

Bogdan SKALMIERSKI
Stefan KACZMARCZYK

O PEWNYM PROBLEMIE STANÓW NIEUSTALONYCH
W MECHANIZMACH O JEDNYM STOPNIU SWOBODY

Streszczenie. W pracy przedstawiono numeryczną metodę rozwiązania równania różniczkowego ruchu układów mechanicznych o jednym stopniu swobody z siłami niepotencjalnymi. Podany został sposób uzyskania funkcji określających zależność prędkości uogólnionej od położenia i od czasu oraz zależność współrzędnej uogólnionej od czasu. W zaproponowanej metodzie wykorzystano równanie bilansu energii obowiązujące dla przypadku układów zachowawczych. Przedstawiony algorytm jest bardzo dogodny w zastosowaniu w praktyce inżynierskiej i w połączeniu z ETO prowadzi do szybkiego uzyskania wyników.

1. Wstęp.

Znajomość procesów dynamicznych zachodzących w mechanizmach umożliwia dokonanie optymalnego, z punktu widzenia niezawodności eksploatacyjnej, wyboru parametrów pracy układów maszyny. Badanie tych procesów wymaga rozwiązania jednego z podstawowych zagadnień dynamiki układów nieswobodnych, jakim jest wyznaczenie ruchu, gdy dane są siły czynne działające na układ oraz zgodne z więzami położenia i prędkości początkowe. W praktyce rozwiązanie problemu identyfikacji ruchu jest szczególnie istotne przy badaniu stanów nieustalonych zespołów maszynowych, które występują np. podczas rozruchu czy wybiegu.

Rozpatrując maszynę jako układ mechaniczny o jednym stopniu swobody zadanie to sprowadza się do poszukiwania rozwiązania równania różniczkowego ruchu o następującej postaci:

$$I\ddot{q} + \frac{1}{2} \frac{dI}{dq} \dot{q}^2 = Q, \quad (1.1)$$

gdzie:

- q - współrzędna uogólniona,
- I - zredukowany moment bezwładności układu,
- Q - siła uogólniona zredukowana.

W większości przypadków równanie (1.1) można rozwiązać jedynie metodami przybliżonymi. Zagadnieniu temu zostało poświęconych wiele prac. Baranow [1] opracował numeryczną metodę rozwiązania dla najbardziej złożonego

przypadku, gdy $I = I(q)$ oraz $Q = Q(t, q, \dot{q})$. Graficzno-analityczna metoda rozwiązywania zagadnienia, gdy siła uogólniona zależy od położenia i prędkości, została zaproponowana w pracy A.A. Gołovina [5]. Badaniem układów zachowawczych z wykorzystaniem równania bilansu mocy, które przedstawione jest w następnym punkcie niniejszej pracy, zajmowali się: R. Eksbergian [3], B.E. Quinn [8], E.I. Givens i I.C. Wolford [4], C.E. Benedict i D. Tesar [2], M. Skreiner [10], [11].

Największe trudności przy określaniu ruchu układu napotyka się, gdy siła uogólniona jest funkcją zawierającą składową zależną od prędkości. Celem niniejszej pracy jest zaproponowanie metody pozwalającej na przybliżone rozwiązanie równania (1.1) w owym przypadku, wykorzystując pewne zależności obowiązujące dla układu zachowawczego.

Przedstawienie powyższej metody poprzedzą więc rozważania na temat układu zachowawczego.

2. Przypadek układu zachowawczego.

W układzie zachowawczym siłę uogólnioną można wyrazić za pomocą zależności:

$$Q = - \frac{dV}{dq} \quad (2.1)$$

gdzie:

$V = V(q)$ - potencjał.

Zakładając, że zredukowany moment bezwładności jest funkcją położenia i uwzględniając (2.1) równanie ruchu układu przyjmie postać:

$$I\ddot{q} + \frac{1}{2} \frac{dI}{dq} \dot{q}^2 = - \frac{dV}{dq} \quad (2.2)$$

Po przemnożeniu powyższego równania obustronnie przez prędkość \dot{q} otrzymamy po prawej stronie moc sił czynnych działających na układ:

$$I\dot{q}\ddot{q} + \frac{1}{2} \frac{dI}{dq} \dot{q}^3 = - \frac{dV}{dq} \dot{q} \quad (2.2a)$$

Równanie to często określone jest w literaturze jako równanie bilansu mocy [7].

Zależność (2.2a) można przekształcić do postaci:

$$d\left[\frac{1}{2} I(q) \dot{q}^2 + V(q)\right] = 0, \quad (2.3)$$

a stąd:

$$\frac{1}{2} I(q) \dot{q}^2 + V(q) = C \quad (2.3a)$$

gdzie:

C - stała.

Wartość stałej możemy otrzymać z warunków początkowych, czyli:

$$C = \frac{1}{2} J(q_0) \dot{q}_0^2 + V(q_0) \quad (2.3b)$$

Z równania (2.3a) można obliczyć prędkość:

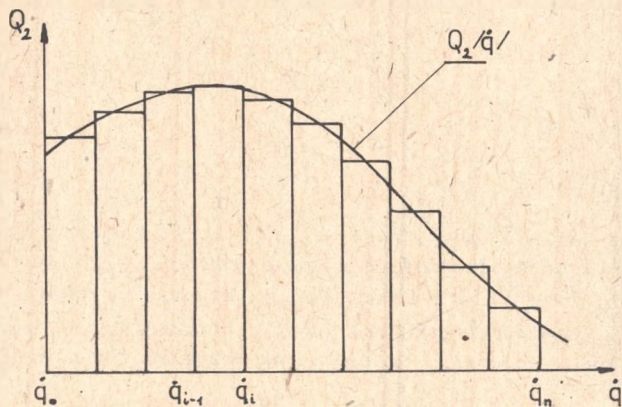
$$\dot{q} = \pm \sqrt{\frac{2[C - V(q)]}{I(q)}} \quad (2.4)$$

Podane zależności mogą zostać wykorzystane przy analizie ruchu układu, w którym działają siły zależne nie tylko od położenia ale także i od prędkości.

3. Analiza układu z siłami zależnymi od prędkości.

Rozważmy mechanizm, w którym zredukowany moment bezwładności jest funkcją położenia, a siła uogólniona zależy od położenia i prędkości, przy czym możliwe jest rozbitcie siły na dwie składowe:

$$Q = Q_1(q) + Q_2(\dot{q}). \quad (3.1)$$



Rys. 1. Przykładowy przebieg krzywej $Q_2(\dot{q})$.

Przypuśćmy, że funkcja $Q_2(\dot{q})$ ma postać jak na rys. 1. Ustalmy stały krok prędkości określony następująco:

$$\Delta \dot{q}_i = \dot{q}_i - \dot{q}_{i-1} = h \quad (3.2)$$

Zależność $Q_2(\dot{q})$ zastępujemy funkcją schodkową (rys. 1), przy założonej z góry wartości h . Stałą wartość składowej Q_2 dla poszczególnych kroków obliczamy jako średnią całkową:

$$Q_2^{i-1,i} = \frac{1}{h} \int_{\dot{q}_{i-1}}^{\dot{q}_i} Q_2(\dot{q}) d\dot{q} \quad (3.3)$$

Wobec tego na odcinku drogi $\Delta q_i = q_i - q_{i-1}$ wartość siły uogólnionej wyraża zależność:

$$Q_{i-1,i} = Q_1(q) + Q_2^{i-1,i} \quad (3.4)$$

Przyrost energii potencjalnej na drodze Δq_i można określić równaniem:

$$V_i - V_{i-1} = V_{i-1,i} = - \int_{q_{i-1}}^{q_i} [Q_1(q) + Q_2^{i-1,i}] dq \quad (3.5)$$

Całkując równanie (2.3) na rozważanej drodze, otrzymujemy wzór:

$$\dot{q}_i^2 = \frac{2(C_{i-1} - V_{i-1,i})}{I_i}, \quad i = 1 \dots n \quad (3.6)$$

gdzie:

$$C_{i-1} = \frac{1}{2} I_{i-1} \dot{q}_{i-1}^2,$$

$$I_i = I(q_i).$$

Mając dane wartości początkowe q_0, \dot{q}_0 można z równań (3.6) obliczyć wartości q_i , którym odpowiadają znane prędkości \dot{q}_i . W ten sposób otrzymujemy zależność $\dot{q}(q)$ w postaci funkcji stabelaryzowanej.

Mając tak określoną prędkość w funkcji położenia nietrudno znaleźć zależność prędkości od czasu. Wystarczy wykorzystać równość:

$$\dot{q}_i \frac{dq_i}{dt_i} = \frac{\Delta q_i}{\Delta t_i^*} \quad (3.7)$$

gdzie:

$$\Delta t_i^* = t_i^* - t_{i-1}^* ,$$

$\dot{q}_{i\text{śr}}$ - średnia wartość prędkości na drodze Δq_i ,

którą określa wzór:

$$\dot{q}_{i\text{śr}} = \frac{1}{\Delta q_i} \int_{q_{i-1}}^{q_i} \dot{q}(q) dq . \quad (3.7a)$$

Przekształcając zależność (3.7), otrzymamy:

$$t_i^* = t_{i-1}^* + \frac{\Delta q_i}{\dot{q}_{i\text{śr}}} \quad (3.7b)$$

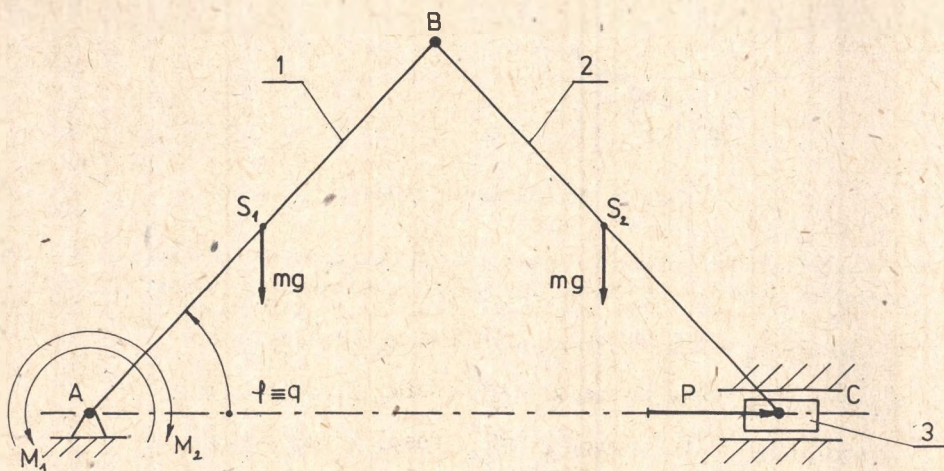
gdzie:

t_i^* - chwila, której odpowiada prędkość \dot{q}_i .

Tak więc, jeżeli znane są parametry początkowe t_0 , q_0 , \dot{q}_0 , to korzystając ze znajomości funkcji $\dot{q}(q)$, znajdujemy przybliżoną zależność $\dot{q}(t)$.

Możliwe jest także zidentyfikowanie zależności $q(t)$, jako że obliczonym wartościom t_i ze wzoru (3.7b) odpowiadają uzyskane już poprzednio wartości współrzędnej uogólnionej q_i .

Zastosowanie przedstawionej metody można zilustrować następującym przykładem:



Rys. 2. Układ korbowo-wodzikowy z momentem oporu M_2 zależny od prędkości $\dot{\varphi}$.

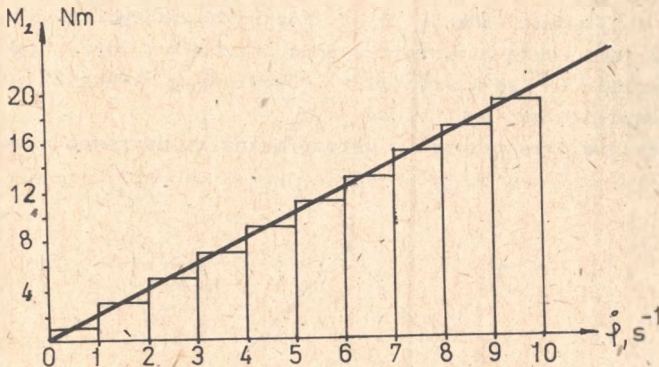
Na układ (rys. 2) działa stały moment napędowy $M_1 = 200 \text{ Nm}$, moment oporu $M_2 = 2\dot{\varphi} \text{ Nm}$ oraz stała siła P . Długości ogniw 1 i 2 są równe, tzn. $l_1 = l_2 = l = 1 \text{ m}$ oraz $AS_1 = BS_2 = \frac{1}{2} l$. Odpowiednie masy wynoszą: $m_1 = m_2 = m = 10 \text{ kg}$, $m_2 \approx 0$. Należy określić zależność prędkości $\dot{\varphi}$ od położenia, od czasu oraz funkcję $\varphi(t)$ dla fazy rozruchu, gdy $\dot{\varphi}$ zmienia się od $\dot{\varphi}_0 = 0$ do $\dot{\varphi} = 10 \text{ 1/S}$ a $\varphi \in [0; \pi]$. Przyjąć, że w chwili początkowej $t_0 = 0$ wartości współrzędnej i prędkości wynoszą: $\varphi_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = 0$. Stała siła $P = \frac{1}{2} \text{ mg}$.

Dla rozważanego układu wyrażenia na zredukowany moment bezwładności i siłę uogólnioną przyjmują postać:

$$I = \frac{2}{3} ml^2 (1 + 3 \sin^2 \varphi), \quad (3.9)$$

$$Q = M_1 - M_2 - mgl\sqrt{2} \sin(\varphi + \frac{\pi}{4}). \quad (3.10)$$

Zależność $M_2 = 2\dot{\varphi}$ zastąpiono w rozważanym przedziale prędkości funkcją schodkową, przyjmując krok $h = 1 \text{ s}^{-1}$ (rys. 3). Wartości $M_2^{i-1, i}$ uzyskuje się ze wzoru (3.3).



Rys. 3. Schodkowanie funkcji $M_2 = 2\dot{\varphi}$.

Wykorzystując zależności (3.4), (3.5) otrzymujemy równania (3.6) dla poszczególnych kroków, które dla przyjętych danych mają postać:

$$\begin{aligned} - 30 \sin^2 \varphi_1 + 414,96 \cos(\varphi_1 + \frac{\pi}{4}) + 697\varphi_1 - 304,30 &= 0 \\ - 120 \sin^2 \varphi_2 + 414,96 \cos(\varphi_2 + \frac{\pi}{4}) + 591\varphi_2 - 324,09 &= 0 \\ - 270 \sin^2 \varphi_3 + 414,96 \cos(\varphi_3 + \frac{\pi}{4}) + 585\varphi_3 - 372,44 &= 0 \\ - 480 \sin^2 \varphi_4 + 414,96 \cos(\varphi_4 + \frac{\pi}{4}) + 579\varphi_4 - 435,19 &= 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

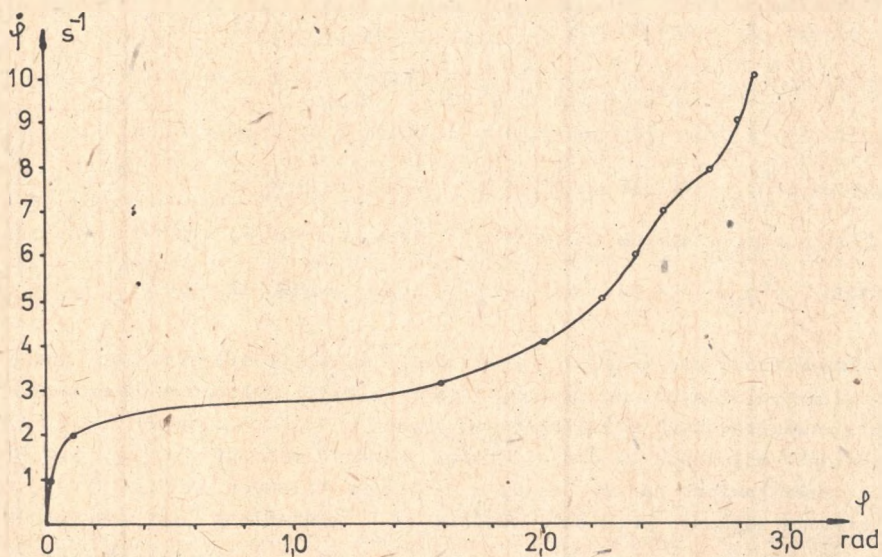
$$\begin{aligned}
 & - 750 \sin^2 \varphi_5 + 414,96 \cos(\varphi_5 + \frac{\pi}{4}) + 573\varphi_5 - 511,47 = 0 \\
 & - 1080 \sin^2 \varphi_6 + 414,96 \cos(\varphi_6 + \frac{\pi}{4}) + 567\varphi_6 - 442,62 = 0 \\
 & - 1470 \sin^2 \varphi_7 + 414,96 \cos(\varphi_7 + \frac{\pi}{4}) + 561\varphi_7 - 567,64 = 0 \\
 & - 1920 \sin^2 \varphi_8 + 414,96 \cos(\varphi_8 + \frac{\pi}{4}) + 555\varphi_8 - 702,76 = 0 \\
 & - 2430 \sin^2 \varphi_9 + 414,96 \cos(\varphi_9 + \frac{\pi}{4}) + 545\varphi_9 - 883,60 = 0 \\
 & - 3000 \sin^2 \varphi_{10} + 414,96 \cos(\varphi_{10} + \frac{\pi}{4}) + 543\varphi_{10} - 1030,33 = 0
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Przybliżone pierwiastki równań (3.11) uzyskuje się stosując jedną z metod przybliżonych, np. metodę bisekcji. Mając obliczone odpowiednie wartości współrzędnych można określić, wykorzystując równania (3.7a) i (3.7b), zależność prędkości od czasu. Wyniki obliczeń zebrano w tabeli 1, a następnie przedstawiono na rys. 4, 5, 6 w postaci krzywych $\dot{\varphi}(\varphi)$, $\dot{\varphi}(t)$ i $\varphi(t)$. W trakcie obliczeń prędkości średnie $\dot{\varphi}_{i, \text{sr}}$ określano jako średnie algebraiczne z wartości na końcach przedziału $\Delta\varphi_i$, co jest konsekwencją przybliżenia krzywej $\dot{\varphi}(\varphi)$ linią łamaną.

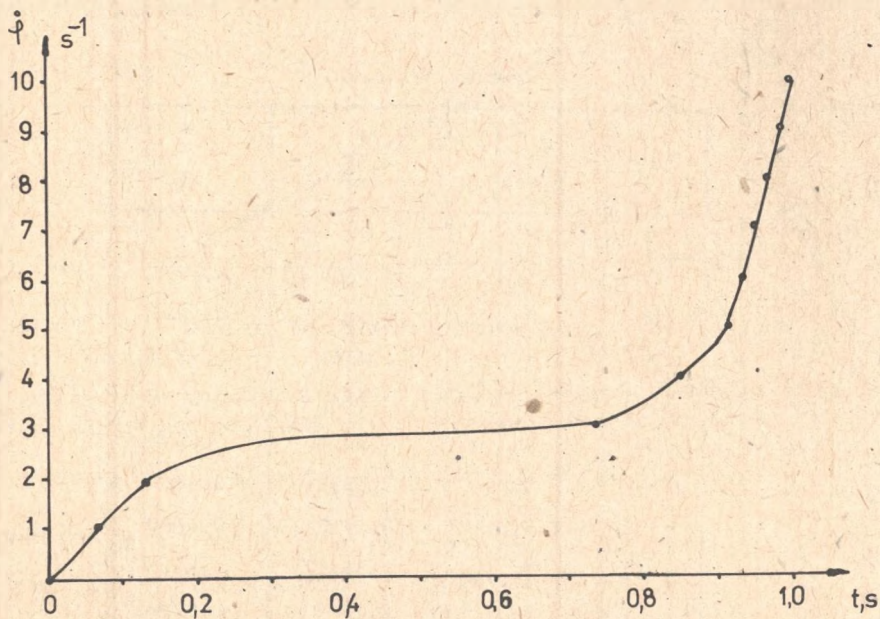
Tabela 1.

Wyniki obliczeń.

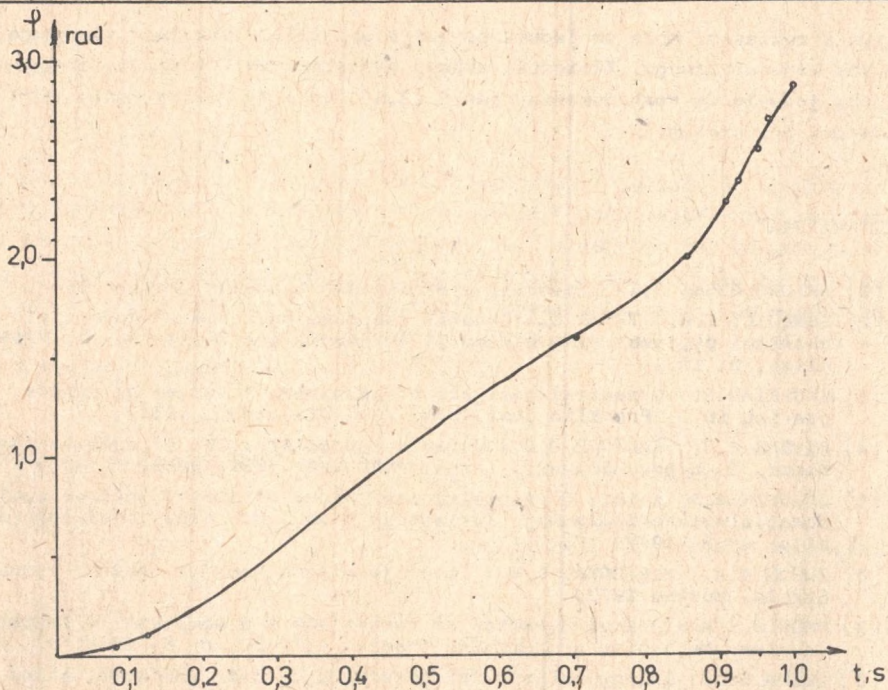
i	$\dot{\varphi}_i$ t/sek	φ_i rad	t_i^* sek
0	0	0	0
1	1	0,0368	0,0736
2	2	0,1104	0,1227
3	3	1,6322	0,7314
4	4	2,0740	0,8576
5	5	2,3194	0,9122
6	6	2,3992	0,9267
7	7	2,5510	0,9500
8	8	2,6875	0,9682
9	9	2,7857	0,9798
10	10	2,8901	0,9908



Rys. 4. Zależność prędkości uogólnionej od położenia.



Rys. 5. Zależność prędkości uogólnionej od czasu



Rys. 6. Współrzędna uogólniona w funkcji czasu.

4. Uwagi i wnioski.

Zaproponowana w pracy metoda, identyfikacji ruchu układów z siłami zależnymi od położenia i prędkości odróżnia się od istniejących metod graficzno-numerycznych prostotą i dogodnością w zastosowaniu w praktyce. Metoda powyższa jest metodą numeryczną i użycie maszyny cyfrowej w obliczeniach prowadzi do szybkiego uzyskania wyników.

Przedstawiony algorytm można wykorzystać tylko w przypadku układów, w których możliwe jest rozbitcie funkcji określającej siłę uogólnioną na składową zależną od położenia i składową zależną od prędkości. W praktyce nie zawsze jest to osiągalne. Niemniej jednak omówiona metoda obejmuje szeroką klasę zagadnień technicznych. Dokładność obliczeń zależy przede wszystkim od wielkości kroku h przy schodkowaniu funkcji $Q_2(q)$. Użycie EMC pozwala przyjąć krok dowolnie mały i jedynym ograniczeniem w tym przypadku jest czas obliczeń. Zaproponowany algorytm pozwala na uzyskanie zależności $q(q)$, $\dot{q}(t)$ i $q(t)$ w postaci funkcji stabilizowanych. Analityczny opis tych zależności można otrzymać poprzez zastosowanie interpolacji lub aproksymacji. Błąd opisu zależy wówczas od przyjętej metody.

Przedstawiony sposób przybliżonego rozwiązania równania ruchu układu o jednym stopniu swobody z siłami niepotencjalnymi został zilustrowany pro-

stym przykładem. Może on jednak posłużyć do analizy dowolnie złożonego łańcucha kinematycznego. Złożoność układu analizowanego omówioną metodą prowadzi jedynie do rozbudowania równań (3.6), co przy zastosowaniu EMC nie stanowi przeszkody.

LITERATURA

- [1] ARTOBILEWSKI I.I.: Teoriya mekhanizmov i maszin. Nauka, Moskwa 1975.
- [2] BENEDICT C.E., TESAR D.: Dynamic response analysis of quasi-rigid mechanical systems using kinematic influence coefficients. I. Mechanisms, 6, 1971.
- [3] EKSERIAN R.: Dynamical analysis of machines. A series of papers appearing in J. Franklin Inst. 209, 210, 211, 1930, 1931.
- [4] GIVENS E.J., WALFORD J.C.: Dynamic characteristics of spatial mechanisms. J. Engng. Indust., Trans. ASME, ser. B91, 1969.
- [5] GOŁOWIN A.A. i in.: Opriedielenije zakona dwizenija metodom posliedowatielnykh približenij. Izwestija Wyss. Uc. Zaw. Maszynostrojenije, nr 8, 1977.
- [6] IUDIN W.A., PIETROKAS L.W.: Teoriya mekhanizmov i maszin. Vyszejaja Szkoła, Moskwa 1977.
- [7] PAUL B.: Analytical dynamics of mechanisms - a computer oriented overview. Mechanism and Machine Theory, vol. 10, nr 6, 1975.
- [8] QUINN B.E.: Energy methods for determining dynamic characteristics of mechanisms. J. Appl. Mech., 16, 1949.
- [9] SKALMIERSKI B.: Mechanika. PWN, Warszawa 1977.
- [10] SKREINER M.: Dynamic analysis used to complete the design of mechanisms. J. Mechanisms, 5, 1970.
- [11] SKREINER M., ROBERTS B.: The dynamics of the hydraulically actuated linkage mechanisms. Trans. Inst. of Engrs., Australia, vol. MC3 1967.

О НЕКОТОРОЙ ПРОБЛЕМЕ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ СОСТОЯНИЙ В МЕХАНИЗМАХ С ОДНОЙ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Р е з ю м е

В работе представлен метод численного решения дифференциального уравнения движения механических систем с одной степенью свободы, в которых существуют непотенциальные силы. Предложен метод получения функций определяющих зависимость обобщенной скорости от положения и времени а также зависимость обобщенной координаты от времени. В методе использовано уравнение баланса энергии, которое обобщает в случае консервативных систем. Представленный алгоритм очень удобно использовать в инженерской практике а его осуществление с применением ЭВМ ведет к скорому получению результатов.

ABOUT ONE PROBLEM OF UNFIXED STATES
IN MECHANISMS WITH ONE DEGREE OF FREEDOM

S u m m a r y

A method of numerical solution of differential equation of motion for mechanic systems with one degree of freedom with unpotential forces has been described in this article. There has been given the way to get relations between generalized velocity, position and time. In this method the equation of power balance for conservative systems is used. The algorithm described in the work is very useful in engineering and with application of a computer it gives results very quickly.

Wpłynęło do Redakcji 19.XI.1979 r.

Racenzent

Doc. dr hab. inż. Bohdan Mochnacki