ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 43 Nr kol. 795

M. ŻABKA

PRODUKT PÓŁPROSTY I KOPRODUKT PÓŁPROSTY W KATEGORII Z OBIEKTEM ZEROWYM

Streszczenie. W artykule zaproponowałem pewną definicję produktu półprostego w dowolnej kategorii z obiektem zerowym, będącą uogólnieniem definicji produktu półprostego grup oraz algebr Liego. Produkt półprosty jest również uogólnieniem produktu w kategorii.

WSTĘP

Znane są pojęcia produktu półprostego grup oraz sumy półprostej algebr Liego (por. [3] s. 18 i [1] s. 213). Moim celem jest uogólnienie tych pojęć, w oparciu o teorię kategorii. W tym artykule podaję pewną definicję produktu półprostego w kategorii z obiektem zerowym. Udowadniam następnie, że stosując tę definicję do kategorii grup oraz do kategorii algebr Liego, otrzymujemy znane pojęcia produktu półprostego grup oraz odpowiednio: sumy półprostej algebr Liego. Pokazuję również własność produktu półprostego, wzorowaną na odpowiednich własnościach tego pojęcia w kategorii grup oraz w kategorii algebr Liego, a mianowicie pokazuję, że każdy produkt jest produktem półprostym.

Na końcu wprowadzam definicję dualną do poprzedniej, tzn. definicję koproduktu półprostego oraz podaję własność dualną do podanej wyżej, tzn. że każdy koprodukt jest koproduktem półprostym.

§ 1. POJĘCIA PODSTAWOWE

Centralną definicję tego paragrafu, a nawet całego artykułu, jest definicja 1.7 produktu półprostego w dowolnej kategorii z obiektem zerowym. Została ona poprzedzona przypomnieniem najważniejszych pojęć z teorii kategorii, przedstawionych w monografii [2].

Definicja 1.1

Przez kategorię Gr będziemy rozumieli kategorię, której obiektami są wszystkie grupy, a morfizmami dowolne homomorfizmy grup (por. [2] s. 16).

Definicja 1.2

Obiektem zerowym kategorii $\mathfrak{N}$ nazywamy każdy taki obiekt O, że dla każdego obiektu X kategorii $\mathfrak{N}$ istnieje dokładnie jeden morfizm $\alpha: X \to O$ oraz dokładnie jeden morfizm $\beta: O \to X$. Wszystkie obiekty zerowe danej kategorii są izomorficzne.

Definicja 1.3

Morfizmem zerowym nazywamy każdy morfizm $\gamma: X \to Y$ będący złożeniem $\gamma = \alpha\beta$ morfizmów $\alpha: O \to Y$ i $\beta: X \to O$, gdzie O jest dowolnym obiektem zerowym.

W szczególności morfizmy α i β są zerowymi.
Dla dowolnych dwóch obiektów X i Y może istnieć najwyżej jeden taki morfizm z X do Y, oznaczany jako O_{XY}. Dla każdych dwóch obiektów kategorii $\mathfrak{N}$ istnieje morfizm zerowy wtedy i tylko wtedy, gdy w kategorii $\mathfrak{N}$ istnieje obiekt zerowy (por. [2] str. 61).

W kategorii Gr obiektem zerowym jest grupa jednoelementowa, a morfizmami zerowymi są homomorfizmy grup, w których obrazem dowolnego elementu jest element neutralny.

Uwaga 1.1

W całym artykule będziemy pomijali znak superpozycji odwzorowań, pisząc zamiast $\alpha \circ \beta$ po prostu $\alpha\beta$. Podobnie, gdy nie będzie to prowadziło do nieporozumień, będę opuszczał znak działania grupowego.

Definicja 1.4

Morfizm $\alpha: A \to B$ nazywamy retrakcją (koretrakcją), gdy istnieje morfizm $\beta: B \to A$ taki, że $\alpha\beta = id_B$ ($\beta\alpha = id_A$). Oczywiście dla dowolnych dwóch obiektów A i B istnieje retrakcja $\alpha: A \to B$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje koretrakcja $\beta: B \to A$ (por. [2], s. 50).

Definicja 1.5

Morfizm $\alpha: A \to B$ nazywamy izomorfizmem, gdy istnieje morfizm $\beta: B \to A$ taki, że $\alpha\beta = id_B$ i $\beta\alpha = id_A$. Taki morfizm oznaczamy jako α^{-1} i nazywamy odwrotnym do α (por. [2] s. 48).

Definicja 1.6

Morfizm $\eta:K\to A$ ($\eta:A\to K$) nazywamy jądrem (kojądrem) morfizmu $\pi:A\to B$ ($\pi:B\to A$), gdy złożenie $\pi\eta$ ($\eta\pi$) jest morfizmem zerowym oraz dla każdego morfizmu $\xi:X\to A$ ($\xi:A\to X$), dla którego złożenie $\pi\xi$ ($\xi\pi$) jest morfizmem zerowym istnieje dokładnie jeden morfizm $\vartheta:X\to K$ ($\vartheta:K\to X$) taki, że $\xi=\eta\vartheta$ ($\xi=\vartheta\eta$) (por. [2] s. 249).

Uwaga 1.2

Homomorfizm grup $\eta:K\to A$ jest jądrem homomorfizmu grup $\pi:A\to B$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest on złożeniem izomorfizmu $\zeta:K\to \mathrm{Ker}$ i włożenia tożsamościowego ε grupy $\ker\,\pi$ w grupę A, tzn. $\eta=\varepsilon\zeta$. Homomorfizm $\eta:A\to K$ jest kojądrem homomorfizmu $\pi:B\to A$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest on złożeniem homomorfizmu naturalnego $q:A\to A/C$, gdzie podgrupa C jest najmniejszą podgrupą normalną, zawierającą obraz $\mathrm{im}\,\pi$ grupy B w odwzorowaniu π oraz izomorfizmu $\varepsilon:A/C\to K$, tzn. $\eta=\varepsilon q$ (por. [2], s. 250).

Uwaga 1.3

Zachodzi następująca prosta własność: Jeżeli morfizm $\eta:K\to A$ jest jądrem morfizmu $\pi:A\to B$, a morfizm $\beta:A\to A'$ jest izomorfizmem, to morfizm $\beta\eta$ jest jądrem morfizmu $\pi\beta^{-1}$.

Dowód powyższej uwagi wynika wprost z definicji.

Definicja 1.7

Morfizm $\eta:K\to A$ kategorii $\mathcal{U}$ nazywamy monomorfizmem, gdy dla każdych dwóch morfizmów $\varphi:X\to K$ i $\psi:X\to K$ z tego, że $\eta\varphi=\eta\psi$ wynika, że $\varphi=\psi$ (por. [2], s. 49).

Uwaga 1.4

Homomorfizm grup $\eta:K\to A$ w kategorii Gr jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowanie η jest różnowartościowe.

Zanotujmy prosty związek między jądrami a monomorfizmami.

Wniosek 1.1

Każdy morfizm kategorii $\mathcal{U}$ będący jądrem innego morfizmu, jest monomorfizmem.

Dowód:

Niech morfizm $\eta:K\to A$ jest jądrem morfizmu $\alpha:A\to B$ i niech $\varphi:X\to K$ i $\psi:X\to K$ będą takimi morfizmami, że $\eta\varphi=\eta\psi$. Oznaczamy przez $\xi:=\eta\varphi=\eta\psi$.

Z definicji jądra wynika, że $\alpha\gamma = 0_{KB}$. Zachodzi $\alpha\varepsilon = \alpha\gamma\varphi = 0_{KB}\varphi = 0_{KB}$. Z jednoznaczności istnienia morfizmu ϑ takiego, że $\varepsilon = \gamma\vartheta$ wynika równość $\varphi = \psi$.

Określimy teraz podstawową dla dalszych rozważań definicję.

Definicja 1.8

Obiekt A kategorii $\mathcal{M}$, w której istnieje obiekt zerowy, nazywamy produktem półprostym obiektów K i B, gdy istnieją morfizmy $\gamma: K \to A$ oraz $\pi: A \to B$ takie, że

a) morfizm γ jest jądrem morfizmu π,
b) morfizm π jest retrakcją.

W następnym paragrafie zinterpretujemy tę definicję w kategorii grup Gr oraz w kategorii algebr Liego.

§ 2. WŁASNOŚCI PRODUKTU PÓŁPROSTEGO

W tym paragrafie wprowadzimy tradycyjną definicję produktu półprostego grup oraz sumy półprostej algebr Liego, a następnie wykażemy równoważność tych definicji z definicją 1.8 w odniesieniu do odpowiednich kategorii. Pokażemy również, że produkt półprosty jest uogólnieniem produktu.

Definicja 2.1

Niech K i B będą grupami, a $\alpha: B \to \mathrm{Aut}K$ homomorfizmem grupy B w grupę automorfizmów grupy K. W zbiorze $K \times B$ można wprowadzić następujące działanie:

$$(k_1, b_1) \cdot (k_2, b_2) := (k_1\alpha_{b_1}(k_2),\ b_1b_2).$$

Zbiór $K \times B$ z wprowadzonym powyżej działaniem jest grupą nazywaną produktem półprostym grup K i B. Produkt półprosty grup K i B oznaczamy jako $K \lambda_{\alpha} B$, gdzie znaczek ma przypominać zależność produktu półprostego od wyboru homomorfizmu α, (por. [3], s. 18).

Uwaga 2.1

Jeżeli α jest odwzorowaniem $\alpha: B \to \mathrm{Aut}\ K$, to zamiast $\alpha(b)$ będę pisał również α_b.

Lemat 2.1

Homomorfizm grup $\pi: A \to B$ jest retrakcją wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją: grupa G, homomorfizm $\alpha: B \to \mathrm{Aut}G$ oraz izomorfizm $\beta: A \to G\lambda_{\alpha}B$ takie, że homomorfizmy π i π_B spełniają zwięzek $\pi_B\beta = \pi$ gdzie $\pi_B: G\lambda_{\alpha}B \to B$ zdefiniowany jest wzorem $\pi_B(g,b) := b$.

Dowód:

"$\Rightarrow$" Niech homomorfizm $\pi: A \to B$ będzie retrakcją. Z definicji retrakcji wynika, że istnieje homomorfizm $\varphi: B \to A$ taki, że $\pi\varphi = id_B$. Niech $G := \ker\pi$ oraz niech $\forall\, b \in B\ \forall\, g \in G\quad \alpha_b(g) := \varphi(b)\, g\varphi(b)^{-1}$. W oparciu o proste przeliczenia przekonujemy się, że odwzorowanie α jest homomorfizmem grupy B w grupę automorfizmów grupy G, tzn. $\alpha: B \to \mathrm{Aut}G$. Możemy więc mówić o produkcie półprostym grup $G\lambda_{\alpha}B$. Zdefiniujemy teraz odwzorowanie $\beta: A \to G\lambda_{\alpha}B$ $\forall\, a \in A$

$$\beta(a) := (a\varphi\pi(a^{-1}), \pi(a))$$

Sprawdzimy, czy definicja jest prawidłowa:

$$\pi(a\varphi\pi(a^{-1})) = \pi(a)\pi\varphi\pi(a^{-1}) = \pi(a)\pi(a)^{-1} = e_B$$

a więc $a\varphi\pi(a^{-1}) \in \ker\pi = G$. W celu sprawdzenia czy odwzorowanie β jest bijekcją wprowadzimy odwzorowanie β':

$$\beta': G\lambda_{\alpha}B \to A \quad \forall (g,b) \in G\lambda_{\alpha}B \quad \beta'(g,b) := g\varphi(b)$$

Mamy:

$$\beta'\beta(a) = a\varphi\pi(a^{-1})\varphi\pi(a) = a$$

oraz

$$\beta\beta'(g,b) = \beta(g\varphi(b)) = (g\varphi(b)\varphi\pi(\varphi(b^{-1})\, g^{-1}), \pi(g\varphi(b))) =$$

$$= (g\varphi(b)\varphi\pi\varphi(b^{-1})\varphi\pi(g^{-1}), \pi(g)\pi\varphi(b)) =$$

$$= (g\varphi(\ )\varphi(b)^{-1}\varphi(e_B), e_Bb) = (g, b),$$

tak więc odwzorowanie β' jest odwrotne do odwzorowania β, a tym samym odwzorowanie β jest bijekcją.

Udowodnimy jeszcze, że odwzorowanie β jest homomorfizmem.

$$\beta(a_1a_2) = (a_1a_2\varphi\pi(a_2^{-1}a_1^{-1}),\ \pi(a_1a_2)) =$$

$$= (a_1\varphi\pi(a_1^{-1})\varphi(\pi(a_1))\ a_2\varphi\pi(a_2^{-1})\varphi(\pi(a_1^{-1})),\ \pi(a_1)\ \pi(a_2)) =$$

$$= (a_1\varphi\pi(a_1^{-1})\alpha\pi_{(a_1)}(a_2\varphi\pi(a_2^{-1})),\ \pi(a_1)\pi(a_2)) =$$

$$= (a_1\varphi\pi(a_1^{-1}),\pi(a_1))\ .\ (a_2\varphi\pi(a_2^{-1}),\pi(a_2)) = \beta(a_1)\ .\ \beta(a_2)$$

$$\beta(e_A) = (e_A\varphi\pi(e_A),\ \pi(e_A)) = (e_A,e_B)$$

Łącznie powyższe rozumowanie dowodzi, że homomorfizm β jest izomorfizmem. Związek $\pi_B\beta = \pi$ jest już oczywisty - wynika wprost z definicji odwzorowania.

"$\Leftarrow$" Niech $\beta: A \to G\lambda_\alpha B$ będzie izomorfizmem grup, $\pi: A \to B$ dowolnym homomorfizmem, dla którego zachodzi związek $\pi = \pi_B\beta$. Niech $\forall\ b\in B\quad \gamma'(b) := (e_A, b)$ i niech $\gamma := \beta^{-1}\gamma$. Mamy $\pi\gamma = \pi_B\beta\ \beta^{-1}\gamma = \pi_B\gamma' = id_B$. Udowodniliśmy więc, że homomorfizm π jest retrakcją.

Twierdzenie 2.1

Grupa A jest produktem półprostym grup K i B w kategorii Gr w sensie definicji 1.8 wtedy i tylko wtedy, gdy jest izomorficzna z pewnym produktem półprostym $K\lambda_\alpha B$ grup K i B w sensie definicji 2.1.

Dowód: "$\Longrightarrow$"

Z definicji 1.8 wynika istnienie homomorfizmów $\gamma: K \to A$ oraz $\pi: A \to B$ takich, że homomorfizm γ jest jądrem homomorfizmu π oraz homomorfizm π jest retrakcją. Na mocy lematu 2.1 z tego ostatniego faktu wynika, że istnieją grupa G, homomorfizm $\alpha': B \to \mathrm{Aut}\ G$ i izomorfizm $\beta: A \to G\lambda_{\alpha'} B$ takie, że spełniony jest związek $\pi_B\beta = \pi$, gdzie π_B jest homomorfizmem $\pi_B: G\lambda_{\alpha'}B \to B$ zdefiniowany wzorem $\pi_B(g,b) := b$.

Niech $\gamma' := \beta\gamma$. Na mocy uwagi 1.3 homomorfizm γ' jest jądrem homomorfizmu π_B. Oczywiście $\ker\pi_B = G\times\{e_B\}$. Na mocy uwagi 1.2 homomorfizm γ' jest złożeniem izomorfizmu $\zeta: K \to \ker\pi_B$ i włożenia tożsamościowego $\varepsilon: \ker\pi_B \to G\lambda_\alpha B$, tzn. $\gamma = \varepsilon\zeta$. Ponieważ istnieje izomorfizm $\xi: K \to \ker\pi_B = G\times\{e_B\}$, więc istnieje izomorfizm $\xi: K \to G$. Ostatecznie więc istnieje homomorfizm $\alpha: B \to \mathrm{Aut}\ K$ taki, że $G\lambda_{\alpha'}B \cong K\lambda_\alpha B$.

"$\Leftarrow$" Niech $\beta: A \to K\lambda_\alpha B$ będzie izomorfizmem grupy A i pewnego produktu półprostego $K\lambda_\alpha B$ grup K i B. Niech $\pi_B: K\lambda_\alpha B \to B$ będzie homomorfizmem zdefiniowanym wzorem $\pi_B(k,b) := b$. Na mocy lematu 2.1 homomorfizm $\pi := \pi_B\beta: A \to B$ jest retrakcją. Niech ponadto homomorfizm $\gamma': K \to K\lambda_\alpha B$

będzie zdefiniowanym wzorem $\gamma'(k) := (k, e_B)$. Oczywiście $\gamma'(K) = \ker \pi_B$, a więc na mocy uwagi 1.2 homomorfizm γ' jest jądrem homomorfizmu π_B. Na mocy uwagi 1.3 homomorfizm $\gamma := \beta^{-1}\gamma' : K \to A$ jest jądrem homomorfizmu $\pi = \pi_B \beta$.

Przejdziemy teraz do algebr Liego. Podamy na początku podstawowe definicje i własności.

Definicja 2.2

Parę $(g, [,])$ nazywamy algebrą Liego nad ciałem K, gdy g jest przestrzenią liniową nad ciałem K a $[,]$ jest odwzorowaniem $[,] : g \times g \to g$ spełniającym następujące warunki:

a) $\forall x,y \in g \quad [x,y] + [y,x] = 0$

b) $\forall x,y,z \in g \quad \forall k,l \in K \; [kx + ly, z] = k[x,z] + l[y,z]$

c) $\forall x,y,z \in g \quad [x, [y,z]] + [y,[z,x]] + [z, [x,y]] = 0$

Odwzorowanie $F : g \to h$ algebry Liego g w algebrę Liego h nazywamy homomorfizmem algebr Liego, gdy odwzorowanie F jest liniowe oraz zachowuje komutator, tzn. $F[x,y] = [F(x), F(y)]$.

Odwzorowanie $F : g \to g$ algebry Liego g w siebie nazywamy derywacją, gdy odwzorowanie F jest liniowe oraz

$$F[x,y] = [F(x), y] + [x, F(y)].$$

Zbiór wszystkich derywacji oznaczamy przez Der$g$ (por. [1], s. 212).

Lemat 2.2

Zbiór derywacji Der$g$ dowolnej algebry Liego g z dodawaniem, mnożeniem przez elementy ciała K oraz z działaniem $[,]$ określonym w następujący sposób:

$\forall F, H \in$ Der$g$ $[F,H] := FH - HF$ jest algebrą Liego (por. [1], s. 212).

Definicja 2.3

Niech g i h będą algebrami Liego nad ciałem K, a $\tau : h \to$ Der$g$ homomorfizmem algebr Liego. W zbiorze $g \times h$ można w naturalny sposób określić strukturę przestrzeni liniowej.

Określimy dodatkowo następujące działania

$$\forall (x,y), (z,u) \in g \times h \quad [(x,y), (z,u)] := ([x,z] + \tau_y(z) - \tau_u(x), \; [y,u])$$

Przestrzeń liniowa $g \times h$ z tym działaniem staje się algebrą Liego. Nazywamy ją sumą półprostą algebr Liego i oznaczamy jako $g\lambda_{\tau} h$ (por. [1], s. 213).

Definicja 2.4

Przez kategorię $AL(K)$ będziemy rozumieli kategorię, której obiektami są wszystkie algebry Liego nad ciałem K, a morfizmami dowolne homomorfizmy algebr Liego.

Twierdzenie 2.2

Algebra t jest produktem półprostym algebr g i h w kategorii $AL(K)$ w sensie definicji 1.8 wtedy i tylko wtedy, gdy algebra t jest izomorficzna z sumą półprostą algebr Liego g i h, tzn. istnieje taki homomorfizm $\tau : h \to \mathrm{Der} g$, że algebry t i $g\lambda_{\tau} h$ są izomorficzne.

Dowód powyższego twierdzenia pomijamy, ponieważ przebiega on analogicznie do dowodu twierdzenie 2.1.

Wykażemy jeszcze, że produkt półprosty jest uogólnieniem produktu dwóch obiektów w kategoriach z obiektem zerowym. W tym celu przypominamy najpierw definicję produktu dwóch obiektów.

Definicja 2.5

Niech A_1 i A_2 będą dowolnymi obiektami kategorii $\mathcal{U}$. Produktem obiektów A_1 i A_2 nazywamy dowolny obiekt B kategorii $\mathcal{U}$ taki, że istnieją morfizmy $\pi_1 : B \to A_1$ i $\pi_2 : B \to A_2$, spełniające następujący warunek: dla każdego obiektu X kategorii $\mathcal{U}$ i każdych dwóch morfizmów $\alpha_1 : X \to A_1$ i $\alpha_2 : X \to A_2$ istnieje dokładnie jeden morfizm $\beta : X \to B$, taki, że $\pi_1 \beta = \alpha_1$ i $\pi_2 \beta = \alpha_2$. Parę morfizmów (π_1, π_2) nazywamy parą produktową (por. [2] s. 87).

Twierdzenie 2.3

Jeżeli w kategorii $\mathcal{U}$ istnieje obiekt zerowy, wtedy każdy produkt obiektów K i B jest również ich produktem półprostym.

Dowód:

Niech obiekt A będzie produktem obiektów K i B, a para morfizmów $(\alpha : A \to K,\ \beta : A \to B)$ - parą produktową. Z definicji produktu wynika istnienie morfizmu $\varepsilon : B \to A$ takiego, że $\alpha\varepsilon = 0_{BK}$ i $\beta\varepsilon = \mathrm{id}_B$. Stąd wynika już, że morfizm B jest retrakcją.

Z definicji produktu wynika również istnienie morfizmu $\gamma: K \to A$ takiego, że zachodzą warunki:

$$\alpha\gamma = id_K. \tag{2.1}$$

$$\beta\gamma = 0_{KB}. \tag{2.2}$$

Udowodnimy, że morfizm γ jest jądrem morfizmu β. Warunek (2.2) jest warunkiem z definicji jądra. Niech $\varphi: X \to A$ będzie dowolnym morfizmem spełniającym warunek

$$\beta\varphi = 0_{XB} \tag{2.3}$$

Zdefiniujemy morfizm ϑ w następujący sposób:

$$\vartheta := \alpha\varphi \tag{2.4}$$

Na mocy (2.1) i (2.4) otrzymujemy

$$\alpha\gamma\vartheta = \vartheta = \alpha\varphi \tag{2.5}$$

Na mocy (2.2) i (2.3) zachodzi

$$\beta\gamma\vartheta = \beta\varphi \tag{2.6}$$

Z definicji produktu na mocy (2.5) i (2.6) wynika

$$\gamma\vartheta = \varphi$$

Pozostało nam wykazać jednoznaczność morfizmu ϑ. Niech ϑ' spełnia również:

$$\gamma\vartheta' = \varphi \tag{2.7}$$

Na mocy (2.1) i (2.7)

$$\vartheta = \alpha\varphi = \alpha\gamma\vartheta' = \vartheta', \quad \text{a więc } \vartheta = \vartheta'$$

§ 3. KOPRODUKT PÓŁPROSTY

W teorii kategorii każdemu pojęciu odpowiada pojęcie dualne. Pojęciu produktu półprostego odpowiada pojęcie koproduktu półprostego, którego definicję i najważniejszą własność podajemy poniżej. Opisaniem koproduktu półprostego w kategorii grup Gr zajmę się w następnej pracy.

Definicja 3.1

Obiekt A kategorii $\mathfrak{U}$ nazywamy koproduktem półprostym obiektów K i B, gdy istnieją morfizmy $\varphi: A \to K$ i $\beta: B \to A$ takie, że

a) morfizm φ jest kojądrem morfizmu β,
b) morfizm β jest koretrakcją.

Definicja 3.2

Niech A_1 i A_2 będą dowolnymi obiektami kategorii $\mathfrak{U}$. Koproduktem obiektów A_1 i A_2 nazywamy dowolny obiekt B kategorii $\mathfrak{U}$ taki, że istnieją morfizmy $\pi_1 : A_1 \to B$ i $\pi_2 : A_1$ B spełniające następujący warunek: dla każdego obiektu X kategorii $\mathfrak{U}$ i każdych dwóch morfizmów $\alpha_1 : A_1 \to X$ i $\alpha_2 : A_2 \to X$ istnieje dokładnie jeden morfizm $\beta: B \to X$ taki, że $\beta\pi_1 = \alpha_1$ i $\beta\pi_2 = \alpha_2$ (por. [2] s. 90).

Twierdzenie 3.1

Jeżeli w kategorii $\mathfrak{U}$ istnieje obiekt zerowy, wtedy każdy koprodukt obiektów K i B kategorii $\mathfrak{U}$ jest również ich koproduktem półprostym.

Dowód tego twierdzenia jest oczywiście dualny do dowodu twierdzenia 2.3.

LITERATURA

[1] Komorowski J.: Od liczb zespolonych do tensorów spinorów, algebr Liego i kwadryk. Warszawa 1978.
[2] Semadeni Z., Wiweger A.: Wstęp do teorii kategorii i funktorów. Warszawa 1978.
[3] Wawrzyńczyk A.: Współczesna teoria funkcji specjalnych. Warszawa 1978.

Recenzent: prof. dr hab. Mieczysław Kucharzewski

Wpłynęło, 07.07.1983 r.

ПОЛУПРОСТОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ И ПЛУПРОСТОЕ КОПРОИЗВЕДЕНИЕ
В КАТЕГОРИИ С НУЛЕВЫМ ОБЪЕКТОМ

Р е з ю м е

В статье вводится понятие полупростого произведения в произвольной категории с нулевым объектом. Данное произведение обобщает понятия произведения в категориях и является обобщением полупростого произведения групп и лиевых алгебр.

SEMISIMPLE PRODUCT AND SEMISIMPLE COPRODUCT IN A CATEGORY
WITH ZERO OBJECT

S u m m a r y

In the paper a definition of semisimple product in a category with zero morphisms, which is a generalization of the definition of semisimple product of groups and Lie algebrais in proposed. The notion of the semisimple product is also a generalization of a product in a category.