$, funkcja $F(x_1,\dots,x_m)$ określona wzorami (3) - (4), spełnia dla $n \geq 2$ przynajmniej jedną z 2^m następujących nierówności

$$\left|\frac{\partial^{4mr_n+p_1+p_2+\dots+p_m}F(x_1,\dots,x_m)}{\partial x_1^{4r_n+p_1}\partial x_2^{4r_n+p_2}\dots\partial x_m^{4r_n+p_m}}\right| > A_n, \quad p_j \in \{0,\ 1\}, \quad j = 1,2,\dots,m. \tag{6}$$

Dowód:

Połóżmy $M_1 = 1$. Załóżmy indukcyjnie, że mamy już określone liczby

$$M_1, M_2, \dots, M_{k-1},$$

wszystkie ≥ 1. Wtedy, zgodnie z oznaczeniami (2), znane są liczby

$$C_1, C_2, \dots, C_{k-1}$$

i

$$B_1, B_2, \dots, B_{k-1},$$

a tym samym znane są funkcje całkowite

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_{k-1}(x) \tag{*}$$

szeregu (4), ($L_s = l_s + l_s^{m/2}$, $r_s = 20^s$, $s = 1,2,\dots,k-1$).

Pokażemy, że wtedy można wskazać wyraz następny $M_k \geq 1$, szukanego ciągu $\{M_n\}$. Ponieważ wszystkie funkcje (*) są klasy C^∞ i kostka K_k jest domknięta, więc istnieje i jest skończona każda z 2^m liczb postaci

$$J_{k,(p_1,p_2,\dots,p_m)} = \max_{x \in K_k}\left|\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\partial^{4mr_k+p_1+p_2+\dots+p_m}f_i(x_1,\dots,x_m)}{\partial x_1^{4r_k+p_1}\partial x_2^{4r_k+p_2}\dots\partial x_m^{4r_k+p_m}}\right|$$

gdzie $p_j \in \{0,\ 1\}$, $j = 1,2,\dots,m$.

Niech

$$J_k = \max_{(p_1,p_2,\dots,p_m)}\left\{J_{k,(p_1,p_2,\dots,p_m)}\right\}, \qquad H = \frac{1}{\left(\frac{a}{\sqrt{2}} - b\right)^m},$$

gdzie a i b są liczbami zdefiniowanymi przed lematem 1. Oczywiście, $H > 1$. Połóżmy

$$M_k = \sqrt[m]{(A_k + J_k + 1)H} > 1.$$

Zgodnie z twierdzeniem 1, [6], jest

$$\frac{\partial^{t_1+t_2+\dots+t_m}F(x_1,\dots,x_m)}{\partial x_1^{t_1}\partial x_2^{t_2}\dots\partial x_m^{t_m}} = \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\partial^{t_1+t_2+\dots+t_m}f_i(x_1,\dots,x_m)}{\partial x_1^{t_1}\partial x_2^{t_2}\dots\partial x_m^{t_m}} +$$

$$+ \frac{\partial^{t_1+t_2+\dots+t_m}f_k(x_1,\dots,x_m)}{\partial x_1^{t_1}\partial x_2^{t_2}\dots\partial x_m^{t_m}} + \sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{\partial^{t_1+t_2+\dots+t_m}f_i(x_1,\dots,x_m)}{\partial x_1^{t_1}\partial x_2^{t_2}\dots\partial x_m^{t_m}}. \tag{7}$$

Nie przeszkadza przy tym, że dokładnie określone (ustalone) są tylko funkcje $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$, zaś $f_s(x)$ dla $s > k$, zależą od wolnego parametru M_s, bo twierdzenie 1, [6] daje taki rozkład niezależnie od M_s, pod warunkiem, że $M_s \geqslant 1$, co i w czasie indukcyjnego ustalania liczb M_k ma miejsce. Z tego samego powodu, zgodnie z twierdzeniem 2, [6], w każdym punkcie $x \in E^m$ ostatni składnik (7) (po zamianie wskaźnika sumowania i na $k+j$) ma oszacowanie

$$\left|\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{\partial^{t_1+t_2+\dots+t_m}f_i(x_1,\dots,x_m)}{\partial x_1^{t_1}\partial x_2^{t_2}\dots\partial x_m^{t_m}}\right| < 1, \tag{8}$$

dla każdego układu liczb $t_j = 4r_k + p_j$, $p_j \in \{0, 1\}$, $j = 1,2,\dots,m$.

Ponieważ $|a+b+c| \geqslant |b| - |a| - |c|$, więc z (7) i (8) wynika nierówność

$$\left|\frac{\partial^{t_1+t_2+\dots+t_m}F(x_1,\dots,x_m)}{\partial x_1^{t_1}\partial x_2^{t_2}\dots\partial x_m^{t_m}}\right| \geqslant \left|\frac{\partial^{t_1+t_2+\dots+t_m}f_k(x_1,\dots,x_m)}{\partial x_1^{t_1}\partial x_2^{t_2}\dots\partial x_m^{t_m}}\right| - J_k - 1 \tag{9}$$

słuszna w całej przestrzeni E^m dla każdego układu liczb

$$t_j = 4r_k + p_j, \quad p_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1,2,\dots,m.$$

Zauważmy teraz, że: (w) dla każdego punktu $x = (x_1,\dots,x_m) \in E^m$, musi być spełniony przynajmniej jeden z następujących 2^m układów po m nierówności (niezależnie od tego, jakie wartości przyjmują parametry C_k i a_{lk}, $l = 1,2,\dots,m$):

$$(u_1)\left|\cos^{(p_{1,1})} C_k(x_1-a_{1k})\right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}},\dots,\left|\cos^{(p_{m,1})} C_k(x_m-a_{mk})\right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$(u_2)\left|\cos^{(p_{1,2})} C_k(x_1-a_{1k})\right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}},\dots,\left|\cos^{(p_{m,2})} C_k(x_m-a_{mk})\right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}},$$

....

$$(u_{2^m})\left|\cos^{(p_{1,2^m})} C_k(x_1-a_{1k})\right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}},\dots,\left|\cos^{(p_{m,2^m})} C_k(x_m-a_{mk})\right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}},$$

gdzie $p_{j,i} = 0$ lub 1, $j = 1,2,\dots,m$, $i = 1,2,\dots,2^m$.

Fakt ten można uzasadnić indukcyjnie względem wymiaru przestrzeni. Fakt ten jest oczywisty, gdy $m = 1$). Ponieważ

$$\cos^{(p_{m+1,l})} C_k(x_{m+1}-a_{m+1,k}) = \begin{cases} \cos C_k(x_{m+1}-a_{m+1,k}), & \text{gdy } p_{m+1,l} = 0 \\ -\sin C_k(x_{m+1}-a_{m+1,k}), & \text{gdy } p_{m+1,l} = 1, \end{cases}$$

$l = 1,2,\dots,2^{m+1}$ oraz $(-\sin C_k(x_{m+1}-a_{m+1,k}))^2+(\cos C_k(x_{m+1}-a_{m+1,k}))^2 = 1$,

więc

$$\left|-\sin C_k(x_{m+1}-a_{m+1,k})\right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{lub} \quad \left|\cos C_k(x_{m+1}-a_{m+1,k})\right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Gdy $x = (x_1,\dots,x_m,x_{m+1}) \in E^{m+1}$, to mamy 2^{m+1} interesujących nas układów postaci

$$(u_1)\left|\cos^{(p_{1,1})} C_k(x_1-a_{1k})\right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}},\dots,\left|\cos^{(p_{m,1})} C_k(x_m-a_{mk})\right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\left|\cos C_k(x_{m+1}-a_{m+1,k})\right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

....

$$(u'_{2^m})\left|\cos^{(p_{1,2^m})} C_k(x_1-a_{1k})\right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}},\dots,\left|\cos^{(p_{m,2^m})} C_k(x_m-a_{mk})\right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\left|\cos C_k(x_{m+1}-a_{m+1,k})\right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(u_1'')\ \left|\cos^{(p_{1,1})} C_k(x_1-a_{1k})\right| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}},\ldots,\left|\cos^{(p_{m,1})} C_k(x_m-a_{mk})\right| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\left|-\sin C_k(x_{m+1}-a_{m+1,k})\right| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$$

....

$$(u_{2^m}'')\ \left|\cos^{(p_{1,2^m})} C_k(x_1-a_{1k})\right| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}},\ldots,\left|\cos^{(p_{m,2^m})} C_k(x_m-a_{mk})\right| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\left|-\sin C_k(x_{m+1}-a_{m+1,k})\right| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Jeżeli spełniony jest układ (u_r), $1 \leqslant r \leqslant 2^m$, to spełniony jest też układ (u_r') lub (u_r''), to znaczy, z prawdziwości (w) w przestrzeni E^m, wynika prawdziwość (w) w przestrzeni E^{m+1}. Tak więc (w) ma miejsce w każdej przestrzeni E^m. Niech $x \in K_k$. Powiedzmy, że w punkcie x spełnione są nierówności (u_r), $1 \leqslant r \leqslant 2^m$, to znaczy jest

$$\left|\cos^{(p_{j,r})} C_k(x_j-a_{jk})\right| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}},\quad p_{j,r} \in \{0,\ 1\},\qquad j = 1,2,\ldots,m.$$

Oznaczając $p_{j,r} = p_j$ i kładąc $t_j = 4r_k+p_j$, $j = 1,\ldots,m$, dostajemy, dzięki nierównościom (5), oszacowanie następujące

$$\left|\frac{\partial^{4mr_k+p_1+p_2+\ldots+p_m} f_k(x_1,\ldots,x_m)}{\partial x_1^{4r_k+p_1}\partial x_2^{4r_k+p_2}\ldots\partial x_m^{4r_k+p_m}}\right| > M_k^m . C_k^{p_1+p_2+\ldots+p_m}\left(\frac{a}{\sqrt{2}} - b\right)^m =$$

$$= (A_k+J_k+1).H.C_k^{p_1+p_2+\ldots+p_m}.\frac{1}{H} \geqslant A_k+J_k+1,\ (\text{bo } C_k > 1,\ \ p_1+p_2+\ldots+p_m \geqslant 0).$$

W takim razie z nierówności (9) wynika, że

$$\left|\frac{\partial^{4mr_k+p_1+p_2+\ldots+p_m} F(x_1,\ldots,x_m)}{\partial x_1^{4r_k+p_1}\partial x_2^{4r_k+p_2}\ldots\partial x_m^{4r_k+p_m}}\right| > A_k + J_k + 1 - J_k - 1 = A_k.$$

W ten sposób zakończyliśmy dowód lematu.

Twierdzenie

Dla każdego zbioru domkniętego $P \subset E^m$, istnieje funkcja

$$F(x) = F(x_1,x_2,\ldots,x_m)$$

taka, że

(A) $F(x_1,\dots,x_m)$ jest klasy C^∞ w E^m.

(B) Każdy punkt $x = (x_1,\dots,x_m) \in E^m - P$ jest dla funkcji $F(x)$ regularny.

(C) Każdy punkt $x = (x_1,\dots,x_m) \in P$ jest dla funkcji $F(x)$ osobliwy w sensie Pringsheima-Du Bois Raymonda.

Dowód:

Jeżeli P jest zbiorem pustym, to funkcja $F(x_1,\dots,x_m) \equiv 0$ spełnia wymagane warunki. Załóżmy, że P jest niepusty. Weźmy pod uwagę odpowiadający zbiorowi P ciąg kostek (1). Niech $F(x_1,\dots,x_m)$ będzie funkcją określoną wzorami (3) - (4), gdzie parametry C_n, B_n, L_n dane są wzorami (2), $r_n = 20^n$. Ciąg $\{M_n\}$, $M_n \geqslant 1$, niech będzie dobrana zgodnie z lematem 2, w którym $A_n = n^n.n!$. Spełnione są wówczas założenia wszystkich, udowodnionych w [6] lematów i twierdzeń 1 i 3, z których wynikają (A) i (B). Jeżeli $x \in P$, to x należy do nieskończenie wielu kostek K_n ciągu (1), więc dla nieskończenie wielu n zachodzi, zgodnie z lematem 2, przynajmniej jedna z nierówności (6). Oznacza to, że istnieje podciąg

$$\left\{ \max_{\substack{0 \leqslant t_i \leqslant n_k \\ i=1,\dots,m}} \left| \frac{\partial^{n_k} F(x_1,\dots,x_m)}{\partial x_1^{t_1}\dots\partial x_m^{t_m}} \right|, \quad t_i \geqslant 0, \quad t_1+\dots+t_m = n_k \right\}$$

$(n_k = 4mr_k$ lub $4mr_k+1$ lub $4mr_k+2$ lub ... lub $4mr_k+m$, $r_k = 20^k$, $n_k \to +\infty)$ ciągu

$$\left\{ \max_{\substack{0 \leqslant t_i \leqslant n \\ i=1,\dots,m}} \left| \frac{\partial^{n} F(x_1,\dots,x_m)}{\partial x_1^{t_1}\dots\ x_m^{t_m}} \right|, \quad t_i \geqslant 0, \quad t_1+\dots+t_m = n \right\}$$

taki, że

$$\max_{\substack{0 \leqslant t_i \leqslant n_k \\ i=1,\dots,m}} \left| \frac{\partial^{n_k} F(x_1,\dots,x_m)}{\partial x_1^{t_1}\dots\partial x_m^{t_m}} \right| > A_{n_k} = (n_k)^{n_k} . (n_k)!.$$

W takim razie

$$\varrho(x) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}\sum \frac{n!}{t_1!\cdot t_2!\ldots t_m!}\left|\frac{\partial^n F(x_1,\ldots,x_m)}{\partial x_1^{t_1}\ldots\partial x_m^{t_m}}\right|} \geqslant$$

$$\geqslant \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}\cdot \max_{\substack{0\leqslant t_i\leqslant n\\ i=1,\ldots,m}}\left|\frac{\partial^n F(x_1,\ldots,x_m)}{\partial x_1^{t_1}\ldots\partial x_m^{t_m}}\right|} \geqslant$$

$$\geqslant \limsup_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{\frac{1}{(n_k)!}\cdot \max_{\substack{0\leqslant t_i\leqslant n_k\\ i=1,\ldots,m}}\left|\frac{\partial^{n_k} F(x_1,\ldots,x_m)}{\partial x_1^{t_1}\ldots\partial x_m^{t_m}}\right|} \geqslant$$

$$\geqslant \limsup_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{\frac{1}{(n_k)!}(n_k)^{n_k}\cdot(n_k)!} = \lim_{k\to\infty} n_k = +\infty,$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie układy $t_1,t_2,\ldots,t_m$ nieujemnych liczb całkowitych, dających w sumie n.
Tak więc x jest dla funkcji $F(x)$ osobliwy w sensie (P), co z uwagi na dowolność $x\in P$ daje warunek (C) i kończy dowód twierdzenia.

Wniosek

Dla każdych dwóch zbiorów P i C leżących w E^m takich, że

1° P jest domknięty, C jest domknięty nigdziegęsty,
2° $P\cap C = \Phi$

istnieje funkcja $H(x_1,\ldots,x_m)$ taka, że

1) $H(x)$, $x = (x_1,\ldots,x_m)$, jest klasy C^∞ w E^m.
2) Każdy punkt zbioru C jest dla $H(x)$ osobliwy (C).
3) Każdy punkt zbioru P jest dla $H(x)$ osobliwy (P).
4) Każdy punkt zbioru $E^m - (P\cup C)$ jest dla $H(x)$ regularny.

Dowód:

Niech $F(x)$ będzie funkcją klasy C^∞ w E^m, holomorficzną poza zbiorem P i mającą w każdym punkcie zbioru P osobliwość (P). Istnienie tej funkcji wynika z udowodnionego wyżej twierdzenia (holomorficzność wynika z tw. 3, [6]). $G(x)$ niech będzie funkcją klasy C^∞ w E^m, holomorficzną poza zbiorem C, różn(od zera w E^m-C, równą zeru w C, mającą w zbiorze C wszystkie pochodne cząstkowe równe zeru i mającą w każdym punkcie zbioru C osobliwość typu (C). Istnienie tej funkcji jest pokazane w [3]. Niech

$$T_F = T_F(x_1,\dots,x_m,h_1,\dots,h_m), \qquad T_G = T_G(x_1,\dots,x_m,h_1,\dots,h_m)$$

będą szeregami Taylora odpowiednio dla $F(x)$ i dla $G(x)$. Funkcja

$$H(x) \overset{def}{=} F(x) + G(x)$$

spełnia postawione w tezie wniosku warunki.

1) - oczywisty.

Jeżeli $x \in C$, to szereg Taylora dla H pokrywa się z szeregiem Taylora dla F. Ponadto z 2^o wynika, że $x \notin P$, więc x jest regularny dla F. Oznacza to, że istnieje otoczenie punktu x, w którym

$$T_F(x_1,\dots,x_m,h_1,\dots,h_m) = F(x_1+h_1,\dots,x_m+h_m),$$

czyli

$$T_H(x_1,\dots,x_m,h_1,\dots,h_m) = F(x_1+h_1,\dots,x_m+h_m) \neq F(x_1+h_1,\dots,x_m+h_m) +$$

$$+ G(x_1+h_1,\dots,x_m+h_m) = H(x_1+h_1,\dots,x_m+h_m),$$

bo w każdym otoczeniu punktu $x \in C$ leżą punkty $\notin C$ (bo C jest nigdziegęsty), a poza C funkcja G jest różna od zera. Istnieje więc otoczenie punktu $x \in C$, w którym szereg Taylora $T_H(x_1,\dots,x_m,h_1,\dots,h_m)$ dla funkcji H jest bezwzględnie zbieżny, ale nie do $H(x_1+h_1,\dots,x_m+h_m)$, co kończy dowód 2).

Niech $x \in P$. Pokażemy, że nie istnieje otoczenie punktu x, w którym szereg $T_H(x_1,\dots,x_m,h_1,\dots,h_m)$ byłby bezwzględnie zbieżny. Powiedzmy, że to nieprawda. Niech szereg T_H będzie zbieżny bezwzględnie w pewnym otoczeniu punktu x o promieniu $R_H > 0$. Ponieważ $x \notin C$, więc szereg T_G jest bezwzględnie zbieżny w pewnym otoczeniu punktu x o promieniu $R_G > 0$. W takim razie szereg Taylora

$$T_F = T_H - T_G$$

dla funkcji F jest zbieżny bezwzględnie co najmniej w otoczeniu punktu x o promieniu $R = \min(R_H,R_G) > 0$, a to przeczy temu, że punkt $x \in P$ jest dla funkcji F osobliwy w sensie (P). Sprzeczność kończy dowód 3).

Jeżeli $x \in E^m - (P \cup C)$, to $x \notin P$ i $x \notin C$, więc w punkcie x holomorficzne są obie funkcje F i G, a więc i ich suma $H(x)$. Kończy to dowód 4) i wniosku.

LITERATURA

[1] Leja F.: Teoria funkcji analitycznych. PWN, Warszawa (1957), B.M. t. 14, s. 526.

[2] Zahorski Z.: Sur l'ensemble des points singuliers d'une fonction d'une variable re'elle admettant les de'rive'es de toueles ordres, Fund. Meth. (1947), t. 34.

[3] Bartczak T.: O punktach osobliwych Cauchy'ego funkcji wielu zmiennych. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Łódzkiego, seria II, z. 52, Łódź 1973, s. 85.

[4] Meres L.: About certain family of functions of C class in E^2, Demonstratio Mathematica (przyjęta do druku), również L. Meres, Praca doktorska (Politechnika Śląska).

[5] Meres L.: On Pringsheim - Du Bois Reymond's singular points of the fonction of two variables, Demonstratio Math. (przyjęta do druku), również L. Meres, Praca doktorska (Politechnika Śląska).

[6] Meres L.: O pewnej rodzinie funkcji klasy C w przestrzeni Euklidesa E^m. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria Mat. Fiz.

Recenzent: prof. zw. doc. dr hab. Zygmunt Zahorski

Wpłynęło, 10.06.1982 r.

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННЫХ МНОГОПЕРЕМЕННЫХ ФУНКЦИЯХ ПРИНГШЕЙМА-ДИБУА РЕЙМОНДА

Р е з ю м е

В данной работе показано, что условия (I) и (II) найденные З. Загорским, которые в полне характеризуют множества особенностей Прингшема и Коши для одиопеременной функции, в классе функций многопеременных, не имеющих особенностей Коши, являются достаточными. Необходимость этих условий доказывается в [3]. Методика получения нужной функции, основанная на результатах работы [6], не использует указания Загорского (для числовой прямой) а использует аналогический результат Загорского и имеет много шансов быть использована для получения общей конструкции т.е. быть использованной для доказательства достаточности условий (I) и (II) в случае когда множества P и C непустые. Кроме этого в работе показано, что домкнутость обеих множеств P и C принадлежащих E^M, их непересекаемость и обладающих нигде плотностью множества C достаточны для того, чтобы существовала функция $H(x_1,\dots,x_M)$ класса C^∞ в E^M имеющая в P свойства Прингшема, в C свойства Коши и такая, что пункты лежащие вне $P \cup C$ являются для неё регулярные.

SOME SINGULAR PRINGSHEIM-DUBOIS-REYMOND FUNCTIONS OF MANY VARIABLES

S u m m a r y

Zahorski conditions I and II for singular Pringsheim's and Cauchy's sets for single variable functions are proved to be sufficient for multivariable functions without singularities. Necessity of these conditions has been proved in [3]. A method of construction of the needed function based on the results of [6] does not use the results of Zahorski and gives a chance of a general construction i.e. the prove of sufficiency of conditions I and II for nonempty P and C sets. Closiness of P and C in E^m, their separation and neverdensity of C is sufficient for the existence of a function $H(x_1,\ldots,x_m)$ from the class C^∞ in E^m with the Pringsheim's singularities in P, Cauchy'ssingularity in C and regular points outside $P \cup C$.