ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 43 Nr kol. 795

Brunon SZOCIŃSKI

WŁASNOŚCI BIPRODUKTOWYCH OBIEKTÓW ALGEBRAICZNYCH

Streszczenie. W pracy tej podano podstawowe własności obiektów algebraicznych, opartych na biprodukcie półprostym grup.

1. WSTĘP

Obiektem algebraicznym nazywamy (por. [2]) trójkę (M, G, f), złożoną z dowolnego zbioru M, dowolnej grupy abstrakcyjnej G oraz z działania f grupy G na zbiorze M, tzn. z odwzorowania $f : M \times G \to M$, spełniającego warunki:

$$\bigwedge_{x\in M} \bigwedge_{g_1, g_2 \in G} f(f(x,g_1),g_2) = f(x, g_2 \cdot g_1), \tag{1.1}$$

$$\bigwedge_{x\in M} f(x,e) = x, \tag{1.2}$$

gdzie e jest elementem neutralnym grupy G, zaś $g_1 \cdot g_1$ oznacza iloczyn w grupie G. Warunki (1.1) i (1.2) nazywamy odpowiednio równaniem fundamentalnym (translacji) i warunkiem identyczności.

Niech teraz H oraz G będą grupami z działaniami $*$ oraz $\cdot$, zaś odwzorowanie $\Phi : H \times G \to H$ działaniem grupy G na zbiorze elementów grupy H, spełniającym dodatkowy warunek

$$\Phi(h_1 * h_2, g) = \Phi(h_1, g) * \Phi(h_2, g). \tag{1.3}$$

Wtedy można utworzyć (por. [3], [6]) produkt półprosty $H_\Phi \lambda G$ tych grup. Grupa $H_\Phi \lambda G$ jest zbiorem par (h,g), gdzie $h \in H$, $g \in G$, z działaniem określonym wzorem

$$(h_2, g_2) \lambda (h_1, g_1) := (h_2 * \Phi(h_1, g_2), g_2 \cdot g_1).$$

Uogólnieniem produktu półprostego grup jest tzw. biprodukt półprosty grup, wprowadzony w pracy [6]. Pewne własności obiektów algebraicznych opartych na produkcie półprostym grup podano w pracach [3], [4] i [7]. E. Kapustka udowodnił (p. [3]), że trójka $(M, H_\Phi \lambda G, f)$ jest obiektem alge-

braicznym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją działania f_0 oraz f_1 odpowiednio grup H oraz G na zbiorze M, spełniające warunki

$$f(x,(h,g)) = f_0\left[f_1(x,g),h\right] \tag{1.4}$$

$$f_1\left[f_0(x,h),g\right] = f_0\left[f_1(x,g),\Phi(h,g)\right] \tag{1.5}$$

Celem niniejszej pracy jest podanie analogicznych twierdzeń dla obiektów algebraicznych opartych na biprodukcie półprostym trzech grup (p. § 2) oraz na biprodukcie półprostym dwóch grup (p. § 3). W ostatnim § 4 podane są pewne przykłady obiektów algebraicznych opartych na biprodukcie półprostym grup.

2. OBIEKTY ALGEBRAICZNE OPARTE NA BIPRODUKCIE PÓŁPROSTYM TRZECH GRUP

Załóżmy, że dane są grupy H, G_1, G_2, których elementami neutralnymi są odpowiednio Θ, e_1, e_2. Symbolem $*$ oznaczać będziemy działanie w grupie H, zaś symbole działań grupowych w grupach G_1 i G_2 będziemy opuszczać. Niech dane będą ponadto dwa odwzorowania $\Phi_i : H \times G_i \to H$, $i = 1, 2$, spełniające dla dowolnych $h, \bar{h} \in H$ oraz $g_i, \bar{g}_i \in G_i$ następujące warunki:

$$\Phi_1(\Phi_1(h,g_1),\bar{g}_1) = \Phi_1(h,\bar{g}_1 g_1), \tag{2.1}$$

$$\Phi_2(\Phi_2(h,g_2),\bar{g}_2) = \Phi_2(h,g_2\bar{g}_2). \tag{2.2}$$

$$\Phi_i(h,e_i) = h \quad \text{dla} \quad i = 1, 2 \tag{2.3}$$

$$\Phi_i(\bar{h}*h,g_i) = \Phi_i(\bar{h},g_i)*\Phi_i(h,g_i) \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \tag{2.4}$$

$$\Phi_2(\Phi_1(h,g_1),g_2) = \Phi_1(\Phi_2(h,g_2),g_1). \tag{2.5}$$

Z warunku (2.4) wynika, że dla każdego $g_i \in G_i$ odwzorowania Φ_i są automorfizmami grupy H, więc dla dowolnych $h \in H$ oraz $g_i \in G_i$ zachodzą równości

$$\Phi_i(\Theta,g_i) = \Theta, \quad i = 1, 2, \tag{2.6}$$

$$(\Phi_i(h,g_i))^{-1} = \Phi_i(h^{-1},g_i), \quad i = 1, 2, \tag{2.7}$$

Dla uproszczenia zapisu będziemy również stosować skrócone oznaczenia:

$$g_1h := \Phi_1(h,g_1), \quad hg_2 := \Phi_2(h,g_2). \tag{2.8}$$

Można udowodnić (p. [6]), że iloczyn kartezjański $G_2 \times H \times G_1$ z działaniem λ określonym wzorem

$$(\bar{g}_2,\bar{h},\bar{g}_1)\lambda(g_2,h,g_1) := (\bar{g}_2g_2,\Phi_2(\bar{h},g_2)*\Phi_1(h,\bar{g}_1),\bar{g}_1g_1) \tag{2.9}$$

tworzy grupę, przy czym $(e_2,\circledast,e_1)$ jest jej elementem neutralnym. Grupę tę nazywamy biproduktem półprostym grupy H przez grupy G_2,G_1 lub biproduktem półprostym grup G_2, H, G_1 i oznaczamy symbolem

$$G_2\lambda_{\Phi_2}H_{\Phi_1}\lambda G_1 \tag{2.10}$$

lub krótko $G_2\lambda H\lambda G_1$.

Tak określony biprodukt półprosty grup jest uogólnieniem produktu półprostego grup. Rzeczywiście, jeśli w charakterze grupy G_2 przyjmiemy grupę tywialną, tzn. jeśli przyjmiemy $G_2 = \{e_2\}$ oraz $\Phi_2(h,e_2) := h$ dla każdego $h \in H$, to jak łatwo zauważyć, biprodukt półprosty (2.10) jest grupą izomorficzną z produktem półprostym $H_{\Phi_1}\lambda G_1$ grupy H przez G_1.

Bezpośrednim rachunkiem można łatwo sprawdzić, że biprodukt półprosty (2.10) grupy H przez grupy G_2, G_1 posiada następujące własności (por. [6]):

$$(g_2,h,g_1) = (g_2,\circledast,e_1)\lambda(e_2,h,e_1)\lambda(e_2,\circledast,g_1), \tag{2.11}$$

$$(\bar{g}_2,\circledast,e_1)\lambda(g_2,\circledast,e_1) = (\bar{g}_2g_2,\circledast,e_1), \tag{2.12}$$

$$(e_2,\bar{h},e_1)\lambda(e_2,h,e_1) = (e_2,\bar{h}*h,e_1), \tag{2.13}$$

$$(e_2,\circledast,\bar{g}_1)\lambda(e_2,\circledast,g_1) = (e_2,\circledast,\bar{g}_1g_1), \tag{2.14}$$

$$(e_2,\circledast,g_1)\lambda(g_2,\circledast,e_1) = (g_2,\circledast,e_1)\lambda(e_2,\circledast,g_1), \tag{2.15}$$

$$(e_2,\circledast,g_1)\lambda(e_2,h,e_1) = (e_2,g_1h,e_1)\lambda(e_2,\circledast,g_1), \tag{2.16}$$

$$(e_2,h,e_1)\lambda(g_2,\circledast,e_1) = (g_2,\circledast,e_1)\lambda(e_2,hg_2,e_1). \tag{2.17}$$

W dwóch ostatnich równościach zastosowaliśmy skrócone oznaczenia (2.8). Powyższe wzory wykorzystamy w dowodzie następującego lematu.

Lemat 2.1

Jeżeli odwzorowanie $f : M \times (G_2 \wedge_{\Phi_2} H_{\Phi_1} \wedge G_1) \to M$ jest działaniem biproduktu półprostego grup (2.10) na zbiorze M, to odwzorowania $f_0 : M \times H \to M$, $f_i : M \times G_i \to M$, $i = 1, 2$, określone wzorami

$$f_0(x,h) := f(x,(e_2,h,e_1)), \tag{2.18}$$

$$f_1(x,g_1) := f(x,(e_2,\circ,g_1)), \tag{2.19}$$

$$f_2(x,g_2) := f(x,(g_2,\circ,e_1)), \tag{2.20}$$

są działaniami odpowiednio grup H, G_1 oraz G_2 na zbiorze M, spełniającymi warunki

$$f(x,(g_2,h,g_1)) = f_2\left\{f_0\left[f_1(x,g_1),h\right],g_2\right\}, \tag{2.21}$$

$$f_1\left[f_2(x,g_2),g_1\right] = f_2\left[f_1(x,g_1),g_2\right], \tag{2.22}$$

$$f_1\left[f_0(x,h),g_1\right] = f_0\left[f_1(x,g_1),\Phi_1(h,g_1)\right], \tag{2.23}$$

$$f_0\left[f_2(x,g_2),h\right] = f_2\left[f_0(x,\Phi_2(h,g_2)),g_2\right], \tag{2.24}$$

dla dowolnych $x \in M$, $h \in H$, $g_i \in G_i$, $i = 1, 2$.

Dowód:

Zgodnie z określeniem (2.18) odwzorowania f_0 mamy

$$f_0\left[f_0(x,h),\bar{h}\right] = f\left[f(x,(e_2,h,e_1)),(e_2,\bar{h},e_1)\right].$$

Ponieważ w myśl założenia, odwzorowanie f jest działaniem grupy (2.10) na zbiorze M, więc spełnia odpowiednie równanie fundamentalne. Dlatego prawą stronę powyższej równości możemy przedstawić w postaci

$$f(x,(e_2,\bar{h},e_1) \wedge (e_2,h,e_1)).$$

Stąd po uwzględnieniu kolejno wzorów (2.13) i (2.18) mamy

$$f_o\left[f_o(x,h),\bar{h}\right] = f(x,(e_2,\bar{h}*h,e_1)) = f_o(x,\bar{h}*h),$$

co oznacza, że f_o spełnia równanie fundamentalne. Odwzorowanie f spełnia także warunek identyczności:

$$f(x,(e_2,\circledcirc,e_1)) = x \quad \text{dla każdego} \quad x \in M.$$

Stąd i ze związku (2.18) wynika natychmiast, że odwzorowanie f_o również spełnia warunek identyczności. Wykazaliśmy w ten sposób, że f_o jest działaniem grupy H na zbiorze M. Podobnie w oparciu o związki (2.12), (2.14), (2.19), (2.20) dowodzi się, że f_1, f_2 są działaniami kolejno grup G_1, G_2 na zbiorze M.

Uwzględniając własność (2.11) i równanie translacji, otrzymujemy

$$f(x,(g_2,h,g_1)) = f\left\{f\left[f(x,(e_2,\circledcirc,g_1)),(e_2,h,e_1)\right],(g_2,\circledcirc,e_1)\right\}.$$

Stąd oraz ze związków (2.18) - (2.20) dostajemy zależność (2.21). Związki (2.22) - (2.24) są prostymi konsekwencjami wzorów (2.15) - (2.20) i równania translacji. Dowód własności (2.22) przebiega następująco:

$$f_1\left[f_2(x,g_2),g_1\right] = f\left[f(x,(g_2,\circledcirc,e_1)),(e_2,\circledcirc,g_1)\right] =$$

$$= f(x,(e_2,\circledcirc,g_1)\,\lambda\,(g_2,\circledcirc,e_1)) = f(x,(g_2,\circledcirc,e_1)\,\lambda\,(e_2,\circledcirc,g_1)) =$$

$$= f\left[f(x,(e_2,\circledcirc,g_1)),(g_2,\circledcirc,e_1)\right] = f_2\left[f_1(x,g_1),g_2\right].$$

Podobnie ze związku (2.16) wynika (2.23), natomiast z (2.17) wynika warunek (2.24). W ten sposób dowód lematu został zakończony.

Okazuje się, że prawdziwy jest również następujący lemat odwrotny.

<u>Lemat 2.2</u>

Jeżeli odwzorowania

$$f_o: M\times H \longrightarrow M, \quad f_i: M\times G_i \longrightarrow M, \quad i = 1, 2$$

są działaniami odpowiednio grup H, G_1, G_2 na zbiorze M, spełniającymi warunki (2.22) - (2.24), to odwzorowanie

$$f: M\times(G_2\,\lambda_{\Phi_2}\,H_{\Phi_1}\,\lambda\,G_1) \longrightarrow M,$$

określone wzorem (2.21), jest działaniem biproduktu półprostego grup $G_2 \lambda_{\Phi_2} H_{\Phi_1} \lambda G_1$ na zbiorze M.

Dowód:

Na mocy (2.23), (2.24) oraz (2.8) dla dowolnych $y,z \in M$, $h,\bar{h} \in H$, $\bar{g}_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$ mamy

$$f_1\left[f_o(y,h),\bar{g}_1\right] = f_o\left[f_1(y,\bar{g}_1),\bar{g}_1 h\right], \tag{2.25}$$

$$f_o\left[f_2(z,g_2),\bar{h}\right] = f_2\left[f_o(z,\bar{h}g_2),g_2\right]. \tag{2.26}$$

Natomiast zgodnie z (2.21) zachodzi równość

$$f\left[f(x,(g_2,h,g_1)),(\bar{g}_2,\bar{h},\bar{g}_1^{\wedge})\right] =$$

$$= f_2\left\{f_o\left[f_1(f_2\left\{f_o\left[f_1(x,g_1),h\right],g_2\right\},\bar{g}_1),\bar{h}\right],\bar{g}_2\right\}.$$

Lewą stronę tej równości oznaczmy krótko przez L. Po uwzględnieniu założenia (2.22) i związku (2.25) dla $y = f_1(x,g_1)$, powyższa równość przyjmuje postać

$$L = f_2\left\{f_o\left[f_2(f_o\left\{f_1\left[f_1(x,g_1),\bar{g}_1\right],\bar{g}_1 h\right\},g_2),\bar{h}\right],g_2\right\}.$$

Podstawiając we wzorze (2.26)

$$z = f_o\left\{f_1\ f_1(x,g_1),\bar{g}_1\right],\bar{g}_1 h\right\} = f_o\left[f_1(x,\bar{g}_1 g_1),\bar{g}_1 h\right]$$

i uwzględniając w ten sposób otrzymaną równość, mamy dalej

$$L = f_2\left\{f_2\left[f_o(f_o\left\{f_1(x,\bar{g}_1 g_1),\bar{g}_1 h\right\},\bar{h}g_2),g_2\right],\bar{g}_2\right\}.$$

Ponieważ odwzorowania f_o oraz f_2 spełniają równanie translacji, więc powyższą równość można zapisać w postaci

$$f\left[f(x,(g_2,h,g_1)),(\bar{g}_2,\bar{h},\bar{g}_1)\right] = f_2\left\{f_o\left[f_1(x,\bar{g}_1 g_1),\bar{h}h_2 * \bar{g}_1 h\ ,\bar{g}_2 g_2\right]\right\}.$$

Stąd i ze związku (2.21) wynika natychmiast, że odwzorowanie f spełnia równanie fundamentalne. Zgodnie z (2.21) mamy również

$$f(x,(e_2,\circledcirc,e_1)) = f_2\left\{f_o\left[f_1(x,e_1),\circledcirc\right],e_2\right\}.$$

Ponieważ jednak każde z odwzorowań f_0, f_1, f_2 spełnia warunek identyczności, więc $f(x,(e_2,\circledcirc,e_1)) = x$ dla dowolnego $x \in M$. Oznacza to, że f spełnia także warunek identyczności, co kończy dowód lematu.

Powyższe dwa lematy można ujęć w jedno następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.1

Odwzorowanie $f: M \times (G_2 \curlywedge_{\Phi_2} H_{\Phi_1} \curlywedge G_1) \to M$ jest działaniem biproduktu półprostego grup $G_2 \curlywedge_{\Phi_2} H_{\Phi_1} \curlywedge G_1$ na zbiorze M. Wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją działania f_0, f_1, f_2 odpowiednio grup H, G_1, G_2 na zbiorze M, spełniające warunki (2.21) - (2.24).

3. OBIEKTY ALGEBRAICZNE OPARTE NA BIPRODUKCIE PÓŁPROSTYM DWÓCH GRUP

Niech teraz $\Phi_i: H \times G \to H$, $i = 1, 2$, będą odwzorowaniami, spełniającymi warunki (2.1) - (2.5) dla $G_1 = G_2 = G$. Rozważmy biprodukt półprosty $G \curlywedge_{\Phi_2} H_{\Phi_1} \curlywedge G$ grup G, H, G oraz zbiór

$$\tilde{G} := \left\{(g,h,g):\ h \in H \wedge g \in G\right\}.$$

Okazuje się (por. [6]), że $\tilde{G}$ jest podgrupą biproduktu $G \curlywedge H \curlywedge G$. Łatwo zauważyć, że iloczyn kartezjański $H \times G$ z działaniem określonym wzorem

$$(\bar{h},\bar{g}) \curlywedge (h,g) := (\Phi_2(\bar{h},g) * \Phi_1(h,\bar{g}),\bar{g}g)$$

tworzy grupę i to izomorficzną z grupą $\tilde{G}$. Grupę tę nazywamy (por. [6]) biproduktem półprostym grupy H przez G i oznaczamy symbolem $H_{\Phi_1} \curlywedge_{\Phi_2} G$, lub krótko $H \curlywedge G$.

Bezpośrednim rachunkiem można łatwo sprawdzić, że biprodukt półprosty grupy H przez G posiada następujące własności:

$$(\bar{h},e) \curlywedge (h,e) = (\bar{h} * h,e), \tag{3.1}$$

$$(\circledcirc,\bar{g}) \curlywedge (\circledcirc,g) = (\circledcirc,\bar{g}g), \tag{3.2}$$

$$(h,g) = (hg^{-1},e) \curlywedge (\circledcirc,g) \tag{3.3}$$

$$(h,g) = (\circledcirc,g) \curlywedge (g^{-1}h,e), \tag{3.4}$$

gdzie $\circledcirc$ oraz e są elementami neutralnymi odpowiednio grup H oraz G. We wzorach (3.3) i (3.4) przyjęliśmy, podobnie jak w § 2, skrócone oznaczenia:

$$gh := \Phi_1(h,g), \quad hg := \Phi_2(h,g).$$

Odpowiednikiem lematu 2.1 jest następujący lemat.

Lemat 3.1

Jeżeli odwzorowanie $f: M\times(H_{\Phi_1}\lambda_{\Phi_2}G)\to M$ jest działaniem biproduktu półprostego $H\lambda G$ grupy H przez G na zbiorze M, to odwzorowania f_o: $M\times H\to M$ oraz f_1: $M\times G\to M$, określone wzorami

$$f_o(x,h) := f(x,(h,e)), \tag{3.5}$$

$$f_1(x,g) := f(x,(\ominus,g)), \tag{3.6}$$

są działaniami odpowiednio grup H oraz G na zbiorze M, spełniającymi związki

$$f(x,(h,g)) = f_o\left[f_1(x,g),\Phi_2(h,g^{-1})\right] \tag{3.7}$$

oraz

$$f_o\left[f_1(x,g),\Phi_2(h,g^{-1})\right] = f_1\left[f_o(x,\Phi_1(h,g^{-1})),g\right]. \tag{3.8}$$

Dowód:

Zgodnie ze wzorem (3.5) otrzymujemy

$$f_o\left[f_o(x,h),\bar{h}\right] = f\left[f(x,(h,e)),(\bar{h},e)\right].$$

Ponieważ odwzorowanie f, jako działanie grupy na zbiorze, spełnia równanie translacji, dlatego prawą stronę powyższej równości można przedstawić w postaci $f(x,(\bar{h},e)\lambda(h,e))$. Stąd po uwzględnieniu wzorów (3.1) i (3.5) otrzymujemy kolejno

$$f_o\left[f_o(x,h),\bar{h}\right] = f(x,(\bar{h}*h,e)) = f_o(x,\bar{h}*h),$$

co oznacza, że f_o spełnia równanie fundamentalne. Na mocy założenia odwzorowania f spełnia warunek identyczności. Stąd oraz z (3.5) wynika, że f_o również spełnia warunek identyczności. Tak więc f_o jest działaniem grupy H na zbiorze M. Podobnie w oparciu o związki (3.2) oraz (3.6) dowodzi się, że f_1 jest działaniem grupy G na zbiorze M.

Uwzględniając własność (3.3) i równanie translacji mamy

$$f(x,(h,g)) = f(x,(hg^{-1},e)\wedge(e,g)) = f\left[f(x,(e,g)),(hg^{-1},e)\right].$$

Stąd wobec (3.5) i (3.6) otrzymujemy (3.7). Podobnie w oparciu o własność (3.4), równanie translacji i związki (3.5), (3.6), otrzymujemy zależność

$$f(x,(h,g)) = f_1\left[f_0(x,\Phi_1(h,g^{-1})),g\right]. \tag{3.9}$$

Ze związków (3.7) i (3.9) otrzymujemy warunek (3.8). W ten sposób dowód lematu został zakończony.

Lemat 3.2

Jeżeli odwzorowania f_0 oraz f_1 są działaniami odpowiednio grup H oraz G na zbiorze M, spełniającymi warunek (3.8), to odwzorowanie $f: M\times(H_{\Psi_1}\wedge_{\Psi_2}G)\to M$, określone wzorem (3.7) jest działaniem biproduktu półprostego $H_{\Psi_1}\wedge_{\Psi_2}G$ grupy H przez G na zbiorze M.

Dowód:

Na mocy (3.8) dla $y\in M$, $k\in H$, $\bar{g}\in G$ zachodzi równość

$$f_0\left[f_1(y,\bar{g}),\Phi_2(k,\bar{g}^{-1})\right] = f_1\left[f_0(y,\Phi_1(k,\bar{g}^{-1})),\bar{g}\right].$$

Przyjmując w powyższej równości $k = \Phi_2\left[\Phi_1(h,\bar{g}),g^{-1}\right]$ i korzystając z odpowiednich własności odwzorowań Φ_1 i Φ_2, otrzymujemy

$$f_1\left\{f_0\left[y,\Phi_2(h,g^{-1})\right],\bar{g}\right\} = f_0\left\{f_1\left[y,\bar{g}\right],\Phi_2(\Phi_1(h,\bar{g}),(\bar{g}g)^{-1})\right\} \tag{3.10}$$

Natomiast zgodnie z (3.7) mamy

$$f\left[f(x,(h,g)),(\bar{h},\bar{g})\right] =$$

$$= f_0(f_1\left\{f_0\left[f_1(x,g),\Phi_2(h,g^{-1})\right],\bar{g}\right\},\Phi_2(\bar{h},\bar{g}^{-1})). \tag{3.11}$$

Podstawiając $y = f_1(x,g)$ w związku (3.10) otrzymujemy pewną zależność, z której wynika, że prawą stronę równości (3.11) można zapisać w postaci

$$f_0(f_0\left\{f_1\left[f_1(x,g),\bar{g}\right],\Phi_2(\Phi_1(h,\bar{g}),(\bar{g}g)^{-1})\right\},\Phi_2(\bar{h},\bar{g}^{-1})).$$

Stąd po uwzględnieniu równań translacji dla działań f_o i f_1 oraz zależności

$$\Phi_2(\bar{h},\bar{g}^{-1})*\Phi_2(\Phi_1(h,\bar{g}),(\bar{g}g)^{-1}) = \Phi_2\left[\Phi_2(\bar{h},g)*\Phi_1(h,\bar{g}),(\bar{g}g)^{-1}\right]$$

równość (3.11) przyjmuje postać

$$f\left[f(x,(h,g)),(\bar{h},\bar{g})\right] = f_o\left\{f_1(x,\bar{g}g),\ \Phi_2\left[\Phi_2(\bar{h},g)*\Phi_1(h,\bar{g}),(\bar{g}g)^{-1}\right]\right\}.$$

W myśl (3.7) prawą stronę powyższego związku można zapisać w postaci $f(x,(\bar{h},\bar{g})\ \lambda\ (h,g))$, co oznacza, że odwzorowanie f spełnia równania fundamentalne. Zgodnie z (3.7) mamy również

$$f(x,(\Theta,e)) = f_o\left[f_1(x,e),\Phi_2(\Theta,e)\right].$$

Ponadto odwzorowania f_o oraz f_1 spełniają warunek identyczności. Wynika stąd, że f także spełnia warunek identyczności. W ten sposób wykazaliśmy, że f jest działaniem biproduktu półprostego $H\lambda G$ na zbiorze M, co kończy dowód lematu.

Powyższe dwa lematy można ująć w jedno następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.1

Odwzorowanie $f\colon M\times(H_{\Phi_1}\lambda_{\Phi_2}G)\to M$ jest działaniem biproduktu półprostego $H_{\Phi_1}\lambda_{\Phi_2}G$ grupy H przez Θ na zbiorze M, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją działania f_o i f_1 odpowiednio grup H i G na zbiorze M, spełniające warunki (3.7) i (3.8).

Zauważmy, że produkt półprosty $H_{\Phi_1}\lambda G$ jest równocześnie biproduktem półprostym $H_{\Phi_1}\lambda_{\Phi_2}G$, jeśli przyjąć $\Phi_2(h,g) := h$ dla dowolnych $h\in H$ oraz $g\in G$. Stąd i z twierdzenia 3.1 wynika natychmiast jako prosty wniosek poniższe twierdzenie udowodnione przez E. Kapustkę w pracy [3].

Wniosek 3.1

Odwzorowanie $f\colon M\times(H_\Phi\lambda G)\to M$ jest działaniem produktu półprostego $H_\Phi\lambda G$ na zbiorze M, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją działania f_o i f_1 odpowiednio grup H i G na zbiorze M, spełniające warunki:

$$f(x,(h,g)) = f_o\left[f_1(x,g),h\right], \tag{3.12}$$

$$f_o\left[f_1(x,g),h\right] = f_1\left[f_o(x,\Phi(h,g^{-1})),g\right]. \tag{3.13}$$

Zauważmy na koniec, że warunek (3.13) można zastąpić równoważnym mu warunkiem (1.5).

4. PRZYKŁADY

Wprowadzone powyżej pojęcia i ich własności zilustrujemy na trzech przykładach.

Przykład 4.1

Rozważmy biprodukt półprosty $G_2 \rtimes_{\Phi_2} H_{\Phi_1} \rtimes G_1$ grupy H przez grupy G_2, G_1 oraz trójkę

$$(H,\ G_2 \rtimes_{\Phi_2} H_{\Phi_1} \rtimes G_1,\ f), \tag{4.1}$$

gdzie $f\colon H \times (G_2 \rtimes_{\Phi_2} H_{\Phi_1} \rtimes G_1) \to H$ jest odwzorowaniem określonym wzorem

$$f(x,(g_2,h,g_1)) := \Phi_2\left[h * \Phi_1(x,g_1), g_2^{-1}\right] \tag{4.2}$$

dla $x,h \in H$, $g_i \in G_i$, $i = 1, 2$. Aby pokazać, że odwzorowanie (4.2) jest działaniem grupy $G_2 \rtimes H \rtimes G_1$ na zbiorze H, wystarczy w myśl lematu 2.2 pokazać, że odwzorowania $f_0\colon H \times H \to H$, $f_i\colon H \times G_i \to H$ $(i = 1, 2)$, określone wzorami

$$f_0(x,h) := h * x,$$

$$f_1(x,g_1) := \Phi_1(x,g_1),$$

$$f_2(x,g_2) := \Phi_2(x,g_2^{-1}),$$

są działaniami odpowiednio grup H, G_1, G_2 na zbiorze elementów grupy H i spełniają warunki (2.21) - (2.24). Odwzorowanie f_0 jako lewa translacja (por. [7]) jest działaniem grupy H na sobie. Z warunków (2.1) - (2.3) wynika, że f_1 oraz f_2 są również działaniami kolejno grup G_1, G_2 na zbiorze H. Zgodnie z (4.2) i (2.5) działania f_0, f_1, f_2 spełniają warunki (2.21) oraz (2.22). Natomiast z (2.4) otrzymujemy natychmiast (2.23) oraz (2.24). Rzeczywiście

$$f_1\left[f_0(x,h), g_1\right] = \Phi_1(h * x, g_1) = \Phi_1(h,g_1) * \Phi_1(x,g_1) =$$

$$= \Phi_1(h,g_1) * f_1(x,g_1) = f_0\left[f_1(x,g_1), \Phi_1(h,g_1)\right],$$

więc zachodzi (2.23). Podobnie sprawdzamy warunek (2.24). Pokazaliśmy w ten sposób, że trójka (4.1) jest obiektem algebraicznym, opartym na biprodukcie półprostym grup.

Przykład 4.2

Rozpatrzmy teraz biprodukt półprosty $H_{\Phi_1} \wedge_{\Phi_2} G$ grupy H przez G oraz trójkę

$$(H,\ H_{\Phi_1} \wedge_{\Phi_2} G,\ f), \tag{4.3}$$

gdzie $f\colon H\times(H_{\Phi_1} \wedge_{\Phi_2} G) \to H$ jest odwzorowaniem określonym wzorem

$$f(x,(h,g)) := \Phi_2\left[\Phi_1(x,g)*h^{-1}, g^{-1}\right], \tag{4.4}$$

dla $x,h \in H$, $g \in G$. Na mocy lematu 3.2 trójka (4.3) z działaniem f określonym wzorem (4.4) jest obiektem algebraicznym. Aby się o tym przekonać wystarczy przyjąć

$$f_0(x,h) := x*h^{-1} \quad \text{oraz} \quad f_1(x,g) := \Phi_2\left[\Phi_1(x,g), g^{-1}\right],$$

i sprawdzić odpowiednie warunki.

Przykład 4.3

Niech teraz G będzie ogólną grupą liniową $GL(n,R)$, natomiast H - grupą, której elementami są ciągi $(A^i_{k_1k_2})$ spełniające warunek

$$A^i_{k_1k_2} = A^i_{k_2k_1} \quad \text{dla} \quad i,k_1,k_2 = 1,2,\ldots,n,$$

z dodawaniem jako działaniem grupowym

$$(B^i_{k_1k_2}) + (A^i_{k_1k_2}) = (B^i_{k_1k_2} + A^i_{k_1k_2}).$$

Niech wreszcie $\Phi_i : H\times G \to H$ $(i = 1,2)$ będą odwzorowaniami określonymi wzorami

$$\Phi_1(A^i_{k_1k_2}, A^i_k) := A^i_l A^l_{k_1k_2}, \qquad \Phi_2(A^i_{k_1k_2}, A^i_k) := A^i_{l_1l_2} A^{l_1}_{k_1} A^{l_2}_{k_2}. \tag{4.5}$$

Wówczas można utworzyć biprodukt półprosty grup $H_{\Phi_1} \wedge_{\Phi_2} G$. Okazuje się (p. [6], przykład 3.1), że biprodukt ten jest grupą różniczkową L^n_2 rzędu 2 w

przestrzeni n-wymiarowej. Jeśli teraz w przykładzie 4.2 przyjmiemy w charakterze grupy $H_{\Phi_1}\lambda_{\Phi_2}G$ grupę różniczkową L_2^n, to obiekt (4.3) z działaniem f określonym wzorem (4.4) stanie się obiektem koneksji liniowej. Aby się o tym przekonać wystarczy znane z geometrii (por. [5]) prawo transformacji parametrów koneksji liniowej

$$\Gamma^{k'}_{i'j'} = (A^{k'}_{k}\Gamma^{k}_{ij} - A^{k'}_{ij})A^{i}_{i'}A^{j}_{j'}$$

porównać ze wzorami (4.4) i (4.5). Tak więc obiekt omówiony w przykładzie 4.2 jest uogólnieniem obiektu koneksji liniowej.

LITERATURA

[1] Jasińska E.J., Kucharzewski M.: Kleinsche Geometrie und Theorie der geometrischen Objekte, Colloq. Math. 26 (1972), 271-279.

[2] Jasińska E.J., Kucharzewski M.: Grundlegende Begriffe der Kleinschen Geometrie. Demonstratio Math. 3 (1974), 381-402.

[3] Kapustka E.: Sur de géométrie transitive de Klein. Demonstratio Math. 3 (1979), 699-704.

[4] Kapustka E.: Podstawowe własności produktowych geometrii Kleina. Rozprawa doktorska na Wydz. Mat.-Fiz. Politechniki Śląskiej. 1979.

[5] Kucharzewski M.: Elementy teorii obiektów geometrycznych. Katowice 1969 (skrypt).

[6] Szociński B.: Biprodukt półprosty grup. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Mat.-Fiz. (w druku).

[7] Szociński B.: Produkt półprosty obiektów algebraicznych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Mat.-Fiz. (w druku).

Recenzent: prof. dr hab. Mieczysław Kucharzewski

Wpłynęło, 07.07.1983 r.

СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Р е з ю м е

В работе даны основные свойства алгебраических объектов, основанных на полупрямом бипроизведении групп.

PROPERTIES OF SOME BIPRODUCT ALGEBRAIC OBJECTS

S u m m a r y

In the paper the basic properties of algebraic objects, which are based on a semi-direct biproduct of groups are given.