ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 43 Nr kol. 795

Tomasz JĘKOT

PRZYBLIŻONE ROZWIĄZANIE UKŁADÓW NIELINIOWYCH RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH ZWYCZAJNYCH Z ZASTOSOWANIEM WIELOMIANÓW CZEBYSZEWA

Streszczenie. W artykule opisano metodę przybliżonego rozwiązywania układów nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych metodą Galerkina z zastosowaniem wielomianów ortogonalnych Czebyszewa pierwszego rodzaju. Otrzymano algorytmy bezpośrednio dyskretyzujące problem opisany układem równań różniczkowych.

1. WSTĘP

Celem niniejszej pracy jest uogólnienie metody przybliżonego rozwiązywania liniowych układów równań różniczkowych z zastosowaniem wielomianów Czebyszewa pierwszego rodzaju, w metodzie Galerkina dla problemów opisanych nieliniowymi równaniami różniczkowymi.

Idea prezentowanej metody polega na rozwinięciu poszukiwanych funkcji w szereg Fouriera względem wielomianów Czebyszewa, a następnie na mnożeniu równań przez kolejne funkcje bazowe. Całkowanie otrzymanych w ten sposób równań, w przypadku układów równań różniczkowych liniowych, prowadzi bezpośrednio do liniowych układów równań algebraicznych. Sytuacja jest odmienna gdy mamy do czynienia z równaniami nieliniowymi, gdyż tu nie możemy zastosować w sposób naturalny warunku ortogonalności. W prezentowanej pracy uzyskano jawną postać operatorów, których zastosowanie do ww. przypadków nieliniowych dyskretyzuje problem sprowadzając go do układu nieliniowych równań algebraicznych.

Dogodna reprezentacja macierzowa tych operatorów ułatwia ponadto algorytmizację zagadnienia. Przedstawiona metoda daje możliwość konstrukcji iteracyjnych równań wariacyjnych, por. [4], dla problemów wielowymiarowych, gdy pewien wymiar badanego obiektu jest wyróżniony względem pozostałych, z takim przypadkiem mamy do czynienia np.: w teorii powłok. Koncepcja tak sformułowanych iteracyjnych równań wariacyjnych daje możliwość naturalnego połączenia z metodą elementów skończonych. Metody z zastosowaniem wielomianów ortogonalnych Legendre'a w liniowych zagadnieniach teorii powłok prezentowane są w pracy [6], a w problemach termosprężystości powłok o zmiennej grubości w [7]. Wymienione prace zainspirowały autora do uogólniania prezentowanej w nich metody na problemy nieliniowe dla wielomianów Czebyszewa.

Łatwość algorytmizacji przedstawionej metody może w pewnych przypadkach decydować o jej przewadze nad metodą elementów skończonych bądź różnic skończonych. Tak będzie jeśli mamy do czynienia z grupą zbliżonych układów równań różniącymi się rzędami pochodnych w pewnych wyrażeniach lub gdy żądamy polepszenia dokładności rozwiązań. W wymienionych przypadkach zajdzie konieczność zmiany schematu różnicowego lub funkcji kształtu oraz istniejącego podziału. W prezentowanej metodzie oba przypadki wymuszają jedynie zmianę stopnia rozwinięcia funkcji, por. (2.7), co bezpośrednio umożliwia ogólność zapisu. W pracy nie podjęto problematyki związanej ze zbieżnością metody. Zagadnienia te rozwiązane dla przypadków liniowych są bardzo trudne dla ogólnych problemów nieliniowych. Jedynie dla pewnych klas zagadnień nieliniowych udało się uzyskać zadowalające rezultaty [1], [2], [3].

2. WIELOMIANY CZEBYSZEWA PIERWSZEGO RODZAJU

Własności wielomianów Czebyszewa T_n, $n = 0,1,2,\ldots$ są powszechnie znane [5], [8]. W punkcie tym podamy jedynie niezbędne w dalszej części pracy zależności.

Załóżmy, że przedziałem ortogonalności a zarazem dziedziną występujących dalej funkcji będzie przedział $\langle -1, 1\rangle$. Uogólnienie na dowolny $\langle a, b\rangle$ jest trywialne.

Warunek ortogonalności dla ww. wielomianów można wyrazić wzorem

$$\int_{-1}^{1} T_k T_l \omega dx = \begin{cases} C(k), & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}, \tag{2.1}$$

gdzie:

$$\omega = (1-x^2)^{-1/2}, \qquad C(k) = \begin{cases} \pi, & k = 0 \\ \pi/2, & k > 0 \end{cases}.$$

Piszemy krótko T_k zamiast $T_k(x)$. Łatwo wyznaczyć współczynniki rozkładu wielomianu T_n względem potęg x

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} B_n^k x^k, \qquad n = 0,1,2,\ldots,$$

$$B_n^{n-2p} = n\,\frac{(-1)^p}{n-p}\binom{n-p}{p}2^{n-2p-1}, \tag{2.2}$$

$$B_n^i = 0 \quad \text{dla} \quad i \neq n-2p, \quad p = 0,1,\ldots,[n/2].$$

Zajmiemy się teraz reprezentacją wielomianową wyrażenia $x^k T_n$. Stosując wzór rekurencyjny

$$xT_n = \frac{1}{2}(T_{n-1} + T_{n+1}), \tag{2.3}$$

można uzyskać ogólną zależność

$$x^k T_n = \sum_{l=0}^{2k} A_l^k(n) T_{n-k+l},$$

$$k = 0,1,2,\ldots \tag{2.4}$$

Załóżmy, że

$$T_n = 0 \quad \text{dla} \quad n < 0.$$

Współczynniki $A_l^k(n)$ są wyrażone następującym wzorem

$$A_l^k(n) = \begin{cases} 2^{-k}\binom{k}{l/2} & l = 0,2,4,\ldots,2k \\ 0 & \text{dla pozostałych } l \end{cases} \qquad n = 0,1,2,\ldots \tag{2.5}$$

Kolejna zależność wiąże pochodną wielomianu z wielomianami niższych stopni i ma następującą postać

$$\frac{d}{dx} T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} D_n^k T_{n-k}, \tag{2.6}$$

gdzie

$$D_n^k = \begin{cases} n & \text{dla} \quad n\text{-nieparzystych i } k = n, \\ 0 & \text{dla} \quad k \text{ parzystych}, \\ 2n & \text{dla} \quad \text{pozostałych } n, k. \end{cases}$$

Przez N-te rozwinięcie $u_N(x)$ funkcji $u(x)$ względem wielomianów T_n rozumieć będziemy sumę częściową

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{k}{u} T_k(x), \tag{2.7}$$

gdzie

$$\frac{k}{u} = \int_{-1}^{1} u(x) T_k(x) dx.$$

Oznaczmy przez $\mathbf{u}_N$, $\mathbf{v}_N$ wektory

$$\mathbf{u}_N = \left[\frac{0}{u},\frac{1}{u},\ldots,\frac{N}{u}\right], \qquad \mathbf{v}_N = \left[\frac{0}{v},\frac{1}{v},\ldots,\frac{N}{v}\right].$$

I niech $\frac{k}{u} = \frac{k}{v} = 0$, dla $k < 0$ lub $k > N$.

Wprowadźmy obecnie operatory

$$L_n^k[u] = \int_{-1}^{1} s^k\Big(\sum_{i=0}^{N} \frac{i}{u}T_i\Big)T_n\omega dx = \sum_{l=0}^{2k} A_l^k(n)C(n-k+l)\frac{n-k+l}{u},$$

$$L_n^k[u,v] = \int_{-1}^{1} x^k\Big(\sum_{i=0}^{N} \frac{i}{u}T_i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{N} \frac{j}{v}T_j\Big)T_n\omega dx = \int_{-1}^{1}\Big(\sum_{i=0}^{N} \frac{i}{u}T_i\Big). \tag{2.8}$$

$$\Big(\sum_{j=0}^{N} \frac{j}{v}T_j\Big)\sum_{p=0}^{n} B_n^p x^{p+k}\omega dx = \int_{-1}^{1}\Big(\sum_{i=0}^{N} \frac{i}{u}T_i\Big)\sum_{j=0}^{N}\sum_{p=0}^{n}\sum_{l=0}^{2(p+k)}$$

$$B_n^p A_l^{p+k}(j)T_{j-p-k+l}\,\frac{u}{v}\omega dx = \sum_{j=0}^{N}\sum_{p=0}^{n}\sum_{l=0}^{2(p+k)} B_n^p A^{p+k},(j)$$

$$C(j-p-k+l)\frac{j-p-k+l}{u}\,\frac{j}{v}.$$

Wzory (2.8) sprowadzają się do prostego zapisu macierzowego

$$L_p^k[u,v] = \mathbf{u}_N \mathbf{L}_p^k \mathbf{v}_N^T, \tag{2.9}$$

gdzie $\mathbf{L}_p^k$ jest macierzą o wymiarach $(N+1) \times (N+1)$ wyrażającą się wzorem

$$\mathbf{L}_j^i = \sum_{k=0}^{j} B_j^k \mathbf{E}_{k+i}, \tag{2.10}$$

gdzie $\mathbf{E}_k$ są macierzami symetrycznymi o elementach określonych następująco

$$\left[\mathbf{E}_k\right]_{rq} = A_{r-q+k}^k(q-1)\,C(r-1), \quad k = 0,1,2,\ldots, \quad r,q = 1,2,\ldots,N+1. \tag{2.11}$$

Zakładamy, że

$$A_l^k(n) = 0 \quad \text{dla} \quad l < 0 \quad \text{lub} \quad l > 2k.$$

3. PREZENTACJA METODY

Przedmiotem metody są układy nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych postaci

$$F_k(u_1, u_1', \ldots, u_1^{(p_1)}, u_2, u_2', \ldots, u_2^{(p_2)}, \ldots, u_L^{(p_l)}) =$$

$$= \sum_{s=1}^{r_k} f_k^s(x)\, F_k^s(u_1, u_1', \ldots, u_l^{(p_l)}) = 0, \qquad k = 1,2,\ldots,l, \tag{3.1}$$

gdzie

$$u_i = u_i(x), \quad x \in \langle -1,1 \rangle, \quad i = 1,2,\ldots,l$$

są poszukiwanymi funkcjami, F_k^s są wielomianami $p_1+p_2+\ldots+p_2+l = p_i+l$ zmiennych $u_1, u_1, \ldots, u_l^{(p_l)}$.

Zakładamy, że współczynniki tych wielomianów są równe 1, dalej f_k^s są wielomianami zmiennej x, r_k oznacza ilość składników w k-tym równaniu. Układowi równań (3.1) odpowiada układ p_Σ warunków brzegowych. Na wstępie opiszemy metodę, gdy wielomiany F_k, są drugiego stopnia (wystąpią iloczyny dwóch funkcji niewiadomych), przy czym kolejne pochodne funkcji u_i traktujemy - jako odrębne nieznane funkcje, razem $p_\Sigma + l$ niewiadomych funkcji.

Zastosujemy metodę Galerkina. Każdą poszukiwaną funkcję u_i aproksymujemy jej rozwinięciem stopnia N_i, względem wielomianów T_n por. (2.7)

$$u_i N_i = \Big[\underbrace{\frac{0}{u_i}, \frac{1}{u_i}, \ldots, \frac{N_i}{u_i}, 0, \ldots, 0}_{N+1 \text{ składników}}\Big], \tag{3.2}$$

gdzie:

$$N = \max N_i, \quad i = 1,2,\ldots,l, \quad N_\Sigma = \sum_{i=1}^{l} N_i.$$

Przy czym winna zachodzić relacja

$$N_i > p_i, \quad i = 1,2,\ldots,l.$$

Na równaniach (3.1) dokonujemy następujących operacji

$$\int_{-1}^{1} F_k T_n \omega dx = 0, \quad n = 0,1,\ldots,N. \tag{3.3}$$

Stosując jawną postać operatorów (2.8), otrzymamy (N+1)xl równań algebraicznych

$$\bar{F}_k(u_{1N_1}, u'_{1N_1}, \ldots, u^{(p_1)}_{1N_1}, \ldots, u^{(p_l)}_{lN_l}) = 0, \tag{3.4}$$

z czego tylko $N_\Sigma + l$ jest liniowo niezależnych.

Niewiadomymi są teraz współczynniki rozkładu funkcji względem wielomianów Czebyszewa. Jest ich P.

$$P = \sum_{i=1}^{l} p_i N_i + N_\Sigma + l. \tag{3.5}$$

Warunki brzegowe zamieniamy na p_Σ równań względem niewiadomych współczynników przez bezpośrednie zastosowanie wzoru na $T_n(\pm 1)$:

$$T_n(-1) = (-1)^n, \quad T_n(1) = 1. \tag{3.6}$$

Pozostaje kwestia powiązania współczynników rozkładu k-tej pochodnej funkcji u_i ze współczynnikami rozkładu k-1-szej pochodnej tej funkcji. Stosując wzór (2.6) można uzyskać następujące zależności:

$$\frac{n}{u_i^{(k)}} = \sum_{l=n+1}^{N} \frac{l}{u_i}(k-1)\, h(n,l), \quad n = 0,1,\ldots,N-1, \tag{3.7}$$

gdzie:

$$h(n,l) = \begin{cases} 1, & \text{dla } n = 0, \quad l\text{-nieparzystych}, \\ 0, & \text{dla } n = 0, \quad l\text{-parzystych}, \\ 2l, & \text{dla } l-n \text{ - nieparzystych}, \\ 0, & \text{dla } l-n \text{ - parzystych}. \end{cases}$$

Po zastosowaniu powyższych relacji otrzymamy brakujące $\sum_{i=1}^{l} p_i N_i$ równania. Zachodzi oczywiście $\frac{N}{u_i^{(k)}} = 0$, lecz ten związek nie wnosi informacji do obliczenia współczynników rozkładu funkcji $u_i^{(k-1)}$.

Przypadek, w którym w równaniach (3.1) wielomiany F_k^s są wyższych rzędów sprowadzamy do poprzedniego przez kolejne zastępowanie iloczynów dwóch funkcji pewnymi nowymi funkcjami, aż do momentu pojawienia się iloczynów dwóch funkcji. Współczynniki rozwinięcia nowo wprowadzonych funkcji uzależnić możemy od współczynników rozwinięcia starych funkcji przez bezpośrednie zastosowanie operatorów L_n^o i tak np.: jeśli iloraz u zastąpimy przez nową funkcji w, $w \equiv u$, to

$$L_n^o[\omega] = L_n^o[u,v] \tag{3.8}$$

Pokazana metoda produkuje układy nieliniowych równań algebraicznych z nieliniowościami stopnia drugiego. Układy takie możemy zapisać następująco:

$$\mathbf{A}_i\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{L}_i\mathbf{x} = b_i, \quad i = 1,2,\ldots,M \tag{3.9}$$

gdzie: $\mathbf{A}_i$ jest wektorem stanowiącym i-ty wiersz macierzy $\mathbf{A}$, której wyrazy są generowane członami liniowymi, $\mathbf{x}$ jest wektorem kolumnowym niewiadomych $x_1, x_2, \ldots, x_M$, $\mathbf{L}_i$ jest macierzą generowaną członami nieliniowymi, b_i są wyrazami wolnymi. Pokażemy, że w prezentowanym przypadku metoda Newtona-Raphsona (N-R) ma szczególnie prostą postać. Oznaczając rozwiązanie startowe przez $\mathbf{x}^0$, kolejne przybliżenia rozwiązania będą uzyskiwane z formuły

$$\mathbf{x}^n = \mathbf{x}^{n-1} + \bar{\mathbf{x}}, \tag{3.10}$$

gdzie wektor $\bar{\mathbf{x}}$ odpowiada kolejnym poprawkom. Wektor $\mathbf{x}$ może być obliczany z układów otrzymywanych metodą (N-R), która w naszym przypadku, po prostych przekształceniach przyjmie postać

$$\left[\mathbf{A}_i + \mathbf{x}^{nT}(\mathbf{L}_i^T+\mathbf{L}_i)\right]\bar{\mathbf{x}} = -\mathbf{A}_i\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^{nT}\mathbf{L}_i\mathbf{x}^n + b_i \tag{3.11}$$

LITERATURA

[1] Browder F.E.: Nonlinear eigenvalue problems and Galerkin approximations. Bull. Amer. Math. Soc. 74, 651-656 (1968).

[2] Gajewski H., Gröger K., Zacharias K.: Nichtlineare operatorgleichungen und operatordifferentialgeichungen. Akademie - Verlag Berlin, 1974.

[3] Gröger K.: Zum Galerkin - Verfanhren für Evolutionsgleichungen, Theory of Non-linear operators; Procedings of a summer-schod, held in October 1972 at Neuendorf (Hiddensee) GDR, Akademie-Verlag Berlin, 85-104 (1974).

[4] Jękot T.: Równania wariacyjne nieliniowych problemów termosprężystości sprzężonej powłok grubych. II. Równania iteracyjne, ZN Pol. Śl. Mat.-Fiz. 39, 393-400 (1981).

[5] Paszkowski S.: Zastosowania numeryczne wielomianów i szeregów Czebyszewa. PWN, Warszawa 1975.

[6] Bekya N.H.: Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. "Наука", 1982.

[7] Гуляев В.И., Баженов В.А., Лизунов П.П.: Неклассическая теория оболочек и её приложение к решению инженерных задач. "Высша школа", 1978.

[8] Суетин П.К.: Классические ортогональные многочлены. "Наука", 1979.

Recenzent: prof. dr hab. inż. Szczepan Borkowski

Wpłynęło, 10.11.1983 r.

ПРИБЛИЗИТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ МНОГОЧЛЕНОВ ЧЕБЫШЕВА

Р е з ю м е

В статье описан метод приблизительного решения систем нелинейных уравнений методом Галёркина с применением ортогональных многочленов Чебышева первого рода. Получены алгорифмы непосрелственно дискретизирующие проблемы описанную системой дифференциальных уравнений.

APPROXIMATE SOLUTIONS OF SYSTEMS OF NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS USING CHEBYSHEV'S POLYNOMIALS

S u m m a r y

A Galerkin type method with a use of the first type orthogonal Chebyshev's polynomials to solve approximately systems of nonlinear ordinary differential equations is described. Algorithms discretizing directly problems given by a system of differential equations are obtained.