ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 43 Nr kol. 795

Danuta JAMA

BADANIE STABILNOŚCI PEWNYCH RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH CZĄSTKOWYCH PARZYSTEGO RZĘDU $\geqslant 2$

Streszczenie. Przedmiotem moich badań są pewne jakościowe własności układów dynamicznych opisanych równaniami różniczkowymi rzędu parzystego $\geqslant 2$.

Formułuję i udowadniam twierdzenie dotyczące oszacowania normy rozwiązania rozpatrywanego równania różniczkowego. Z uzyskanej nierówności wnioskuję stabilność rozwiązania trywialnego danego równania względem warunków początkowych.

Otrzymane w tej pracy wyniki uzyskuję przez uogólnienie znanych metod dla równań drugiego rzędu na równanie bardziej skomplikowane, zawierające pochodne parzystego rzędu $\geqslant 2$.

WSTĘP

Rozważania dotyczą równania różniczkowego określonego w obszarze

$$\Omega = I \times D,$$

gdzie:

$$I = \{t:\ 0 \leqslant t < \infty\}$$
$$D = \{x:\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}.$$

Oznaczenia:

C^{2n+1} - klasa funkcji ciągłych wraz z ciągłymi pochodnymi do rzędu 2n+1,

$C_{tx}^{(k,l)}$ - klasa funkcji ciągłych wraz z ciągłymi pochodnymi po t do rzędu k oraz ciągłymi pochodnymi po x do rzędu l,

$L_p(D)$ - klasa funkcji całkowalnych z p-tą potęgą,

$H_2^{2n+1}(D)$ - przestrzeń funkcji z $L_2(D)$ mających uogólnione pochodne do rzędu $2n+1$, należące do $L_2(D)$.

Oceny rozwiązań dokonuję w oparciu o pojęcie normy [1]. Indukowane normy są oznaczane przez $\|\cdot\|_i$ $(i = 0,1,2)$ czy też $\|.\|$ Korzystam z normy w przestrzeni L^2 o budowie:

$$\|u\|_{L_2(D)} = \left(\int_0^1 u^2 dx\right)^{1/1}, \tag{1}$$

gdzie $u \in L_2(D)$

oraz z normy w przestrzeni $H_2^{2n+1}(D)$ postaci

$$\|\varphi\|_{H_2^{2n+1}(D)} = \|\varphi\|_{L_2(D)} + \sum_{k=0}^{n} \left\| \frac{\partial^{2k+1}\varphi}{\partial x^{2k+1}} \right\|_{L^2(D)} \tag{2}$$

gdzie $\varphi \in H_2^{2k+1}(D)$.

Korzystam z następującej definicji stabilności

Definicja 1

Rozwiązanie trywialne równania nazywamy stabilnym względem warunków początkowych, jeżeli

$$\bigwedge_{\varepsilon<0} \bigvee_{\delta>0} \left[\|\varphi_0(x)\|_0 + \|\varphi_1(x)\|_1 < \delta \Rightarrow \bigwedge_{t \geq 0} \|u(t,x)\|_2 < \varepsilon \right.$$

$u(t,x)$ – dowolne rozwiązanie równania spełniające warunki początkowe

$$u(0,x) = \varphi_0(x)$$

$$\frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = \varphi_1(x) \quad \text{dla} \quad (t,x) \in \Omega$$

Rozpatrzmy równanie postaci:

$$\text{I.} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial^{2k+1}}{\partial x^{2k+1}} (a_{2k+1}(x) \frac{\partial^{2k+1} u}{\partial_x^{2k+1}} - c(t,x)u - d(t,x)\frac{\partial u}{\partial t})$$

dla $(t,x) \in \Omega$ z warunkami początkowymi

I.1. $u(0,x) = \varphi_0(x)$

I.2. $\frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = \varphi_1(x)$ dla $x \in [0,1]$

i dowolnymi warunkami brzegowymi zgodnymi z warunkami początkowymi, gdzie dla każdego $(t,x) \in \Omega$

$$a_{2k+1}(x) \in C^{2k+1} \quad (k = 0,1,\ldots,n); \quad C(t,x) \in C_{tx}^{(1,0)};$$

$\varphi_1(x) \in L_2(D)$; $d(t,x) \in L_1(D)$; $\varphi_0(x) \in H_2^{2n+1}$ – funkcja dane

$u(t,x)$ – funkcja nieznana, będąca rozwiązaniem równania I–I.2.

$u(t,x) \in L([0,\infty);\ H_0^1(D) \cap L_2(D))$.

Zakładam, że istnieje rozwiązanie równania I, spełniające zerowe warunki brzegowe i warunki początkowe I.1–I.2.

Twierdzenie 1

Jeżeli dla $(t,x)\in\Omega$ współczynniki powyższego równania spełniają założenia:

(a) $a_{2k+1}(x) \geqslant 0 \quad (k = 0,1,\dots,n)$

(b) $$\left.\frac{\partial^s a_{2k+1}(x)}{\partial x^s}\right|_{\substack{x=0\\x=1}} = 0 \qquad \begin{array}{l}(k = 0,1,\dots,n)\\(s = 0,1,\dots,2k)\end{array}$$

(c) $c(t,x) \geqslant M_1 \geqslant 0;\quad d(t,x) \geqslant 0;\quad \frac{\partial c(t,x)}{\partial t} \leqslant 0$

(d) $\max\left[\sup_{x\in[0,1]} a_{2k+1}(x);\ \sup_{x\in[0,1]} c(0,x);\ 1\right] = M_2 \qquad k = 0,1,\dots,n$

to

$$\bigwedge_t \|u\| \leqslant \sqrt{\frac{M_2^2}{M_1}}\left[\|\varphi_1\| + \sum_{k=0}^{n}\left\|\frac{\partial^{2k+1}\varphi_0}{\partial x^{2k+1}}\right\| + \|\varphi_0\|\right].$$

gdzie $\|\cdot\|$ jest normą przestrzeni L_2.

Dowód:

Dla przeprowadzenia dowodu przyjmuję funkcję pomocniczą postaci:

$$V(t) = \frac{1}{2}\int_0^1\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}(x)\left(\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}\right)^2 + c(t,x)u^2\right]dx \tag{3}$$

Różniczkując równanie (3) względem t otrzymuję

$$\frac{dV(t)}{dt} = \int_0^1\left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}(x)\,\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}\,\frac{\partial^{2k+2}u}{\partial x^{2k+1}\partial t} + \right.$$

$$\left. + c(t,x)u\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial c}{\partial t}u^2\right]dx. \tag{4}$$

Wykorzystując założenie (b) twierdzenia 1 dokonuję przekształcań składników sumy po prawej stronie powyższego równania (całkowanie przez części), co w rezultacie równanie (4) doprowadza do równania postaci

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \int_0^1\left\{\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{k=0}^{n}\frac{\partial^{2k+1}}{\partial x^{2k+1}}\left(a_{2k+1}(x)\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}\right) + c(t,x)u\right]\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial c}{\partial t}u^2\right\}dx \tag{5}$$

a więc

$$\frac{dV}{dt} = \int_0^1 \left[- d(t,x)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial c}{\partial t} u^2 \right] dx \tag{6}$$

w oparciu o założenie (c) twierdzenia 1 otrzymuję

$$\frac{dV}{dt} \leqslant 0,$$

czyli

$$V(t) \leqslant V(0)$$

a więc

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}(x)\left(\frac{\partial^{2k+1} u}{\partial x^{2k+1}}\right)^2 + c(t,x)u^2 \right] dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 \left[(\varphi_1(x))^2 + \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}(x)\left(\frac{\partial^{2k+1}\varphi_0}{\partial x^{2k+1}}\right)^2 + c(0,x)\varphi_0^2(x) \right] dx \tag{7}$$

Z (7) w oparciu o założenie (c) i (d) otrzymuję

$$M_1\int_0^1 u^2 dx \leqslant M_2\int_0^1 \left[(\varphi_1(x))^2 + \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\partial^{2k+1}\varphi_0(x)}{\partial x^{2k+1}}\right)^2 + \varphi_0^2(x) \right] dx \tag{8}$$

Z (1) i (8) mamy

$$\|u\|^2 \leqslant \frac{M_2}{M_1}\left[\|\varphi_1\|^2 + \sum_{k=0}^{n}\left\|\frac{\partial^{2k+1}\varphi_0}{\partial x^{2k+1}}\right\|^2 + \|\varphi_0\|^2 \right] \tag{9}$$

Wykorzystując proste nierówności algebraiczne z (9) otrzymuję tezę twierdzenia

c.k.d.

Przykład 1

Rozpatrzmy równanie postaci:

$$\mathrm{I}'.\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial^{2k+1}}{\partial x^{2k+1}}\left(x^{2k+1}(1-x)^{2k+1}\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}\right) - (1+e^{-tx})u - (x^2+xt+1)\frac{\partial u}{\partial t}$$

dla $(t,x)\in \Omega = [0,\infty) \times [0,1]$

o warunkach początkowych postaci

$$u(0,x) = \varphi_0(x), \qquad \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = \varphi_1(x) \qquad \text{dla} \quad x\in[0,1]$$

i dowolnych warunkach brzegowych.

Współczynniki powyższego równania spełniają wszystkie założenia twierdzenia 1.

Dla $(t,x)\in\Omega = [0,\infty) \times [0,1]$

(a) $a_{2k+1}(x) = x^{2k+1}(1-x)^{2k+1} \geqslant 0 \bigwedge_{x\in[0,1]}$; $k = 0,1,\dots,n$

(b) $\left.\frac{\partial^s a_{2k+1}(x)}{\partial x^s}\right|_{\substack{x=0\\x=1}} = 0$ dla $k = 0,1,\dots,n$ $s = 0,1,\dots,2k$

(c) $c(t,x) = e^{-tx} + 1 \geqslant 1 = M_1 > 0$

$d(t,x) = (x^2 + xt + 1) > 0$

$\frac{\partial c}{\partial t} = -xe^{-tx} \leqslant 0$

(d) $\max\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{2k+1}, 2, 1\right] = 2 = M_2$.

Dla równania I' prawdziwe jest oszacowanie

$$\bigwedge_t \|u\| \leqslant \sqrt{2}\|\varphi_1\| + \sum_{k=0}^{n}\left\|\frac{\partial^{2k+1}\varphi_0}{\partial x^{2k+1}}\right\| + \|\varphi_0\|$$

Uwaga 1

Jeżeli współczynniki równania I nie spełniają założenia (b) twierdzenia 1, to teza twierdzenia 1 jest słuszna dla równania I o zerowych warunkach brzegowych.

Uwaga 2

Równania I można rozpatrywać w dowolnym obszarze $\Omega = [0,\infty) \times [a,b]$; $\Omega = [0,\infty) \times [0,\infty)$ i teza twierdzenia przy zarowaniu się współczynników $a_{2k+1}(x)$ na krańcach przedziału (lub zarowych warunkach brzegowych) pozostaje słuszna.

Twierdzenie 2

Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 1, to rozwiązanie trywialne równania I jest stabilne względem warunków początkowych w sensie definicji 1.

Dowód:

Przyjmując

$$\|\varphi_0\| = \|\varphi_0\|_{H_2^{2n+1}(D)}$$

$$\|\varphi_1(x)\|_1 = \|\varphi_1\|_{L^2(D)}$$

$$\|u(t,x)\|_2 = \|u(t,x)\|_{L_2(\Omega)}$$

Z (1), (2) i tezy twierdzenia 1 wynika teza twierdzenia 2.

c.k.d.

LITERATURA

[1] Hille E.: Functional Analysis and Semigroups. American Mathematical Society, New York, 1948.

[2] Czech A., Jama D., Janiec B.: O stabilności pewnych układów dynamicznych, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Matematyka - Fizyka 24 (1973) 63-67.

[3] Czech A., Jama D.: Ograniczoność rozwiązań pewnego równania parabolicznego na płaszczyźnie. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Matematyka-Fizyka, (4 strony maszynopisu) - praca złożona do druku 29. 11.1982 r.

[4] Wang P.K.C.: Stability Analysis of a Simplified Flexible Vehicle via Lyapunov's Direct Method, AIAA Journ., Vol. 3, 1965, N° 9, 1764-1766.

Recenzent: prof. dr hab. Andrzej Tylikowski

Wpłynęło, 05.07.1983 r.

ИССЛЕДОВАНИЕ СТАБИЛЬНОСТИ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ЧЕТНОГО РЯДА $\geqslant 2$

Р е з ю м е

Предметом исследований в данной являются некоторые качественные свойства динамических систем описанных дифференциальными уравнениями четного порядка $\geqslant 2$.

Формулируется и доказывается теорема, касающуюся оценки нормы решения рассматриваемого дифференциального уравнения. С полученного неравенства предлагается устойчивость решения нулевого данного уравнения относительно исходных условий.

Полученные в работе результаты получаем обобщая известные методы для уравнений второго ряда с уравнениями более сложными содержащими производные четного ряда $\geqslant 2$.

STABILITY OF SOME PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF AN EVEN ORDER GREATER THAN TWO

S u m m a r y

The aim of the paper is to analyse some qualitative properties of dynamic systems described by differential equations of the even order greater than two. The theorem concerning the norm estimation of solution of the considered differential equation is formulated and proved. The obtained inequality is used to find a stability of trivial solutions of the given equation in relation to primary conditions. The results are obtained generalizing known methods for the equation of the second order and applying them to the more complicated equation containing differential coefficients of the even order greater than two.