ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 43 Nr kol. 795

Brunon SZOCIŃSKI

PRODUKT PÓŁPROSTY OBIEKTÓW ALGEBRAICZNYCH

Streszczenie. W pracy tej podano definicję i podstawowe własności produktu półprostego obiektów algebraicznych, który jest uogólnieniem produktu prostego obiektów oraz obiektu półprostego wprowadzonego w pracy [3].

1. WSTĘP

Na początek przytoczymy definicje pewnych pojęć, niezbędnych do dalszych rozważań. Niech X będzie dowolnym zbiorem, a G dowolną grupą abstrakcyjną. Działaniem grupy G na zbiorze X nazywamy odwzorowanie

$$f : X \times G \to X, \tag{1.1}$$

spełniające następujące warunki

$$\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{g_1, g_2 \in G} f(f(x, g_1), g_2) = f(x, g_2 \circ g_1), \tag{1.2}$$

$$\bigwedge_{x \in X} f(x, e) = x, \tag{1.3}$$

gdzie e jest elementem neutralnym grupy G, zaś $g_2 \circ g_1$ oznacza iloczyn w grupie G. Warunki (1.2) i (1.3) nazywamy odpowiednio równaniem fundamentalnym (translacji) i warunkiem identyczności. Działanie (1.1) grupy G na zbiorze X nazywa się efektywnym, jeśli spełnia implikację

$$\bigwedge_{x \in X} f(x, g) = x \Rightarrow g = e. \tag{1.4}$$

Za pomocą pojęcia działania grupy na zbiorze określamy pojęcie obiektu algebraicznego (por. [2]). Obiektem algebraicznym abstrakcyjnym lub krótko obiektem algebraicznym nazywamy trójkę

$$(X, G, f), \tag{1.5}$$

gdzie X jest dowolnym zbiorem, G - dowolną grupą, zaś f - działaniem grupy G na zbiorze X. Zbiór X nazywamy włóknem obiektu, a jego elementy obiektami algebraicznymi szczególnymi.

We włóknie X obiektu (1.5) można określić następującą relację równoważności

$$x_2 \sim x_1 \Longleftrightarrow \bigvee_{g\in G} x_2 = f(x_1,g).$$

Klasy abstrakcji włókna X względem tej relacji nazywają się włóknami tranzytywnymi obiektu (1.5) (por. [2]). Obiekt nazywamy tranzytywnym, jeżeli jego działanie jest tranzytywne, tzn. spełnia warunek

$$\bigwedge_{x_1,x_2\in X} \bigvee_{g\in G} f(x_1,g) = x_2. \tag{1.6}$$

Jeżeli taki element g istnieje tylko jeden, to działanie f nazywamy prosto tranzytywnym.

Niech teraz H oraz G będą grupami z działaniami $*$ oraz $\cdot$, zaś odwzorowanie

$$\Phi : H \times G \longrightarrow H \tag{1.7}$$

działaniem grupy G na zbiorze elementów grupy H, spełniającym dodatkowy warunek

$$\Phi(h_1 * h_2, g) = \Phi(h_1,g) * \Phi(h_2,g). \tag{1.8}$$

Wtedy można utworzyć produkt półprosty $H_\Phi \lambda G$ tych grup (por. [3]). Grupa $H_\Phi \lambda G$ jest zbiorem par (h,g), gdzie $h \in H$, $g \in G$ z działaniem określonym wzorem

$$(h_2,g_2)\lambda(h_1,g_1) = (h_2 * \Phi(h_1,g_2), g_2 g_1).$$

Ponieważ odwzorowanie (1.7) jest działaniem grupy G na H, możemy utworzyć obiekt algebraiczny

$$(H, G, \Phi). \tag{1.9}$$

Niech l będzie lewą translacją w H, tzn. odwzorowaniem $l : H\times H \longrightarrow H$ określonym wzorem

$$\bigwedge_{x,h\in H} l(x,h) = h * x. \tag{1.10}$$

Łatwo sprawdzić, że trójka

$$(H, H, l) \tag{1.11}$$

jest obiektem algebraicznym. Rozważmy jeszcze jeden obiekt algebraiczny

$$(H,\ H_{\Phi}\lambda G,\ F) \tag{1.12}$$

z działaniem F określonym następująco

$$F(x,h,g) = l(\Phi(x,g),h) = h*\Phi(x,g).$$

Obiekt (1.12) nazywamy obiektem abstrakcyjnym półprostym lub produktem półprostym obiektów (1.11) i (1.9). Obiekt ten jest interesujący z tego względu, że jest uogólnieniem przestrzeni afinicznej. Pojęcie obiektu półprostego wprowadził E. Kapustka w pracy [3], a następnie w swojej rozprawie doktorskiej [4] przedstawił podstawowe własności takich obiektów. Celem niniejszej pracy jest uogólnienie produktu półprostego obiektów oraz zbadanie jego podstawowych własności. Określony w § 2 produkt półprosty dwóch obiektów algebraicznych nie był dotychczas rozważany. Okazuje się (p. § 3), że jest on uogólnieniem produktu prostego obiektów algebraicznych, a także obiektu półprostego wprowadzonego przez E. Kapustkę w pracy [3]. W ostatnim paragrafie rozważa się związki między efektywnością względnie tranzytywnością produktu półprostego, a własnościami poszczególnych jego czynników.

2. OKREŚLENIE PRODUKTU PÓŁPROSTEGO OBIEKTÓW ALGEBRAICZNYCH

Niech będą dane dwa obiekty

$$(M_1,\ G,\ F_1), \tag{2.1}$$

$$(M_2,\ H,\ F_2), \tag{2.2}$$

oraz produkt półprosty grup $H_{\Phi}\lambda G$. Niech x_0 będzie dowolnym, ustalonym elementem włókna M_2 obiektu (2.2), zaś

$$H_0 := \left\{ h \in H : F_2(x_0,h) = x_0 \right\}$$

podgrupę stabilności tego obiektu w punkcie x_0. Załóżmy, że (2.2) jest obiektem tranzytywnym oraz, że odwzorowania Φ spełnia warunek

$$\bigwedge_{g\in G} \Phi(H_0,g) = H_0. \tag{2.3}$$

Przy powyższych założeniach określimy nowy obiekt

$$(M_2 \times M_1,\ H_\Phi \lambda G,\ F)_{x_0}, \tag{2.4}$$

który nazywać będziemy produktem półprostym obiektów (2.2) i (2.1) względem punktu x_0.

Z tranzytywności obiektu (2.2) wynika, że dla dowolnego $x \in M_2$ istnieje taki element $h_x \in H$, że $F_2(x_0, h_x) = x$. Symbolami $[h_x]$ oraz $[h_x]^{-1}$ oznaczmy odpowiednie warstwy lewostronną i prawostronną grupy H względem podgrupy H_0, tzn.

$$[h_x] = h_x * H_0, \quad [h_x]^{-1} = (h_x * H_0)^{-1} = H_0 * h_x^{-1}.$$

Reprezentantami tych warstw są więc odpowiednie h_x oraz h_x^{-1}.

Zauważmy, że z założenia (2.3) i warunku (1.8) wynika, że

$$\bigwedge_{g \in G} \Phi([h_x], g) = [\Phi(h_x, g)]. \tag{2.5}$$

Ponadto, dowolny element $\bar{h}_x$ warstwy $[h_x]$ spełnia równość $F_2(x_0, \bar{h}_x) = x$. Okazuje się, że również na odwrót, dowolny element $h \in H$, spełniający warunek $F_2(x_0, h) = x$ należy do warstwy $[h_x]$ (por. [6]).

Stwierdzamy w ten sposób, że wszystkie elementy h_x warstwy lewostronnej $[h_x]$ grupy H względem podgrupy H_0 i tylko one spełniają warunek $F_2(x_0, \bar{h}_x) = x$. Stąd i ze związku (2.5) wynika, że odwzorowanie

$$F : (M_2 \times M_1) \times (H_\Phi \lambda G) \longrightarrow M_2 \times M_1 \tag{2.6}$$

zdefiniowane wzorem

$$F(x, \xi, h, g) := (F_2(x, h * \Phi([h_x], g) * [h_x]^{-1}),\ F_1(\xi, g)), \tag{2.7}$$

gdzie $x \in M_2$, $\xi \in M_1$, $h \in H$, $g \in G$, jest poprawnie określone.

Udowodnimy teraz następujący lemat.

<u>Lemat 2.1</u>

Jeżeli F_1 jest działaniem grupy G na zbiorze M_1, a F_2 jest tranzytywnym działaniem grupy H na zbiorze M_2, przy czym spełniony jest warunek (2.3), gdzie H_0 oznacza podgrupę stabilności obiektu (2.2) w dowolnym, ustalonym punkcie $x_0 \in M_2$, to odwzorowanie (2.6) określone wzorem (2.7) jest działaniem grupy $H_\Phi \lambda G$ na zbiorze $M_2 \times M_1$.

Dowód:

Dla uproszczenia dowodu, zauważmy przede wszystkim, że odwzorowanie (2.7) można również określić wzorem

$$F(x,\xi,h,g) = (F_2(x,h*\Phi(h_x,g)*h_x^{-1}),\ F_1(\xi,g)). \tag{2.8}$$

Niech Θ oraz e będą elementami neutralnymi odpowiednio grupy H oraz G. Wtedy zgodnie z (2.8) mamy

$$F(x,\xi,\Theta,e) = (F_2(x,\Theta*\Phi(h_x,e)*h_x^{-1}),\ F_1(\xi,e)) = (F_2(x,h_x*h_x^{-1}),\xi) = (x,\xi),$$

zatem odwzorowanie F spełnia warunek identyczności. Dla odwzorowania F równanie fundamentalne przyjmuje postać

$$F(F(x,\xi,h_1,g_1),h_2,g_2) = F(x,\xi,h_2*\Phi(h_1,g_2),g_2\cdot g_1),$$

przy czym

$$F(F(x,\xi,h_1,g_1),h_2,g_2) = (F_2(y,h_2*\Phi(h_y,g_2)*h_y^{-1}),\ F_1(\eta,g_2)),$$

gdzie

$$y = F_2(x,h_1*\Phi(h_x,g_1)*h_x^{-1}),\qquad \eta = F_1(\xi,g_1). \tag{2.9}$$

Ponieważ $F_1(\eta,g_2) = F_1(F_1(\xi,g_1),g_2) = F_1(\xi,g_2\ g_1)$, więc aby pokazać, że F spełnia równanie fundamentalne wystarczy dowieść równości

$$F_2(y,h_2*\Phi(h_y,g_2)*h_y^{-1}) = F_2(x,h_2*\Phi(h_1,g_2)*\Phi(h_x,g_2\ g_1)*h_x^{-1}). \tag{2.10}$$

Bezpośrednim rachunkiem można łatwo sprawdzić, że

$$h_y = h_1*\Phi(h_x,g_1). \tag{2.11}$$

Istotnie

$$F_2(x_o,h_y) = F_2(F_2(x,h_x^{-1}),\ h_1*\Phi(h_x,g_1)) = F_2(x,h_1*\Phi(h_x,g_1)*h_x^{-1}) = y,$$

tzn. $F_2(x_o,h_y) = y$, co dowodzi (2.11). Uwzględniając pierwszą z równości (2.9), a następnie (2.11) mamy kolejno

$$F_2(y,h_2*\Phi(h_y,g_2)*h_y^{-1}) = F_2(F_2(x,h_1*\Phi(h_x,g_1)*h_x^{-1}),h_2*\Phi(h_y,g_2)*h_y^{-1}) =$$

$$= F_2(x,h_2*\Phi(h_y,g_2)*\Phi^{-1}(h_x,g_1)*h_1^{-1}*h_1*\Phi(h_x,g_1)*h_x^{-1}) =$$

$$= F_2(x,h_2*\Phi(h_y,g_2)*h_x^{-1}) = F_2(x,h_2*\Phi(h_1*\Phi(h_x,g_1),g_2)*h_x^{-1}) =$$

$$= F_2(x,h_2*\Phi(h_1,g_2)*\Phi(h_x,g_2\cdot g_1)*h_x^{-1}),$$

co dowodzi (2.10) i tym samym kończy dowód lematu.

Z powyższego lematu wynika, że trójka (2.4) z odwzorowaniem F, określonym wzorem (2.7), jest obiektem algebraicznym.

Definicja 2.1

Produktem półprostym tranzytywnego obiektu (2.2) przez obiekt algebraiczny (2.1), względem obiektu szczególnego $x_0 \in M_2$, nazywamy obiekt algebraiczny (2.4) z działaniem F, określonym wzorem (2.7).

Oczywiście produkt półprosty obiektów algebraicznych jest określony przy założeniu (2.3). Założenie tranzytywności obiektu (2.2) nie jest krępujące, ponieważ gdy obiekt ten nie jest tranzytywny podaną powyżej konstrukcję produktu półprostego obiektów można zastosować dla każdego włókna tranzytywnego obiektu (2.2) oddzielnie, i w ten sposób utworzyć produkt półprosty dowolnych obiektów (2.2) i (2.1). Jeśli M_{2t} dla $t \in T$ jest dowolnym włóknem tranzytywnym obiektu (2.2) oraz $M_2 = \bigcup_{t\in T} M_{2t}$ i jeśli x_{ot} jest dowolnym, ustalonym elementem zbioru M_{2t}, zaś H_{ot} - podgrupę stabilności obiektu (2.2) w punkcie x_{ot}, spełniającą dla każdego $g \in G$ warunek $\Phi(H_{ot},g) = H_{ot}$, to wspomniany produkt półprosty obiektów (2.2) i (2.1) jest obiektem algebraicznym

$$(M_2 \times M_1,\ H_{\Phi} \lambda G,\ F)_{x_{ot}} \tag{2.12}$$

z działaniem określonym wzorem

$$F(x,\xi,h,g) := (F_2(x,h*\Phi([h_x]_t,g)*[h_x]_t^{-1}),\ F_1(\xi,g)), \tag{2.13}$$

gdy $x \in M_{2t}$, $t \in T$. We wzorze tym $[h_x]_t$ oraz $[h_x]_t^{-1}$ oznaczają warstwy odpowiednio lewostronną i prawostronną grupy H względem podgrupy H_{ot}, zaś h_x taki element grupy H, że $F_2(x_{ot},h_x) = x$. W ten sposób definicję 2.1 można uogólnić.

Definicja 2.2

Produktem półprostym obiektu (2.2) przez obiekt (2.1), względem obiektów szczególnych $x_{ot} \in M_2$ nazywamy obiekt algebraiczny (2.12) z działaniem F określonym wzorem (2.13).

3. PRZYPADKI SZCZEGÓLNE

Pokażemy obecnie, że wprowadzony powyżej produkt półprosty obiektów jest uogólnieniem zarówno produktu obiektów, omówionego w pracy [2], jak i obiektu półprostego zdefiniowanego w pracy [3].

3.1. Produkt obiektów

Jeżeli odwzorowanie (1.7) określone jest wzorem $\Phi(h,g) = h$, to produkt półprosty grup $H_\Phi \lambda G$ staje się produktem prostym $H \times G$. Wtedy warunek (2.3) jest oczywiście spełniony. Ponieważ zachodzi także równość $\Phi([h_x],g) = [h_x]$, więc

$$F_2(x,h*\Phi([h_x],g)*[h_x]^{-1}) = F_2(x,h*[h_x]*[h_x]^{-1}) =$$

$$= F_2(x,h*h_x*H_o*h_x^{-1}) = F_2(F_2(x,h_x*H_o*h_x^{-1}),h) = F_2(x,h).$$

Wobec tego w tym przypadku odwzorowanie (2.6) przyjmuje postać

$$F(x,\xi,h,g) = (F_2(x,h),\ F_1(\xi,g)).$$

Wynika stąd, że produkt obiektów jest szczególnym przypadkiem produktu półprostego obiektów i to - jak łatwo zauważyć - nawet wtedy, gdy (2.2) nie jest obiektem tranzytywnym.

3.2. Obiekt półprosty

Załóżmy, że włókno M_1 jest zbiorem jednoelementowym, tzn. $M_1 = \{\xi_o\}$, oraz że obiekt (2.2) jest prosto tranzytywny. Wtedy dla każdego $g \in G$ mamy $F_1(\xi_o,g) = \xi_o$. Ponadto $H_o = \{\Theta\}$ jest podgrupą trywialną, więc warstwy grupy H względem H_o są jednoelementowe. Działanie (2.7) przyjmuje wówczas postać

$$F(x,\xi_o,h,g) = (F_2(x,h*\Phi(h_x,g)*h_x^{-1},\xi_o).$$

Produkt półprosty obiektów (2.4) z takim działaniem grupy $H\Phi\lambda G$ na włóknie $M_2 \times \{\xi_o\}$ jest równoważny (w sensie definicji 2.5 równoważności obiektów, podanej w pracy [2]) obiektowi

$$(M_2,\ H_\Phi \lambda G,\ F)_{x_0}, \tag{3.1}$$

gdzie $F(x,h,g) = F_2(x, h*\Phi(h_x, g)*h_x^{-1})$.

Przyjmując w charakterze obiektu (2.2) obiekt (1.11), gdzie l jest lewą translacją (1.10), obiekt (3.1) przyjmuje postać

$$(H,\ H_\Phi \lambda G,\ F)_{x_0}, \tag{3.2}$$

gdzie $x_0 \in H$, $F(x,h,g) = h*\Phi(x*x_0^{-1}, g)*x_0$. Rzeczywiście, w tym przypadku $h_x = x*x_0^{-1}$, zatem

$$F(x,h,g) = l(x, h*\Phi(x*x_0^{-1}, g)*x_0*x^{-1}) = h*\Phi(x*x_0^{-1}, g)*x_0.$$

Obiekt algebraiczny (3.2) nazywamy obiektem półprostym względnym, względem obiektu szczególnego x_0. Przyjmując jako x_0 element neutralny ® grupy H, otrzymujemy obiekt półprosty (1.12) omówiony w pracy [3]. Tak więc istotnie produkt półprosty (2.4) jest uogólnieniem obiektu półprostego (1.12).

Łatwo stwierdzić na przykładzie obiektu (3.2), że wartość działania F produktu półprostego obiektów (2.4) zależy od obranego punktu x_0. Oznacza to, że dla różnych elementów $x_1, x_2 \in M_2$ otrzymujemy na ogół dwa różne produkty półproste obiektów

$$(M_2 \times M_1,\ H_\Phi \lambda G,\ F')_{x_1} \quad \text{i} \quad (M_2 \times M_1,\ H_\Phi \lambda G,\ F'')_{x_2}.$$

Na przykładzie obiektu (3.2) pokażemy, że produkty takie mogą być równoważne. Udowodnimy mianowicie, że dla różnych x_1, x_2 dwa obiekty półproste

$$(H,\ H_\Phi \lambda G,\ F_i)_{x_i}, \quad i = 1, 2, \tag{3.3}$$

gdzie $F_i(x,h,g) = h*\Phi(x*x_i^{-1}, g)*x_i$, są równoważne. W tym celu należy zgodnie z definicją 2.5 podaną w pracy [2] wykazać istnienie bijekcji $\varphi: H \to H$ spełniającej równanie

$$F_2(\varphi(x), h, g) = \varphi(F_1(x,h,g)). \tag{3.4}$$

Okazuje się, że szukanym odwzorowaniem φ może być na przykład $\varphi(x) := x*x_1^{-1}*x_2$. Rzeczywiście, dla takiego φ mamy

$$F_2(\varphi(x), h, g) = h*\Phi(x*x_1^{-1}*x_2*x_2^{-1}, g)*x_2 = h*\Phi(x*x_1^{-1}, g)*x_2$$

oraz

$$\varphi(F_1(x,h,g)) = h*\Phi(x*x_1^{-1},g)*x_1*x_1^{-1}*x_2 = h*\Phi(x*x_1^{-1},g)*x_2,$$

a zatem podane φ spełnia (3.4).

4. EFEKTYWNOŚĆ I TRANZYTYWNOŚĆ PRODUKTU PÓŁPROSTEGO OBIEKTÓW

Na zakończenie zajmiemy się problemem efektywności i tranzytywności produktu półprostego obiektów algebraicznych. Okazuje się, że obiekty efektywne i tranzytywne są szczególnie interesujące ze względu na ich zastosowanie w geometrii (por. [1] i [2]). Udowodnimy trzy twierdzenia.

Twierdzenie 4.1

Produkt półprosty obiektów efektywnych jest obiektem efektywnym.

Dowód:

Rozważmy produkt półprosty (2.4) obiektów efektywnych (2.2) i (2.1), oraz załóżmy, że

$$\bigwedge_{(x,\xi)\in M_2\times M_1} F(x,\xi,h,g) = (x,\xi). \tag{4.1}$$

Wtedy

$$\bigwedge_{\xi\in M_1} F_1(\xi,g) = \xi \tag{4.2}$$

$$\bigwedge_{x\in M_2} F_2(x,h*\Phi([h_x],g)*[h_x]^{-1}) = x. \tag{4.3}$$

Z równości (4.2) i efektywności obiektu (2.1) wynika, że $g = e$. Związek (4.3) przyjmuje więc postać

$$\bigwedge_{x\in M_2} F_2(x,h*h_x*H_0*h_x^{-1}) = x. \tag{4.4}$$

Ponieważ $F_2(x,h_x*H_0*h_x^{-1}) = x$ więc z (4.4) otrzymujemy

$$\bigwedge_{x\in M_2} F_2(x,h) = x.$$

Stąd i z efektywności obiektu (2.1) wynika równość $h = \theta$. Pokazaliśmy zatem, że z (4.1) wynika, że $(h,g) = (\theta,e)$, co dowodzi efektywności obiektu (2.4), w przypadku gdy obiekt (2.2) jest tranzytywny. Jeżeli (2.2) nie

jest obiektem tranzytywnym, należy dowieść efektywności obiektu (2.12). W tym celu załóżmy, że zachodzi związek (4.1), gdzie F jest odwzorowaniem określonym związkiem (2.13). Z (4.1) otrzymujemy natychmiast równość

$$\bigwedge_{(x,\xi)\in M_{2t}\times M_1} F(x,\xi,h,g) = (x,\xi), \tag{4.5}$$

gdzie M_{2t} jest dowolnym włóknem tranzytywnym obiektu (2.2). Rozumując podobnie jak w pierwszej części dowodu stwierdzamy, że z (4.5) wynika $(h,g) = (\Theta,e)$, co dowodzi efektywności obiektu (2.12) i kończy dowód twierdzenia.

Twierdzenie 4.2

Jeżeli obiekt (2.2) jest prosto tranzytywny, zaś (1.9) jest obiektem efektywnym, to produkt półprosty (2.4) obiektu (2.2) przez (2.1) jak również obiektem efektywnym.

Dowód:

Ponieważ obiekt (2.2) jest prosto tranzytywny, więc warstwy $[h_x]$ grupy H względem podgrupy $H_0 = \{\Theta\}$ są jednoelementowe. Dlatego działanie F produktu półprostego obiektów (2.4) ma postać

$$F(x,\xi,h,g) = (F_2(x,h*\Phi(h_x,g)*h_x^{-1}),\ F_1(\xi,g)).$$

Załóżmy, że odwzorowanie to spełnia związek (4.1). Wobec tego mamy

$$\bigwedge_{x\in M_2} F_2(x,h*\Phi(h_x,g)*h_x^{-1}) = x. \tag{4.6}$$

W powyższym związku przyjmijmy $x = x_0$. Wtedy $h_x = h_{x_0} = \Theta$, a zatem $F_2(x,h*\Phi(\Theta,g)*\Theta) = x_0$, czyli $F_2(x_0,h) = x_0$. Ponieważ (2.2) jest obiektem prosto tranzytywnym, więc $h = \Theta$ jest jedynym elementem spełniającym ostatnią równość. Związek (4.6) możemy w ten sposób zapisać w postaci

$$\bigwedge_{x\in M_2} F_2(x,\Phi(h_x,g)*h_x^{-1}) = x.$$

Korzystając ponownie z tego, że obiekt (2.2) jest prosto tranzytywny stwierdzamy, że $\Phi(h_x,g)*h_x^{-1} = \Theta$, więc $\Phi(h_x,g) = h_x$. Stąd i z efektywności obiektu (1.9) wynika, że $g = e$. Udowodniliśmy w ten sposób, że zależność (4.1) pociąga za sobą równość $(h,g) = (\Theta,e)$, co dowodzi prawdziwości twierdzenia.

Twierdzenie 4.3

Produkt półprosty (2.4) obiektów tranzytywnych (2.2) i (2.1) jest obiektem tranzytywnym.

Dowód:

Należy pokazać, że dla dowolnych $(x,\xi), (y,\eta) \in M_2 \times M_1$ istnieje taki element $(h,g) \in H_\Phi \lambda G$, że $F(x,\xi,h,g) = (y,\eta)$, to znaczy

$$F_1(\xi,g) = \eta, \tag{4.7}$$

$$F_2(x, h\times\Phi([h_x],g)*[h_x]^{-1}) = y. \tag{4.8}$$

Z tranzytywności obiektu (2.1) wynika istnienie $g \in G$ takiego, że zachodzi (4.7). Aby znaleźć $h \in H$, spełniające (4.8) zauważmy, że związek ten można zapisać w postaci

$$F_2(x_1,h) = y, \quad \text{gdzie} \quad x_1 = F_2(x,\Phi([h_x],g)*[h_x]^{-1}).$$

Stąd i z tranzytywności obiektu (2.2) wynika istnienie $h \in H$, spełniającego zależność (4.8). W ten sposób dowód twierdzenia został zakończony.

LITERATURA

[1] Jasińska E.J., Kucharzewski M.: Kleineche Geometrie und Theorie der geometrischen Objekte. Colloq. Math. 26 (1972), 271-279.

[2] Jasińska E.J., Kucharzewski M.: Grundlegende Begriffe der Kleinschen Geometrie. Demonstratio Math. 3 (1974), 381-402.

[3] Kapustka E.: Sur de geometrie transitive de Klein. Demonstratio Math. 3 (1979), 699-704.

[4] Kapustka E.: Podstawowe własności produktowych geometrii Kleina. Rozprawa doktorska na Wydz. Mat.-Fiz. Politechniki Śląskiej, 1979.

[5] Kucharzewski M.: Elementy teorii obiektów geometrycznych. Katowice 1969.

[6] Moszner Z.: Structure de l'automate plein, rednit et inversible. Aequationes Math. 9 (1973), 46-59.

Recenzent: doc. dr hab. Stanisław Midura

Wpłynęło, 07.07.1983 r.

ПОЛУПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Р е з ю м е

В работе дано определение и основные свойства полупрямого произведения алгебраических объектов, которые являются обобщением прямого произведения объектов и полупрямого объекта определённого в работе [3].

SEMI-DIRECT PRODUCT OF ALGEBRAIC OBJECTS

S u m m a r y

In this paper a definition and basic properties of semi-direct product of algebraic objects which are generalization of the direct product of objects and semi-direct objects introduced in [3] are given.