ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 43 Nr kol. 795

Adam CZECH

Danuta JAMA

ZASTOSOWANIE METODY LAPUNOWA DO BADANIA STABILNOŚCI RÓWNAŃ I UKŁADÓW PARABOLICZNYCH

Streszczenie. W pracy tej podane będą oszacowania normy rozwiązań pewnych równań i układów równań cząstkowych typu parabolicznego. Rozpatrujemy równania rzędu 4 i 2, o współczynnikach zależnych od (t,x) i warunkach brzegowych nie tylko zerowych. Badamy stabilności rozwiązań tych równań i układów równań względem warunków brzegowych i początkowych, wykorzystując normę przestrzeni L_2.

1. WSTĘP

W pracy tej korzystamy z normy w przestrzeni L_2. Celem pracy jest uzyskanie oszacowań normy rozwiązań pewnych parabolicznych równań cząstkowych i układów takich równań. Zastosowana jest w tym celu druga metoda Lapunowa.

Dotychczas uzyskane wyniki koncentrowały się na równaniach drugiego rzędu, o współczynnikach zależnych tylko od x. Nie badano też wpływu niezerowych warunków brzegowych.

W pracy rozpatrujemy również pewną klasę funkcji nieliniowych, założenia na nie nałożone podajemy w treści pracy.

Zakładamy, że współczynniki równań są dostatecznie gładkie oraz że istnieją rozwiązania klasyczne rozpatrywanych zagadnień granicznych.

Uzyskane oszacowania normy rozwiązań wykorzystujemy do badania stabilności rozwiązań w sensie normy względem warunków początkowych i brzegowych.

Nie zmniejszając ogólności analizy, przyjmujemy, że równania i układy równań posiadają rozwiązania trywialne $\tilde{u}(t,x) = 0$.

Rozważane równanie i układy równań rozpatrywane są dla $(t,x) \in \Omega$ $\Omega = [0,T] \times D$, D - ograniczony, otwarty, spójny podzbiór n-wym. przestrzeni Euklidesowej R^n, $0 < T < \infty$ $\Gamma = [0,T] \times \partial D$ ∂D - brzeg obszaru D.

Korzystamy z następujących definicji stabilności.

Definicja 1

Rozwiązanie trywialne równania nazywamy stabilnym względem warunku początkowego, jeżeli

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \|\varphi_0(x)\| < \delta \Rightarrow \bigwedge_{t\geq 0} \|u(t,x)\| < \varepsilon$$

$u(t,x)$ - dowolne rozwiązanie spełniające warunek początkowy,
$u(0,x) = \varphi_0(x)$

$$\| u \| = \| u \|_{L^2(D)} = \sqrt{\int_D u^2 dx}$$

Definicja 2

Rozwiązanie trywialne równania nazywamy asymptotycznie stabilnym względem warunku początkowego, jeżeli jest stabilne względem warunku początkowego oraz $\lim_{t\to\infty} \| u(t,x) \| = 0$.

Definicja 3

Rozwiązanie trywialne równania nazywamy stabilnym względem warunków początkowego i brzegowych, jeżeli

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \left[\|\varphi_0(x)\| + |||\xi(t)||| \right] < \delta \Rightarrow \bigwedge_{t\geq 0} \|u(t,x)\| < \varepsilon$$

$u(t,x)$ - dowolne rozwiązanie spełniające warunek początkowy
$u(0,x) = \varphi_0(x)$ dla $x \in D$ i warunki brzegowe
$u(t,x_1) = \xi_1(t)$ $u(t,x_2) = \xi_2(t)$ dla (t,x_1), $(t,x_2) \in \Gamma$

$$|||\xi(t)|||^2 = \int_0^\infty \left[\xi_1^2(t) + \xi_2^2(t)\right] dt = \|\xi_1\|^2 + \|\xi_2\|^2$$

W pracy rozpatrujemy równania i układy równań cząstkowych zawierające funkcje nieliniowe, o zerowych warunkach brzegowych oraz równanie różniczkowe cząstkowe liniowe o niezerowych warunkach brzegowych.

Rozpatrzmy równanie

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu(t,x) + F(t,x,u), \tag{I}$$

gdzie

$$Lu = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(a(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(b(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + c(t,x)u.$$

Z zerowymi warunkami brzegowymi

I.1 $u(t,0) = u(t,1) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,1) = 0$

Z warunkiem początkowym

I.2 $\quad u(0,x) = \varphi_0(x)$

określone dla $(t,x) \in \Omega = [0,\infty) \times [0,1]$.

Twierdzenie 1

Jeżeli dla $(t,x) \in \Omega$ współczynniki równania (I) spełniają warunki:

a) $a(t,x) \le 0 \quad b(t,x) \ge 0 \quad c(t,x) \le C = \text{const}$, gdzie $C < \infty$ oraz

b) $uF(t,x,u) \le 0$, to

$$\|u(t,x)\| \le \|\varphi_0(x)\| e^{Ct}.$$

Dowód:

Wprowadźmy funkcjonał postaci $V(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(t,x)dx$.

Biorąc $\frac{dV}{dt}$ wzdłuż rozwiązania $u\ t,x$, mamy

$$\frac{dV}{dt} = \int_0^1 u\frac{du}{dt}dx = \int_0^1 [uLu + uF(t,x,u)]\,dx = \int_0^1 uLudx + \int_0^1 uF(t,x,u)dx$$

$$\frac{dV}{dt} = \int_0^1 u\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[a(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]dx + \int_0^1 u\frac{\partial}{\partial x}\left[b(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]dx + \int_0^1 u^2 c(t,x)dx + \int_0^1 uF(t,x,u)dx. \tag{1}$$

Oszacujmy poszczególne całki w (1), wykorzystując warunki brzegowe I.1 i założenia odnośnie do współczynników równania a) oraz b)

$$\int_0^1 u\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[a(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]dx = u\frac{\partial}{\partial x}\left[a(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left[a(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]dx =$$

$$= -\frac{\partial u}{\partial x}a(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Bigg|_0^1 + \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, a(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx \le 0 \tag{2}$$

$$\int_0^1 u\frac{\partial}{\partial x}\left[b(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]dx = ub(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}\Bigg|_0^1 - b(t,x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \le 0 \tag{3}$$

$$\int_0^1 c(t,x)u^2dx \le C\int_0^1 u^2dx \tag{4}$$

$$\int_0^1 uF(t,x,u)dx \leqslant 0 \tag{5}$$

Z (1) - (5) mamy

$$\frac{dV}{dt} \leqslant C\int_0^1 u^2 dx.$$

Z ostatniej nierówności, przy wykorzystaniu warunku początkowego I.2, otrzymujemy tezę c.k.d.

Uwaga 1

Dla $c < 0$ rozwiązanie układu (I), przy spełnieniu założeń twierdzenia 1, jest asymptotycznie stabilne do zera.

Uwaga 2

Jeżeli w twierdzeniu 1 założyć dodatkowo na współczynniki warunki postaci $a(t,0) = a(t,1) = 0$ $\left.\frac{\partial a}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial a}{\partial x}\right|_{x=1} = 0$ oraz $b(t,0) = b(t,1) = 0$, to teza twierdzenia jest słuszna dla równania (I) dla dowolnych warunków brzegowych.

Twierdzenie 2

Jeżeli dla $(t,x) \in \Omega$

a) współczynniki równania (I) spełniają warunki:

$a(t,x) \leqslant 0$ $\quad b(t,x) \geqslant 0$ $\quad c(t,x) \leqslant C < 0$ $\quad C = \text{const}$ $|C| < \infty$

b) $F(t,x,u) = k(t,x)f(u)$

$f(u) \leqslant M$

$$\int_0^\infty \| k(t,x)\| dt < \infty$$

to

$$\|u(t,x)\| \leqslant \|\varphi_0(x)\| + M\int_0^t \|k(t,x)\| dt$$

a ponadto istnieje taka stała L, że

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t,x)\| \leqslant L\|\varphi_0(x)\|.$$

Dowód:

Wprowadzając funkcję $V(t)$ oraz wykorzystując przekształcenia przeprowadzone w dowodzie twierdzenia 1 mamy

$$\int_0^1 uLudx \leqslant 0, \tag{1}$$

dokonując oszacowania poniższej całki w oparciu o nierówność Holdera otrzymujemy

$$\int_0^1 uF(t,x,u)dx \leqslant \left[\int_0^1 u^2dx\right]^{1/2}\left[\int_0^1 M^2k^2(t,x)dx\right]^{1/2} =$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{V(t)}M\|k(t,x)\|. \tag{2}$$

Dla układu (I), przy wykorzystaniu funkcjonału jak w dowodzie twierdzenia 1, z (1) - (2) mamy

$$\frac{dV}{dt} \leqslant M\sqrt{2}\|k(t,x)\|\sqrt{V(t)} \tag{3}$$

z (3) otrzymujemy nierówność

$$\sqrt{V(t)} \leqslant \sqrt{V(0)} + \frac{\sqrt{2}}{2} M \int_0^1 \|k(t,x)\|dt \tag{4}$$

a więc

$$\lim_{t\to\infty}\|u\| \leqslant \|\varphi_0\| + M\int_0^\infty \|k(t,x)\|dt. \tag{5}$$

Opierając się na założeniu b) $\int_0^\infty \|k(t,x)\|dt < \infty$ dla dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ można dobrać $T > 0$ takie, aby

$$\int_T^\infty \|k(t,x)\|dt < \frac{\varepsilon}{M}. \tag{6}$$

Zatem z (5) - (6)

$$\lim_{t\to\infty} \|u\| \leqslant \|\varphi_0\| + M\int_0^T \|k(t,x)\|dt + \varepsilon.$$

Wprowadzając oznaczenie

$$A = \int_0^T \|k(t,x)\|dt$$

mamy

$$\lim_{t\to\infty} \|u\| \leqslant \|\varphi_o\| + MA + \varepsilon .$$

Biorąc pod uwagę, że φ_o – ustalona $\|\varphi_o\|$ – dodatnie można tak dobrać stałą L, aby

$$\|\varphi_o\| + MA + \varepsilon \leqslant L\|\varphi_o\|.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t,x)\| \leqslant L\|\varphi_o(x)\| . \qquad \text{c.k.d.}$$

Rozpatrzmy równania o postaci:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[a(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[b(t,x)u\right] + c(t,x)u. \qquad \text{(II)}$$

Z warunkami brzegowymi postaci

II.1 $u(t,0) = \xi_1(t) \quad u(t,1) = \xi_2(t)$

i warunkiem początkowym

II.2 $u(0,x) = \varphi_o(x)$

określone dla $(t,x) \in \Omega = [0,\infty) \times [0,1]$.

Twierdzenie 3

Jeżeli dla $(t,x) \in \Omega$ współczynniki równania (II) spełniają warunki:

a) $a(t,x) \geqslant 0 \quad a(t,0) = a(t,1) = 0,$

b) $|b(t,0)|, \quad |b(t,1)| \leqslant M,$

c) $\frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial x} + c(t,x) \leqslant \bar{c},$

to

$$\|u\| \leqslant \left[\|\varphi_o(x)\| + \sqrt{M}\,\|\|\xi(t)\|\|\right] e^{\bar{c}t},$$

gdzie

$$\|\xi(t)\| = \left[\int_0^1 (\xi_1^2(t) + \xi_2^2(t))dt\right]^{1/2}.$$

Dowód:

Podobnie jak w twierdzeniach 1, 2 wykorzystamy funkcję

$$V(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2 dx,$$

różniczkując powyższą funkcję mamy

$$\frac{dV}{dt} = \int_0^1 u\frac{\partial u}{\partial t}dx =$$

$$= \int_0^1 u\frac{\partial}{\partial x}\left[a(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]dx + \int_0^1 u\frac{\partial}{\partial x}\left[b(t,x)u\right]dx + \int_0^1 u^2 c(t,x)dx \qquad (1)$$

szacujemy poszczególne całki w (1)

$$u\frac{\partial}{\partial x}\left[a(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]dx = ua(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 a(t,x)dx \leqslant 0 \qquad (2)$$

na mocy założenia a).
Opierając się na założeniu b) i przy wykorzystaniu warunków brzegowych, otrzymujemy oszacowanie na drugą całkę po prawej stronie (1)

$$\int_0^1 u\frac{\partial}{\partial x}\left[b(t,x)u\right]dx = u^2 b(t,x)\Big|_0^1 - \int_0^1 b(t,x)u\frac{\partial u}{\partial x}dx =$$

$$= u^2 b(t,x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 b(t,x)\frac{\partial}{\partial x}\left[u^2\right]dx =$$

$$= u^2 b(t,x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}u^2 b(t,x)\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\partial b}{\partial x}u^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2}\xi_2^2(t)b(t,1) - \frac{1}{2}\xi_1^2(t)b(t,0) + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\partial b}{\partial x}u^2dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}M\left[|\xi_1(t)|^2 + |\xi_2(t)|^2\right] + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\partial b}{\partial x}u^2dx. \tag{3}$$

z (1) - (3) mamy

$$\frac{dV}{dt} \leqslant \frac{1}{2}M\left[|\xi_1(t)|^2 + |\xi_2(t)|^2 + \int_0^1\left[\frac{1}{2}\frac{\partial b}{x} + c(t,x)\right]u^2dx. \tag{4}$$

Na mocy założenia c) z (4), otrzymujemy

$$\frac{dV}{dt} \leqslant \frac{1}{2}M\left[|\xi_1(t)|^2 + |\xi_2(t)|^2\right] + 2\bar{c}V(t). \tag{5}$$

z (5) otrzymujemy

$$V(t) \leqslant V(0) + \frac{1}{2}M\int_0^t\left[|\xi_1(t)|^2 + |\xi_2(t)|^2\right]dt + 2\bar{c}\int_0^t V(t)dt. \tag{6}$$

Na mocy uogólnionego lemetu Gronwalla-Bellmana z (6) mamy

$$V(t) \leqslant \left\{V(0) + \frac{1}{2}M\int_0^t\left[|\xi_1(t)|^2 + |\xi_2(t)|^2\right]dt\right\}e^{2\bar{c}t}. \tag{7}$$

Kładąc

$$\left(\int_0^\infty\left[|\xi_1(t)|^2 + |\xi_2(t)|^2\right]dt\right)^{1/2} = |||\xi(t)|||$$

z (7) otrzymujemy tezę. c.k.d

<u>Uwaga 1</u>

Jeżeli $\bar{c} < 0$ to rozwiązanie trywialne układu (II) jest asymptotycznie stabilne.

<u>Uwaga 2</u>

Z założeń twierdzenia 2 wynika również nierówność szacujące rozwiązanie równania (II) postaci

$$\|u(t,x)\| \leq \left[\|\varphi_0\| + \sqrt{M}(\|\xi_1\| + \|\xi_2\|)\right] e^{\bar{c}t}.$$

Uwaga 3

Teza twierdzenia 2 jest słuszna, jeżeli założenie $a(t,0) = a(t,1) = 0$ zastąpimy zerowymi warunkami brzegowymi równania (2).

Uwaga 4

Dla $M = 0$ nierówność w tezie twierdzenia przyjmuje postać

$$\|u\| \leq \|\varphi_0(x)\| e^{\bar{c}t}.$$

Rozpatrzmy równanie o współczynnikach macierzowych postaci:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + C(t,x)u + F(t,x,u) \qquad \text{(III)}$$

Z zerowymi warunkami brzegowymi

III.1 $u(t,0) = u(t,1) = 0$,

z warunkiem początkowym

III.2 $u(0,x) = \varphi_0(x)$,

określone dla $(t,x) \in \Omega = [0,\infty) \times [0,1]$.
$A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$ - macierze o wymiarze $n \times n$, symetryczne, o elementach należących odpowiednio do C^2, C^1, C^0.
$u(t,x)$, $F(t,x,u)$ - n-wymiarowe wektory funkcyjne.

Twierdzenie 4

Jeżeli dla $(t,x) \in \Omega$

a) macierz $A(t,x)$ jest dodatnio określona,
b) λ_{max} jest największą wartością własną macierzy

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(A) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(B) + C,$$

c) $|F(t,x,u)|^2 \leq k|u|^2$
to istnieje taka stała L, że

$$\|u(t,x)\| \leq \|\varphi_0(x)\| e^{Lt}.$$

Dowód:

Wprowadźmy funkcjonał

$$V(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 |u|^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sum_{n=1}^{n} u_k^2 dx$$

Różniczkując powyższą funkcję mamy

$$\frac{dV(t)}{dt} = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} u_k \frac{\partial u_k}{\partial t} dx = \int_0^1 u\frac{\partial u}{\partial t} dx =$$

$$= \int_0^1 uA(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + \int_0^1 uB(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} dx + \int_0^1 u^2 C(t,x)dx + \int_0^1 uF(t,x,u)dx \tag{1}$$

Wykorzystując warunki brzegowe i całkowanie przez części otrzymujemy

$$\int_0^1 uA(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = -A(t,x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} u^2 dx \tag{2}$$

$$\int_0^1 uB(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\partial B}{\partial x} u^2 dx. \tag{3}$$

Korzystając z otrzymanych przekształceń (2) - (3) i z założenia a) z (1), otrzymujemy następującą nierówność

$$\frac{dV}{dt} \leqslant \int_0^1 \left[\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial x} + C\right)u^2 + uF(t,x,u)\right] dx. \tag{4}$$

Wykorzystując założenie c) mamy

$$uF(t,x,u) = \sum_{k=1}^{n} u_k F_k \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(u_k^2 + F_k^2) =$$

$$= \frac{1}{2}|u|^2 + \frac{1}{2}|F|^2 \leqslant \frac{1}{2}|u|^2 + \frac{1}{2}k|u|^2 = \frac{1}{2}(1+k)|u|^2. \tag{5}$$

W wyniku otrzymanych przekształceń (4) - (5) i opierając się na założeniu b)

$$\frac{dV}{dt} \leqslant \int_0^1 \frac{1}{2}(1 + k + 2\lambda_{max}) |u|^2 dx. \tag{6}$$

Po prostych przekształceniach i uwzględnieniu warunku początkowego III.2 z nierówności (6), dostajemy nierówność postaci

$$\| u \| \leqslant \| \varphi_o(x) \| \exp\left[\frac{1}{2}(1 + k + 2\lambda_{max})\right] t. \tag{7}$$

Kładąc $\frac{1}{2}(1 + k + 2\lambda_{max}) = L$, otrzymujemy z (7) tez).

c.k.d

Uwaga

Jeżeli $\frac{1}{2}(1 + k + 2\lambda_{max}) < 0$, to rozwiązanie trywialne układu III jest asymptotycznie stabilne.

Rozpatrzmy układ równań postaci

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = (L_o + B(t,x))u(t,x) + g(t,x,u) + f(t,x) \tag{IV}$$

określony dla $(t,x) \in \Omega = [0,T] \times D$.

D - ograniczony, otwarty, spójny podzbiór n-wymiarowej przestrzeni Euklidesowej R^n

$0 < T < \infty$

z warunkiem brzegowym

IV.1 $u(t,x) = 0$ dla $(t,x) \in \Gamma = [0,T] \times D$ - boczna powierzchnia walca

∂D - brzeg D,

i warunkiek początkowym

IV.2 $u(0,x) = \varphi_o(x)$ dla $x \in D$,

$B(t,x)$ - jest nxn wymiarową macierzą dla $(t,x) \in \Omega$

$u(t,x)$, $f(t,x)$ - funkcja wektorowa,

$g(t,x,u)$ funkcja wektorowa nieliniowa względem u dla $(t,x) \in \Omega$

L_o - nxn wymiarowym macierzowym operatorem różniczkowym, względem zmiennych przestrzennych $x = (x_1,\dots,x_n)$.

Twierdzenie 5

Jeżeli

a) $$\bigvee_{L_o}\bigvee_{\lambda=\mathrm{const}}\ \bigwedge_{t\geq 0}\bigwedge_{u\in\mathcal{D}(L_o)}\int_D u^T(t,x)(L_o^T + L_o)\,u(t,x)dx \leq \lambda\|u(t,x)\|^2,$$

b) $$\bigvee_{K(t,x)\geq 0}\ \bigwedge_{u\in\mathcal{D}(L_o)}\ \bigwedge_{(t,x)\in\Omega} g(t,x,u) \leq K(t,x)u(t,x)$$

oraz nieliniowa funkcja g jest funkcją nieparzystą.

c) $$\bigwedge_{t\geq 0}(\lambda + \Lambda_1(t) + 2(k_1(t) + 1)) \leq 0,$$

gdzie $\Lambda_1(t) = \sup\limits_{x\in D}\Lambda(t,x)$ $k_1(t) = \sup\limits_{x\in D} K(t,x)$,

$_{max}(t,x)$ – największa wartość własna macierzy $B^T + B$,

d) $$\int_0^\infty \|f\|^2 d\tau < \infty$$

to układ (IV) jest stabilny przy stale działających zaburzeniach. Układ będzie asymptotycznie stabilny przy stale działających zaburzeniach, jeżeli w c) będziemy mieli do czynienia z ostrą nierównością.

Dowód:

Wprowadzając funkcjonał postaci $V(t) = \|u(t,x)\|^2$, gdzie $\|\cdot\|$ jest normą przestrzeni L_2, mamy:

$$\frac{dV(t)}{dt} = \int_D \frac{\partial u^T(t,x)}{\partial t}\,u(t,x) + u^T(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\,dx =$$

$$= \int_D \Big[u^T(t,x)(L_o^T + L_o)u(t,x) + u^T(t,x)(B^T(t,x) +$$

$$+ B(t,x))u(t,x) + (u^T(t,x)g(t,x,u) +$$

$$+ g^T(t,x,u)u(t,x)) + (u^T(t,x)f(t,x) +$$

$$+ f^T(t,x)u(t,x))\Big]dx. \tag{1}$$

Korzystając z założenia a) i b) z (1) dostajemy

$$\frac{dV(t)}{dt} \leqslant \lambda \|u(t,x)\|^2 + \int_D \Lambda(t,x)u^T(t,x)u(t,x)dx +$$

$$+ 2\int_D K(t,x)u^T(t,x)u(t,x)dx + \int_D u^T(t,x)u(t,x)dx + \int_D f^T(t,x)f(t,x)dx. \tag{2}$$

A więc

$$\frac{dV(t)}{dt} \leqslant (\lambda + \Lambda_1(t) + 2k_1(t) + 1)\|u(t,x)\|^2 + \|f(t,x)\|^2$$

$$V(t) - V(0) \leqslant \int_0^t (\lambda + \Lambda_1(\tau) + 2k_1(\tau) + 1)\|u(\tau,x)\|^2 d\tau + \int_0^t \|f(\tau,x)\|^2 d\tau. \tag{3}$$

Wykorzystując nierówności Gronwalla-Bellmana z (3), otrzymujemy oszacowanie

$$\|u(t,x)\|^2 \leqslant (\|\varphi_0(x)\|^2 + \int_0^t \|f(\tau,x)\|^2 d\tau \exp \int_0^t (\lambda + \Lambda_1(t) + 2k_1(t) + 1)d\tau.$$

Z (4) i założenia c) wynika teza.

c.k.d

Rozpatrzmy nieliniowe równania dyfuzji

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + g(t,x,u) + f(t,x) \tag{V}$$

określone dla $(t,x) \in \Omega = [0,\infty) \times [0,1]$ o warunkach brzegowych postaci

V.1 $u(t,0) = u(t,1) = 0$

i warunkiem początkowym

V.2 $u(0,x) = \varphi_0(x)$

jako (szczególny przypadek naszego układu (IV)).

Twierdzenie 6

Jeżeli spełnione są założenia:

a) $\bigvee_{K(t,x)u \in \mathcal{D}(L_e)} \bigwedge_{(t,x)\in\Omega} \quad u(t,x)g(t,x,u) \leqslant K(t,x)u^2(t,x),$

gdzie

$$\bigwedge_{t\geqslant 0}\ \bigwedge_{x\in(\alpha,\beta)\leqslant[0,1]} K(t,x) \geqslant 0$$

oraz

$$\bigwedge_{t\geqslant 0\ x\in[0,1]-(\alpha,\beta)} K(t,x) \leqslant 0$$

b) $\bigwedge_{t\geqslant 0} \int_{\alpha}^{\beta} K(t,x)(1-x)dx < 1$

to układ (V) jest stabilny przy stale działających zaburzeniach.

Dowód:

Wprowadźmy funkcjonał

$$V(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(t,x)dx \qquad \frac{dV(t)}{dt} = \int_0^1 u(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}dx \tag{1}$$

z (V) i (1), otrzymamy

$$\frac{dV(t)}{dt} = \int_0^1\left[u(t,x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + u(t,x)g(t,x,u) + u(t,x)f(t,x)\right]dx. \tag{2}$$

Wykorzystując warunek brzegowy (V.1), mamy

$$u(t,x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}dx \leqslant 0. \tag{3}$$

Zauważmy, że:

$$u(t,x) = -\int_x^1 \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}dx$$

$$u^2(t,t) \leqslant \left\{\int_x^1 \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^2 dx\right\}\left\{\int_1^x dx\right\} \tag{4}$$

$$u^2(t,x) \leqslant (1-x)\int_1^x \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^2 dx \leqslant (1-x)\int_0^1 \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^2 dx.$$

Korzystając z elementarnych nierówności, z założenia a) i z V.1 dostajemy z (2) nierówność

$$\frac{dV(t)}{dt} \leqslant \int_0^1 \left[- \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^2 + K(t,x)u^2(t,x) + \frac{\mu}{2}u^2(t,x) + \frac{2}{\mu}f^2(t,x)\right]dx, \tag{5}$$

gdzie μ dowolna liczba dodatnia.

Dokonując dalszych przekształceń mamy:

$$\frac{dV(t)}{dt} \leqslant \int_0^1 \left[- \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^2 dx + \int_{[0,1]-(\alpha,\beta)} K(t,x) + \frac{\mu}{2}u^2(t,x)dx + \right.$$

$$+ \int_\alpha^\beta \left[K(t,x) + \frac{\mu}{2}\, u^2(t,x)dx + \frac{2}{\mu}\|f(t,x)\|^2. \tag{6}$$

Wykorzystując w (6) nierówność (4), otrzymujemy

$$\frac{dV(t)}{dt} \leqslant \int_0^1 - \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^2 dx + \int_{[0,1]-(\alpha,\beta)} \left[K(t,x) + \frac{\mu}{2}\right]u^2(t,x)dx +$$

$$+ \int_\alpha^\beta \left(\left[K(t,x) + \frac{\mu}{2}\right](1 - x)\int_0^1 \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^2 dx\right)dx + \frac{2}{\mu}\|f(t,x)\|^2. \tag{7}$$

Biorąc pod uwagę, że w przedziale $[0,1] - (\alpha,\beta) K(t,x) < 0$, to dla dostatecznie małego μ $K(t,x) + \frac{\mu}{2} \leqslant 0$, a więc druga całka w nierówności (7) jest niedodatnia. Odrzucając ją mamy:

$$\frac{dV(t)}{dt} \leqslant - \int_0^1 \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^2 dx + \int_0^1 \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^2 dx \int_\alpha^\beta \left[K(t,x) + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu}{2}\right](1 - x)dx + \frac{2}{\mu}\|f(t,x)\|^2 =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^2 dx \left[\int_\alpha^\beta K(t,x)(1 - x) + \frac{\mu}{2}(1 - x)dx\right] - 1 + \frac{2}{\mu}\|f(t,x)\|^2. \tag{8}$$

Ostatecznie, dla μ na tyle małego, aby przy założeniu b)

$$\int_\alpha^\beta \left[K(t,x)(1 - x) + \frac{\mu}{2}(1 - x)\right]dx \leqslant 1,$$

mamy:

$$\frac{dV(t)}{dt} \leqslant \frac{2}{\mu}\|f(t,x)\|^2 \tag{9}$$

$$V(t) - V(0) \leqslant \frac{2}{\mu}\int_0^{\tau}\|f(\tau,x)\|^2 d\tau$$

$$\frac{1}{2}\|u(t,x)\|^2 \leqslant \frac{1}{2}\|\varphi_0(x)\|^2 + \frac{2}{\mu}\int_0^{t}\|f(\ ,x)\|^2 d\tau.$$

c.k.d

LITERATURA

[1] Wang P.K.C.: Stability Analysis of a Simplified Flexible Vehicle via Lyapunov s Direct Method, AIAA Journ., Vol. 3, 1965, No 9, 1764-1766.

[2] Parke P.C.: Lapunev functionals fer aeroelastic problems. J. of Franklin Institute Vol. 283, No 5, 1967 pp. 426-9.

[3] Skalmierski B., Tylikowski A.: Stabilności w mechanice. Gliwice 1972.

[4] Demidowicz B.P.: Matematyczna teoria stabilności. Warszawa 1972.

Recenzent: prof. dr hab. Andrzej Tylikowski

Wpłynęło, 5.07.1983 r.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ЛЯПУНОВА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Р е з ю м е

В статье оценены нормы решений некоторых уравнений и систем уравнений параболического типа. Рассмотривается уравнение четвертого и второго порядка с коэффициентами зависимыми от (t,x) и краевых условий (не только нулевых). Исследуется устойчивость решений этих уравнений и систем уравнений относительно краевых и начальных условий, используя норму L_2. Используется метод Ляпунова для исследования устойчивости уравнений и систем уравнений параболического типа.

THE APPLICATION OF THE LYAPUNOV'S METHOD TO TEST PARABOLIC EQUATIONS AND SYSTEMS STABILITY

S u m m a r y

In the paper the estimations of solutions of a norm of certain equations and systems of partial parabolic equations are presented. Those equations are of the fourth and second order with coefficients depended on (t,x) and boundary conditions not equal zero. The stability of the solutione of these equations and systems of equations in relation to the boundary and initial conditions using a L^2 norm.