

Stanisław BRACHMAN

Romuald SZOPA

ZASTOSOWANIE METODY LINEARYZACJI STATYSTYCZNEJ
DO NIELINIOWEGO STOCHASTYCZNEGO RÓWNANIA RÓŻNICZKOWEGO
DRUGIEGO RZĘDU

Streszczenie. W pracy zastosowano metodę linearyzacji statystycznej do badania gęstości spektralnej rozwiązania nieliniowego równania różniczkowego. Zagadnienie rozwiązano nie zakładając, jak na ogół czyni się to w literaturze, że proces występujący po prawej stronie równania (1) jest białym szumem. Przeprowadzono numeryczną analizę, a na wykresach przedstawiono gęstość spektralną rozwiązania w zależności od wartości parametrów występujących w rozważanym równaniu.

Ponieważ w ogólnym przypadku nie jest możliwe rozwiązanie stochastycznego nieliniowego równania różniczkowego, dlatego też stosuje się często metodę linearyzacji statystycznej, dzięki której sprowadza się rozważane równanie do równania liniowego.

Ideę linearyzacji statystycznej podali R.C. Booton i J.E. Kazakow [1-3]. Polega ona na zastąpieniu wyrażenia nieliniowego przez wyrażenie liniowe przy zastosowaniu zadanego kryterium w określonym sensie probabilistycznym.

Rozważać będziemy równanie postaci:

$$\ddot{y}(t, \omega) + 2n\dot{y}(t, \omega) + k^2 y(t, \omega) + \frac{1}{3} \gamma y^3(t, \omega) = x(t, \omega) \quad (1)$$

gdzie:

$x(t, \omega), y(t, \omega)$ - procesy stochastyczne,

n, k, γ - stałe.

Zakładamy, że $x(t, \omega)$ jest procesem stacjonarnym, $E x(t, \omega) = 0$ oraz gęstość spektralną $g_x(\omega) = \frac{2c\alpha}{\omega^2 + \alpha^2}$, gdzie c, α - stałe.

Z postaci gęstości spektralnej wynika, że funkcja korelacji procesu $x(t, \omega)$ ma postać $K_x(\tau) = D e^{-\alpha|\tau|}$.

D - stała dodatnia.

Równanie (1) można interpretować jako drgania oscylatora harmonicznego z nieliniową sprężystością [5].

Oznaczając

$$z(t, \omega) = y^3(t, \omega) \quad (2)$$

szukamy procesu

$$z_1(t, \omega) = a(t)[y(t, \omega) - E y(t, \omega)] + b(t)$$

(gdzie $a(t)$, $b(t)$ - funkcje nielosowe), dla którego spełnione są warunki:

$$E z(t, \omega) = E z_1(t, \omega) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} E\{z(t, \omega) - a(t)[x(t, \omega) - E x(t, \omega)] - b(t)\}^2 = \\ = \text{minimum, [2, 3, 6, 7]}. \end{aligned} \quad (4)$$

W przypadku rozważanego procesu $z(t, \omega)$ postać procesu $z_1(t, \omega)$ jest następująca [3, 6]:

$$z_1(t, \omega) = 3 \sigma_y^2 y(t, \omega) \quad (5)$$

Po linearyzacji równanie (1) przyjmuje postać:

$$\ddot{y}(t, \omega) + 2n\dot{y}(t, \omega) + (k^2 + \gamma\sigma_y^2)y(t, \omega) = x(t, \omega) \quad (6)$$

Dla równania (6) gęstość widmowa rozwiązania $g_y(\omega)$ spełnia zależność [4-7]:

$$g_y(\omega) = \frac{1}{|(1\omega)^2 + 2n1\omega + k^2 + \gamma\sigma_y^2|^2} g_x(\omega) \quad (7)$$

czyli

$$g_y(\omega) = \frac{2\alpha c}{\{(\omega^2 + 2n^2 - k^2 - \gamma\sigma_y^2)^2 + 4n^2(k^2 + \gamma\sigma_y^2 - n^2)\}(\omega^2 + \alpha^2)} \quad (8)$$

o stałych n, k, γ, c, α zakładamy, że są dodatnie oraz że jest spełniony warunek:

$$k^2 + \gamma\sigma_y^2 - n^2 > 0. \quad (9)$$

Występującą we wzorze (8) wariancję rozwiązania σ_y^2 można otrzymać z zależności [4, 6, 7]:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_y(\omega) d\omega \quad (10)$$

zatem

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha c d\omega}{\{(\omega^2 + 2n^2 - k^2 - \gamma\sigma_y^2)^2 + 4n^2(k^2 + \gamma\sigma_y^2 - n^2)\}(\alpha^2 + \omega^2)} \quad (11)$$

Niech

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{[(\omega^2 + d)^2 + f^2](\omega^2 + \alpha^2)}$$

Oznaczając przez $b = k^2 + \gamma\sigma_y^2$ i $c = \sqrt{b - n^2}$ mamy, że:

$$I = 2 \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{[(\omega^2 + d)^2 + f^2](\omega^2 + \alpha^2)} = 2 \int_0^{\infty} \frac{A\omega + B}{\omega^2 - 2\omega c + b} d\omega + \int_0^{\infty} \frac{C\omega + D}{\omega^2 + 2\omega c + b} d\omega$$

$$+ \int_0^{\infty} \frac{E\omega + F}{\omega^2 + \alpha^2} d\omega = 2 \frac{A}{2} \ln \left| \frac{\omega^2 - 2\omega c + b}{\omega^2 + 2\omega c + b} \right| + \frac{Ac + B}{\sqrt{b-c^2}} \left| \arctg \frac{\omega - c}{\sqrt{b-c^2}} \right| + \frac{C\omega + D}{\sqrt{b-c^2}} \left| \arctg \frac{\omega + c}{\sqrt{b-c^2}} \right|$$

$$+ \frac{F}{\alpha} \arctg \frac{\omega}{\alpha} \Big|_0^{\infty} = 2 \left[\frac{Ac + B}{b - c^2} \pi + \frac{F}{\alpha} \cdot \frac{\pi}{2} \right]$$

gdzie

$$A = C = \frac{b - \alpha^2 - 4c^2}{4bc(\alpha^4 - 2\alpha^2(b - 2c^2) + b^2)}$$

$$B = D = \frac{\alpha^2 - 2(b - 2c^2)}{2b(\alpha^4 - 2\alpha^2(b - 2c^2) + b^2)}$$

$$E = 0, F = \frac{1}{\alpha^4 - 2\alpha^2(b - 2c^2) + b^2}$$

Zatem

$$\sigma_y^2 = \frac{c(\alpha + 2n)}{2n\alpha b(\alpha^2 + b + 2\alpha n)} \quad (12)$$

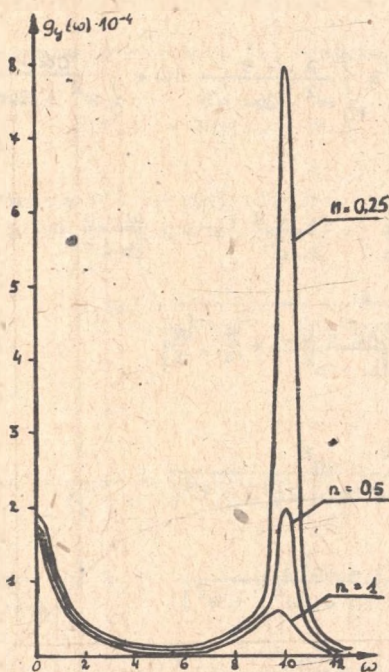
Oznaczając przez $s = \frac{c(\alpha + 2n)}{2n\alpha}$ i $\sigma_y^2 = t$ otrzymujemy równanie

$$\gamma^2 t^3 + \gamma(\alpha^2 + 2\alpha n + 2k^2(t^2 + k^2)\alpha^2 + 2\alpha n + k^2)t - s = 0 \quad (13)$$

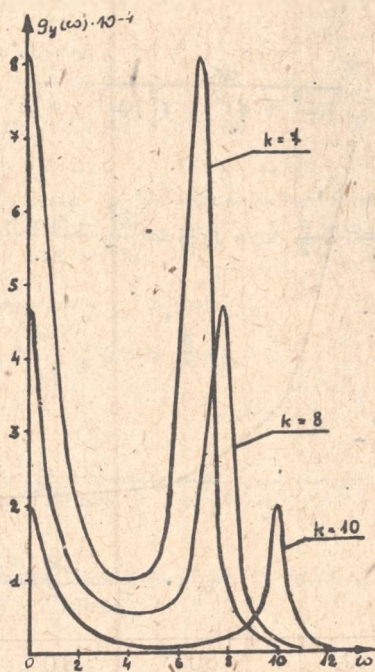
Równanie to posiada dodatni pierwiastek rzeczywisty (lewa strona równania w zerze ma wartość ujemną i w nieskończoności zdąża do ∞). Przy nieznacznych ograniczeniach na wartości parametrów można wykazać (np. korzystając z ciągu Sturma), że równanie ma dokładnie jeden dodatni pierwiastek rzeczywisty.

Obliczenie wariancji σ_y^2 oraz wyznaczenie funkcji gęstości $g_y(\omega)$ przeprowadzono numerycznie dla różnych wartości parametrów.

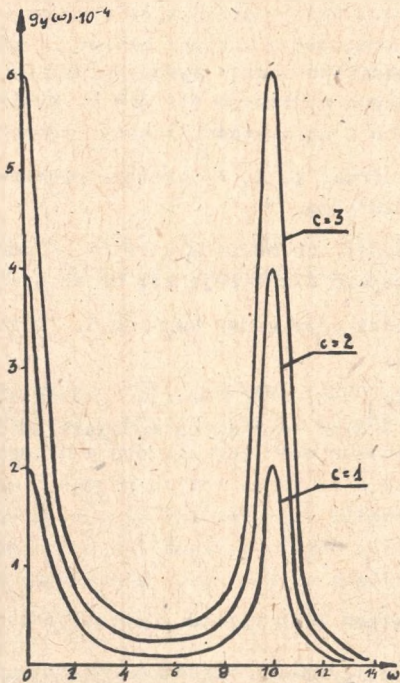
Wykresy funkcji gęstości otrzymane na podstawie tych obliczeń przedstawiono na rys. 1-4 (ze względu na parzystość funkcji gęstości tylko dla $\omega \geq 0$).



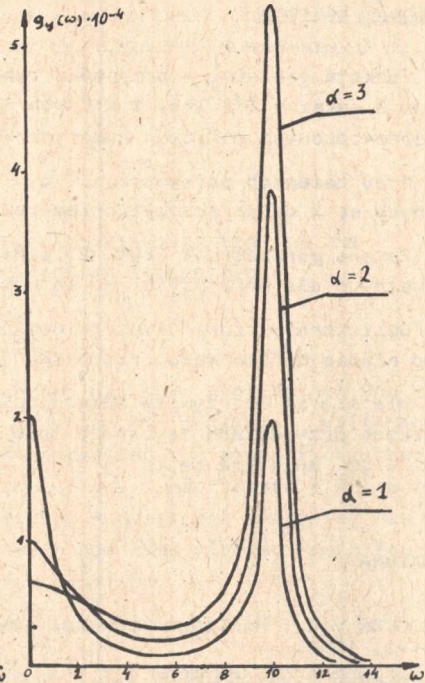
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Rys. 1 przedstawia wykresy funkcji gęstości przy zmiennym $n/n = 0,25$, $n = 0,5$, $n = 1$ oraz ustalonych $k = 10$, $\gamma = 1$, $c = 1$, $\alpha = 1$. Dla większych wartości n (większego współczynnika tłumienia) wartości funkcji gęstości są mniejsze.

Rys. 2 przedstawia wykresy funkcji gęstości przy zmiennym k ($k = 7$, $k = 8$, $k = 10$) oraz ustalonych $n = 0,5$, $\gamma = 1$, $c = 1$, $\alpha = 1$. Dla większych k (większego współczynnika sprężystości) wartości funkcji gęstości są mniejsze.

Większym wartościom c (większa stała w funkcji korelacji procesu $x(t, \omega)$) odpowiadają większe wartości funkcji gęstości - rys. 3, dla której przyjęto $c = 1$, $c = 2$, $c = 3$ oraz $n = 0,5$, $k = 10$, $\gamma = 1$, $\alpha = 1$.

Wykres funkcji gęstości przy zmiennym α ($\alpha = 1$, $\alpha = 2$, $\alpha = 3$) oraz ustalonych $n = 0,5$, $c = 1$, $k = 10$, $\gamma = 1$ przedstawia rys. 4.

Dla małych wartości ω większym α (współczynnik w wykładniku eksponenty funkcji korelacji) odpowiadają mniejsze wartości funkcji gęstości. Dla większych wartości ω jest na odwrót.

Wnioski końcowe

1. Funkcja gęstości w przypadku funkcji korelacji typu $K_X(\tau) = De^{-\alpha(\tau)}$ posiada 3 maksima lokalne, z których jedno występuje dla $\omega = 0$. Wynika to z przeprowadzonych obliczeń numerycznych i przystości funkcji gęstości.
2. Przy zmianach parametrów n, c, α (rys. 1, 3, 4) odcięte punktów maksymalnych są z dużym przybliżeniem takie same.
3. Zmiana parametru k (rys. 2) powoduje, że odcięte skrajnych punktów maksymalnych dla mniejszych k są mniejsze i zbliżają się do zera.
4. Obliczone wartości funkcji gęstości przy zmiennym $\gamma \in \langle 0, 5; 2 \rangle$ różnią się od siebie bardzo mało (rzędu 10^{-9}).
5. Dla $\omega \geq 14$ otrzymane numerycznie wartości funkcji gęstości we wszystkich przypadkach są bardzo małe - dla $\omega = 14$ są mniejsze od 10^{-7} , dla $\omega = 30$ mniejsze od 10^{-8} .

LITERATURA

- [1] BOOTON R.C.: Nonlinear control systems with random inputs, Trans. IRE, CT-1, 1954.
- [2] JEWŁANOW L.G., KAZAKOW I.E.: Statisticheskoe issledowanie nelinejnykh, awtokolebatielnykh sistem w ustanowiwiezichsja režimach. Awtomatika i Telemekhanika 12, 1969.
- [3] KAZAKOW I.E.: Priblizennyj wierojatnostnyj analiz tocznostki raboty suszcziestwienno nelinejnykh sistem. Awtom. i Telemekhanika 27, 5, 1956.
- [4] PAPOULIS S.: Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne. WNT, Warszawa 1972.
- [5] SKALMIERSKI B.: Mechanika z wytrzymałością materiałów dla automatyków. PWN, Warszawa 1973.
- [6] SKALMIERSKI B., TYLIKOWSKI A.: Procesy stochastyczne w dynamice. PWN, Warszawa 1972.
- [7] SOBCZYK K.: Metody dynamiki statystycznej. PWN, Warszawa 1973.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ
К НЕЛИНЕЙНОМУ СТОХАСТИЧЕСКОМУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ
УРАВНЕНИЮ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Р е з ю м е

В работе применен метод статистической линеаризации к проблеме исследования спектральной плотности решения нелинейного дифференциального уравнения. Проблему решили пренебрегая повсеместно делаемой в литературе предпосылкой о том, что процесс выступающий с правой стороны уравнения 1 является

белым шумом. Провели нумерический анализ и представили на графиках спектральную плотность решения в зависимости от параметров выступающих в рассматриваемом уравнению.

AN APPLICATION OF THE METHOD OF STATISTICAL LINEARIZATION TO THE
NONLINEAR STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION OF SECOND ORDER

S u m m a r y

The method of statistical linearization has been applied to the investigation of spectral density of the solution of nonlinear differential equation. The problem has been solved neglecting the assumption that the process occurring at the right hand side of eq. 1 represents a white noise, what is as a rule assumed in a literature. A numerical analysis has been made and spectral density of the solution has been plotted as a function of the parameters coccurring in analysed equation.

Wpłynęło do Redakcji 9.III.1978 r.

Recenzent

Prof. dr hab. inż. Bogdan Skalmierski