ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria MATEMATYKA-FIZYKA z. 39 Nr kol. 686

Barbara LUKS-OGRODNIK

METODA TRANSFORMATY CZEBYSZEWA W APROKSYMACJI FUNKCJI DWÓCH ZMIENNYCH Cz. II. POCHODNE CZĄSTKOWE CZEBYSZEWA RZĘDU $\alpha > 0$ (UŁAMKOWE POCHODNE)

Streszczenie. W pracy uogólniono wyniki P.L. Butzera i R.L.Stensa na przestrzeń funkcji dwóch zmiennych $L^p_{[-1,1;-1,1]}$ z mieszanymi potęgami oraz wagą $w(x_1,x_2)$.

1. Wstęp

Niech $X = L^p_w$ będzie przestrzenią unormowaną funkcji określonych i mierzalnych na zbiorze $[-1,1;-1,1]$, dla których

$$\|f\| = \left\{\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left|f(x_1,x_2)\right|^{p_1} w(x_1)dx_1\right]^{\frac{p_2}{p_1}} w(x_2)dx_2\right\}^{\frac{1}{p_2}},$$

$$p_i \geqslant 1 \quad , \quad i = 1,2 ,$$

$$w(x_i) = (1 - x_i^2)^{-\frac{1}{2}}$$

W pracy [3] zostały zdefiniowane i udowodnione pewne własności operatora translacji $\tau_{h_1,h_2} f$, transformaty Czebyszewa $\mathcal{T}[f](k_1,k_2)$, splotu funkcji $f \in X$ $g \in L^{11}_w$ oraz pierwszych pochodnych cząstkowych Czebyszewa. Krótko przypomnimy podstawowe definicje.

Operatorem translacji $\tau_{h_1,h_2} f$ nazywamy operator:

$$(\tau_{h_1h_2} f)(x_1,x_2) = \frac{1}{4}\left\{f[x_1h_1 + \sqrt{(1 - x_1^2)(1 - h_1^2)};\right.$$

$$x_2h_2 + \sqrt{(1-x_2^2)(1-h_2^2)}\Big] + f\Big[x_1h_1 + \sqrt{(1-x_1^2)(1-h_1^2)};$$

$$x_2h_2 - \sqrt{(1-x_2^2)(1-h_2^2)}\Big] + f\Big[x_1h_1 - \sqrt{(1-x_1^2)(1-h_1^2)};$$

$$x_2h_2 + \sqrt{(1-x_2^2)(1-h_2^2)}\Big] + f\Big[x_1h_1 - \sqrt{(1-x_1^2)(1-h_1^2)};$$

$$x_2h_2 - \sqrt{(1-x_2^2)(1-h_2^2)}\Big]\Big\};$$

gdzie $|h_i| \leqslant 1$; $i = 1,2$; $|x_i| \leqslant 1$.

Transformatę Czebyszewa funkcji $f \in X$ definiujemy następująco:

$$\mathcal{T}[f](k_1,k_2) = f^{\wedge}(k_1,k_2) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x_1,x_2)T_{k_1}(x_1)T_{k_2}(x_2)w(x_1)w(x_2)dx_1dx_2$$

gdzie: $k_i \in P$, $T_{k_i}(x_i) = \cos(k_i \arccos x_i)$ $i = 1,2$ jest wielomianem Czebyszewa. $P = \{0,1,2,\ldots\}$.

Splotem dwóch funkcji $f, g \in X$ nazywamy:

$$(f \circledast g)(x_1,x_2) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (\tau_{x_1x_2} f)(u_1,u_2)g(u_1,u_2)w(u_1)w(u_2)du_1du_2$$

o ile ta całka istnieje.

Dokonując kolejno złożeń operatora $\tau_{h_1h_2} f$ otrzymamy:

$$\tau^j_{h_1h_2} f = \tau^1_{h_1h_2}(\tau^{j-1}_{h_1h_2} f).$$

Będziemy często korzystać z oczywistych własności tego złożenia, zawartych w następującym lemacie:

L e m a t 1.1. Niech $f \in X$, $|h_i| \leqslant 1$; $i = 1,2$; $j \in N = \{1,2,3,\ldots\}$. Wtedy

$$\text{(i)}\ \|\tau^j_{h_1h_2} f\| \leqslant \|f\|.$$

(ii) $[\tau^j_{h_1h_2} f]^\wedge(k_1,k_2) = T^j_{k_1}(h_1)T^j_{k_2}(h_2)f^\wedge(k_1,k_2) \quad k_1,k_2 \in P = \{0,1,2\ldots\}$

(iii) $(\tau^j_{h_1h_2} T_{n_1n_2})(x_1,x_2) = T^j_{n_1n_2}(h_1,h_2)T_{n_1n_2}(x_1,x_2),$

gdzie:

$$T_{n_1n_2}(x_1,x_2) = T_{n_1}(x_1) \cdot T_{n_2}(x_2)$$

Dowody tych własności wynikają wprost z definicji złożenia i z analogicznych własności operatora translacji $\tau_{h_1h_2} f$ udowodnionych w pracy [3].

2. Różnice i pochodne cząstkowe Czebyszewa rzędu $\alpha > 0$

Definicja 2.1. Niech $f \in X$, $\alpha > 0$, to różnicą Czebyszewa funkcji f rzędu $\alpha > 0$ nazwiemy

$$(\Delta^\alpha_{h_1h_2} f(x_1x_2) = (-1)^{[\alpha]} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} (\tau^j_{h_1h_2} f)(x_1,x_2)$$

gdzie $[\alpha]$ jest częścią całkowitą α, $\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-j+1)}{j!}$

Lemat 2.1. Niech $f \in X$, $\alpha > 0$, $|h_i| \leqslant 1$ $i = 1,2$. Wtedy:

(i) $\|\Delta^\alpha_{h_1h_2}\| f \| \leqslant M_\alpha \|f\|$

(ii) $[\Delta^\alpha_{h_1h_2} f]^\wedge(k_1,k_2) = (-1)^{[\alpha]}[1 - T_{k_1k_2}(h_1,h_2)]^\alpha \cdot f^\wedge(k_1,k_2);\ k_i \in P$

(iii) $\lim\limits_{\substack{(h_1,h_2)\to(1,1)\\ |h_i|\leqslant 1}} \|\Delta^\alpha_{h_1h_2} f\| = 0$

(iv) $[\Delta^\alpha_{h_1h_2}(\Delta^\beta_{h_1h_2} f)](x_1,x_2) = (-1)^{[\alpha]+[\beta]-[\alpha+\beta]}(\Delta^{\alpha+\beta}_{h_1h_2} f)(x_1,x_2)$ p.w.

(v) $\|\Delta^{\alpha+\beta}_{h_1h_2} f\| \leqslant M_\beta \|\Delta^\alpha_{h_1h_2} f\|$

(vi) $(\Delta^\alpha_{h_1h_2}(f \circledast g))(x_1,x_2) = ((\Delta^\alpha_{h_1h_2} f) \circledast g)(x_1,x_2)$ p.w.

Dowód:

(i) Ponieważ szereg norm spełnia nierówność

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left\| (-1)^j \binom{\alpha}{j} \tau^j_{h_1 h_2} f \right\| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \left| \binom{\alpha}{j} \right| \cdot \left\| \tau^j_{h_1 h_2} f \right\| \leqslant M_\alpha \cdot \|f\|$$

gdzie $M_\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \left| \binom{\alpha}{j} \right| \leqslant 2^{\{\alpha\}}$; $\{\alpha\} = \inf \{ k \in P;\ k \geqslant \alpha \}$

więc nierówność z (i) jest spełniona.

(ii) $$[\Delta^\alpha_{h_1 h_2} f]^\wedge(k_1, k_2) = (-1)^{[\alpha]} \cdot \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} (\tau^j_{h_1 h_2} f)(x_1, x_2) \cdot$$

$$\cdot T_{k_1}(x_1) \cdot T_{k_2}(x_2) \cdot w(x_1, x_2) dx_1 dx_2 =$$

$$= (-1)^{[\alpha]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} (\tau^j_{h_1 h_2} f)(x_1, x_2) \cdot T_{k_1}(x_1) \cdot T_{k_2}(x_2) \cdot w(x_1, x_2) dx_1 dx_2 =$$

$$= (-1)^{[\alpha]} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} [\tau^j_{h_1 h_2} f]^\wedge(k_1, k_2) =$$

$$= (-1)^{[\alpha]} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} T^j_{k_1 k_2}(h_1, h_2) \cdot f^\wedge(k_1, k_2) =$$

$$= (-1)^{[\alpha]} [1 - T_{k_1 k_2}(h_1, h_2)]^\alpha \cdot f^\wedge(k_1, k_2)$$

$$T_{k_1 k_2}(x_1, x_2) = T_{k_1}(x_1) \cdot T_{k_2}(x_2)$$

Drugą nierówność w dowodzie mogliśmy napisać, gdyż szereg

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \left| (-1)^j \binom{\alpha}{j} (\tau^j_{h_1 h_2} f)(x_1, x_2) T_{k_1}(x_1) \cdot T_{k_2}(x_2) \right| w(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

jest zbieżny, a w równości następnej skorzystaliśmy z własności (ii) lematu 1.1.

(iii) Obliczmy $(\Delta^{\alpha}_{h_1h_2} T_{k_1k_2})(x_1,x_2)$. Mamy:

$$(\Delta^{\alpha}_{h_1h_2} T_{k_1k_2})(x_1,x_2) = (-1)^{[\alpha]} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} T^j_{k_1k_2}(h_1,h_2) T_{k_1k_2}(x_1,x_2) =$$

$$= (-1)^{[\alpha]} T_{k_1k_2}(x_1,x_2)[1 - T_{k_1k_2}(h_1,h_2)]^{\alpha}$$

i dalej

$$\lim_{\substack{(h_1,h_2)\to(1,1)\\ |h_i|\leq 1}} \|\Delta^{\alpha}_{h_1h_2} T_{k_1k_2}\| = \lim_{\substack{(h_1,h_2)\to(1,1)\\ |h_i|\leq 1}} \left|1 - T_{k_1k_2}(h_1,h_2)\right|^{\alpha} \cdot$$

$$\cdot \|T_{k_1,k_2}(x_1,x_2)\| = 0$$

Ponieważ zbiór wielomianów Czebyszewa jest gęsty w X oraz $\{\Delta^{\alpha}_{h_1,h_2} f\}$ jest rodziną liniowych operatorów $X \to X$ wspólnie ograniczonych, więc z twierdzenia Banacha-Steinhausa wynika teza.

(iv) Równość tę wykażemy poprzez wykazanie równości transformat. Na podstawie własności (ii) mamy:

$$[\Delta^{\alpha}_{h_1h_2}(\Delta^{\beta}_{h_1h_2} f)]^{\wedge}(k_1,k_2) =$$

$$= (-1)^{[\alpha]} (-1)^{[\beta]} [1 - T_{k_1k_2}(h_1,h_2)]^{\alpha} [1 - T_{k_1k_2}(h_1,h_2)]^{\beta} \cdot f^{\wedge}(k_1,k_2) =$$

$$= (-1)^{[\alpha]+[\beta]-[\alpha+\beta]} \left[\Delta^{\alpha+\beta}_{h_1h_2} f\right]^{\wedge}(k_1,k_2)$$

co daje równości (iv) prawie wszędzie.

(v) Korzystając z poprzednio udowodnionej własności i własności (i) mamy:

$$\|\Delta^{\alpha+\beta}_{h_1h_2} f\| = \|\Delta^{\beta}_{h_1h_2}(\Delta^{\alpha}_{h_1h_2} f)\| \leq M_{\beta} \|\Delta^{\alpha}_{h_1h_2} f\|$$

(vi) Podobnie jak w dowodzie własności (iv) równość (vi) wykażemy poprzez wykazanie równości transformat. Mamy

$$[\Delta^{\alpha}_{h_1h_2}(f \circledast g)]^{\wedge}(k_1,k_2) = (-1)^{[\alpha]}[1 - T_{k_1k_2}(h_1,h_2)]^{\alpha}\,[f \circledast g]^{\wedge}(k_1,k_2) =$$

$$=(-1)^{[\alpha]}[1 - T_{k_1k_2}(h_1,h_2)]^{\alpha} \cdot f^{\wedge}(k_1,k_2) \cdot g^{\wedge}(k_1,k_2) =$$

$$= [\Delta^{\alpha}_{h_1h_2}f]^{\wedge}(k_1,k_2) \cdot g^{\wedge}(k_1,k_2) = [(\Delta^{\alpha}_{h_1h_2}f) \circledast g]^{\wedge}(k_1,k_2).$$

Drugą równość w dowodzie można było napisać korzystając z twierdzenia o transformacie splotu tw. 1 [3], a z twierdzenia o jednoznaczności tranforamt [(iv) l. 1 [3]] otrzymujemy równość (vi) prawie wszędzie.

<u>Definicja 2.2</u>. Niech $f \in X$, $\alpha > 0$. Jeżeli istnieje funkcja $g_1 \in X$, taka, że

$$\lim_{h_1 \to 1^-} \left\| \frac{\Delta^{\alpha}_{h_1 1} f}{(1 - h_1)^{\alpha}} - g_1 \right\| = 0,$$

to funkcję g_1 nazwiemy pochodną cząstkową (ułamkową) Czebyszewa względem x_1 rzędu α i zapiszemy $D^{(\alpha)}_{x_1} f = g_1$.

Podobnie, jeżeli istnieje funkcja $g_2 \in X$ taka, że

$$\lim_{h_2 \to 1^-} \left\| \frac{\Delta^{\alpha}_{1 h_2} f}{(1 - h_2)^{\alpha}} - g_2 \right\| = 0,$$

to funkcję g_2 nazwiemy pochodną cząstkową Czebyszewa rzędu α względem x_2 i zapiszemy

$$D^{(\alpha)}_{x_2} f = g_2.$$

L e m a t 2.2. Niech $f \in X$, $\alpha > 0$. Jeżeli istnieją $D^{(\alpha)}_{x_i} f \in X$; $i = 1,2$, to zachodzi następująca równość:

$$[D^{(\alpha)}_{x_i} f]^{\wedge}(k_1,k_2) = (-1)^{[\alpha]}\,(k_i)^{2\alpha} f^{\wedge}(k_1,k_2).$$

W przypadku gdy $\alpha \in N$, równość ta ma postać:

$$\left[D_{x_i}^{(\alpha)} f\right]^{\wedge}(k_1,k_2) = (-k_i^2)^{\alpha} \cdot f^{\wedge}(k_1,k_2).$$

DOWÓD:

Niech $i = 1$. Ponieważ $|f^{\wedge}(k_1,k_2)| \leqslant \|f\|$, więc:

$$\left| \frac{[\Delta^{\alpha}_{h_1 1} f]^{\wedge}(k_1,k_2)}{(1-h_1)^{\alpha}} - [D_{x_1}^{(\alpha)} f]^{\wedge}(k_1,k_2) \right| \leqslant \left\| \frac{\Delta^{\alpha}_{h_1 1} f}{(1-h_1)^{\alpha}} - D_{x_1}^{(\alpha)} f \right\|$$

Z założenia lematu wynika, że prawa strona nierówności dąży do zera, gdy $h_1 \to 1^-$, czyli

$$\lim_{h_1 \to 1^-} \frac{(-1)^{[\alpha]} [1 - T_{k_1 k_2}(h_1,1)]^{\alpha} \cdot f^{\wedge}(k_1,k_2)}{(1-h_1)^{\alpha}} = [D_{x_1}^{(\alpha)} f]^{\wedge}(k_1,k_2)$$

Ponieważ

$$\lim_{h_1 \to 1^-} \frac{[1 - T_{k_1}(h_1)]^{\alpha}}{(1-h_1)^{\alpha}} = k_1^{2\alpha},$$

więc równość została wykazana.

Dla $i = 2$ dowód przebiega analogicznie.

L e m a t 2.3. Niech $f \in X$, $g \in L_w^{(1,1)}$ i istnieją $D_{x_i}^{\alpha} f \in X$, $i = 1,2$; wtedy istnieją $D_{x_i}^{(\alpha)}(f \circledast g)$ i zachodzi równość

$$D_{x_i}^{(\alpha)}(f \circledast g) = (D_{x_i}^{(\alpha)} f) \circledast g \quad \text{prawie wszędzie.}$$

DOWÓD:

Wykażemy, że pochodna splotu istnieje prawie wszędzie i jest równa $(D_{x_i}^{(\alpha)} f) \circledast g$. Korzystając z własności (vi) lematu 2.2 oraz twierdzenia 1 z [3] mamy dla $i = 1$

$$\left\| \frac{\Delta^{\alpha}_{h_1 1}(f \circledast g)}{(1-h_1)^{\alpha}} - (D^{(\alpha)}_{x_1} f) \circledast g \right\| = \left\| \frac{(\Delta^{\alpha}_{h_1 1} f) \circledast g}{(1-h_1)^{\alpha}} - (D^{(\alpha)}_{x_1} f) \circledast g \right\| =$$

$$\left\| \left(\frac{\Delta^{\alpha}_{h_1 1} f}{(1-h_1)^{\alpha}} - D^{(\alpha)}_{x_1} f \right) \circledast g \right\| \leqslant \left\| \frac{\Delta^{\alpha}_{h_1 1} f}{(1-h_1)^{\alpha}} - D^{(\alpha)}_{x_1} f \right\| \cdot \|g\|_{L_w^{(1,1)}}$$

Prawa strona nierówności dąży do zera, gdy $h_1 \to 1^-$, co daje tezę.

Zdefiniujemy teraz operator, który nazwiemy splotem względem jednej zmiennej i wykażemy kilka jego własności, a dalej wykażemy dwa twierdzenia dla pochodnych cząstkowych Czebyszewa.

Definicja 2.3. Niech f będzie określona i mierzalna w obszarze $I = [-1,1; -1,1]$, g będzie funkcję jednej zmiennej x_1 określoną i mierzalnę w $I_1 = [-1,1]$.

Jeżeli istnieje całka

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} (\tau_{x_1,x_2} f)(u_1,1) \cdot g(u_1) \cdot w(u_1) du_1 ,$$

to nazwiemy ją splotem funkcji f i g względem zmiennej x_1 i zapiszemy:

$$(f *_1 g)(x_1,x_2) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} (\tau_{x_1,x_2} f)(u_1,1) \cdot g(u_1) . w(u_1) du_1$$

Podobnie zdefiniujemy splot funkcji $f(x_1,x_2)$ i $g(x_2)$ względem zmiennej x_2.

LEMAT 2.4. Niech $f \in X$, $g \in L^1_w$, wtedy $f *_1 g$ istnieje prawie wszędzie w I oraz

(i) $\|f *_1 g\| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|_{L^1_w}$

(ii) $[f *_1 g]^{\wedge}(k_1,k_2) = f^{\wedge}(k_1,k_2) \cdot g^{\wedge}(k_1)$

DOWÓD:

Wykażemy wpierw istnienie splotu prawie wszędzie, a później dwie podstawowe własności (i), (ii).

Niech A_2 będzie podzbiorem zbioru $[-1,1]$ miary zero, czyli $|A_2| = 0$ takim, że

$$\bigwedge_{x_2 \notin A_2} \quad \bigvee_{\substack{A_1 = A_1(x_2) \\ |A_1| = 0}} \quad \bigwedge_{x_1 \notin A_1} \quad \text{splot istnieje.}$$

Przez B oznaczmy zbiór

$$B = \{(x_1,x_2) \in I;\ \ x_2 \notin A_2 \ \text{ i } \ x_1 \notin A_1(x_2)\}$$

Wykażemy, że zbiór $I \setminus B$ ma miarę zero

$$(x_1,x_2) \in I \setminus B \Longleftrightarrow x_2 \in A_2 \quad \text{lub} \quad x_1 \in A_1(x_2)$$

$$|I \setminus B| = \iint_I \chi_{I\setminus B}(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2 = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} \chi_{I\setminus B}(x_1,x_2)\,dx_1\right)dx_2 =$$

$$= \int_{A_2}\left(\int_{-1}^{1} \chi_{I\setminus B}(x_1,x_2)\,dx_1\right)dx_2 + \int_{I\setminus A_2}\left(\int_{-1}^{1} \chi_{I\setminus B}(x_1,x_2)\,dx_1\right)dx_2 =$$

$$= \int_{I_2\setminus A_2}\left(\int_{A_1(x_2)} dx_1\right)dx_2 = \int_{I_2\setminus A_2} |A_1(x_2)|\,dx_2 = 0$$

Wykazaliśmy więc, że splot istnieje poza zbiorem miary zero w iloczynie kartezjańskim $I_1 x I_2 = I$.

W dowodzie własności (i), korzystając z uogólnionej nierówności Minkowskiego, mamy:

$$\|f *_1 g\| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \left| (\tau_{x_1 x_2} f)(u_1,1) \right|^{P_1} w(x_1)\,dx_1 \right]^{\frac{P_2}{P_1}} w(x_2)\,dx_2 \right\}^{\frac{1}{P_2}} \cdot$$

$$\cdot |g(u_1)|\,w(u_1)\,du_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \|\tau_{u_1,1}\| \cdot |g(u_1) w(u_1)\,du_1 \leq \|f\| \cdot \|g\|_{L^1_w}$$

(ii)

$$[f * _1 g]^{\wedge}(k_1,k_2) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} (\tau_{x_1,x_2} f)(u_1,1) g(u_1) w(u_1) du_1\right] T_{k_1}(x_1) T_{k_2}(x_2) w(x_1,x_2) dx_1 dx_2 =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} [\tau_{u_1,1} f]^{\wedge}(k_1,k_2) g(u_1) w(u_1) du_1 =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} T_{k_1}(u_1) T_{k_2}(1) f^{\wedge}(k_1,k_2) g(u_1) w(u_1) du_1 = f^{\wedge}(k_1,k_2) \cdot g^{\wedge}(k_1)$$

L e m a t 2.5. Niech $\alpha > 0$. Istnieje funkcje $\varkappa_\alpha(x_i,h_i)$ $i = 1,2$, $h_i \in [-1,1)$ taka, że $\varkappa_\alpha(x_i,h_i) \in L^1_w$ oraz

(i) $\|\varkappa_\alpha(x_i,h_i)\|_{L^1_w} \leqslant M$

(ii) $$[\varkappa_\alpha(x_i,h_i)]^{\wedge}(k_i) = \begin{cases} \dfrac{[1 - T_{k_i}(h_i)]^\alpha}{[\frac{1}{2}(k_i \arccos h_i)^2]^\alpha} & \text{dla } k_i \in N \\ 1 & k_i = 0 \end{cases}$$

Dla $\alpha = r \in N$

$$\varkappa_r(x_i,h_i) = \underbrace{\varkappa(x_i,h_i) \circledast \ldots \circledast \varkappa(x_i,h_i)}_{r-\text{razy}} \quad - \text{ splot funkcji}$$

jednej zmiennej x_i, $i = 1,2$. Gdzie

$$\varkappa(x_i,h_i) = \begin{cases} \dfrac{2\pi(\arccos(h_i) - \arccos(x_i))}{\arccos^2 h_i} & h_i \leqslant x_i \leqslant 1 \\ 0 & -1 \leqslant x_i \leqslant h_i \end{cases}$$

(iii) $$\lim_{h_i \to 1^-} \int_{-1}^{1-\eta} |\varkappa_\alpha(u,h_i)| w(u) du = 0 \qquad \eta \in (0,1)$$

Dowód lematu w pracach P.L. Butzera i R.L. Stensa [1] [2].

Wykażemy teraz dwa podstawowe twierdzenia dla pochodnych cząstkowych Czebyszewa rzędu $\alpha > 0$.

Twierdzenie 2.1. Niech $f \in X$, $\alpha > 0$. Następujące dwa warunki są równoważne.

(i) pochodna $D_{x_i}^{(\alpha)} f$ istnieje i należy do X, $i = 1,2$.

(ii) istnieje funkcja $g_i \in X$, taka, że

$$(-1)^{[\alpha]} k_i^{2\alpha} f^{\wedge}(k_1,k_2) = g_i^{\wedge}(k_1,k_2); \quad k_1,k_2 \in P$$

Dowód przeprowadzimy dla $i = 1$. Dla $i = 2$ dowód przebiega analogicznie.

(i) $\Longrightarrow$ (ii). Wynikanie to jest oczywiste, gdyż za funkcję g_1 przyjmiemy pochodną $D_{x_1}^{(\alpha)} f$, której istnienie zapewnia warunek (i). Pochodna $D_{x_1}^{(\alpha)} f$ spełnia warunek (ii) zgodnie z lematem 2.2 (ii) $\Longrightarrow$ (i).

Rozpatrzmy $\dfrac{\Delta^{\alpha}_{h_1 1} f}{(\frac{1}{2}\arccos^2 h_1)^{\alpha}}$. Wykażemy, że $\dfrac{\Delta^{\alpha}_{h_1 1} f}{(\frac{1}{2}\arccos^2 h_1)} = g_1 \ast_1 \mathcal{H}_{\alpha}(x_1,h_1)$

prawie wszędzie. Równość tę wykażemy poprzez wykazanie równości transformat Czebyszewa.

Obliczmy transformatę lewej strony dowodzonej równości. Na podstawie własności transformaty oraz własności (ii) z lematu 2.1 mamy:

$$\left[\frac{\Delta^{\alpha}_{h_1 1} f}{(\frac{1}{2}\arccos^2 h_1)^{\alpha}}\right]^{\wedge}(k_1,k_2) = \frac{(-1)^{[\alpha]}\,[1 - T_{k_1}(h_1)]^{\alpha}}{(\frac{1}{2}\arccos^2 h_1)^{\alpha}} \cdot f^{\wedge}(k_1,k_2)$$

Obliczając transformatę strony prawej korzystamy z założenia oraz z własności: (ii) lematu 2.4, (ii) z lematu 2.5.

Mamy:

$$[g_1 \ast_1 \mathcal{H}_{\alpha}]^{\wedge}(k_1,k_2) = g^{\wedge}(k_1,k_2) \cdot [\mathcal{H}_{\alpha}]^{\wedge}(k_1) =$$

$$= (-1)^{[\alpha]} k_1^{2\alpha} f^{\wedge}(k_1,k_2) \cdot \mathcal{H}_{\alpha}^{\wedge}(k_1) = (-1)^{[\alpha]} k_1^{2\alpha} f^{\wedge}(k_1,k_2) \begin{cases} \left[\dfrac{1 - T_{k_1}(h_1)}{\frac{1}{2}(k_1 \arccos h_1)^2}\right]^{\alpha}; & k_1 \in N \\ 1 & ; k_1 = 0 \end{cases}$$

Równość transformat jest widoczna. Korzystając z udowodnionej równości mamy:

$$\left\| \frac{\Delta^{\alpha}_{h_1 1} f}{(\frac{1}{2}\arccos^2 h_1)^{\alpha}} - g \right\| = \| g *_1 \varkappa_{\alpha}(x_1, h_1) - g \| =$$

$$= \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \left[(\tau_{x_1 x_2} g)(u_1, 1) - g(x_1 x_2) \right] \varkappa_{\alpha}(u_1, h_1) w(u_1) du_1 \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \| \tau_{u_1 1} g - g \| \, |\varkappa_{\alpha}(u_1, h_1)| w(u_1) du_1 =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1-\eta} \| (\tau_{u_1 1} g) - g \| \, |\varkappa_{\alpha}| w(u_1) du_1 + \frac{1}{\pi} \int_{1-\eta}^{1} \| (\tau_{u_1 1} g) - g \| \, |\varkappa_{\alpha}(u_1, h_1)| w(u_1) du_1 =$$

$$= I_1 + I_2$$

Oszacujemy każdą z tych całek osobno.

$$I_1 \leqslant \frac{1}{\pi} \cdot 2 \cdot \|g\| \int_{-1}^{1-\eta} |\varkappa_{\alpha}(u_1, h_1)| w(u_1) du_1 .$$

Na podstawie własności (iii) z lematu 2.5 mamy:

$$\lim_{h_1 \to 1^-} I_1 \leqslant \lim_{h_1 \to 1^-} \frac{2\|g\|}{\pi} \int_{-1}^{1-\eta} |\varkappa_{\alpha}(u_1, h_1)| w(u_1) du_1 = 0.$$

Oszacujmy drugą całkę - I_2. Zgodnie z własnością (i) lematu 2.5 oraz własnością pierwszej różnicy cząstkowej $\Delta^{1}_{h_1 1} g$ udowodnionej w lemacie 2 [(iii) [3]] mamy:

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \quad \bigvee_{\eta > 0} \quad \bigwedge_{u_1} \eta \leqslant |u_1| \leqslant 1 \Longrightarrow \| (\tau_{u_1 1} g) - g \| < \varepsilon$$

$I_2 \leqslant \varepsilon M$ jest więc dowolnie małe.

Zostało więc udowodnione, że

$$\lim_{h_1 \to 1^-} \left\| \frac{\Delta^{\alpha}_{h_1 1} f}{(\frac{1}{2}\arccos^2 h_1)^{\alpha}} - g \right\| = 0$$

Ponieważ

$$\lim_{h_1 \to 1^-} \frac{\frac{1}{2}\arccos^2 h_1}{1 - h_1} = 1,$$

więc

$$\lim_{h_1 \to 1^-} \left\| \frac{\Delta^{\alpha}_{h_1 1} f}{(1 - h_1)^{\alpha}} - g \right\| = 0,$$

czyli funkcja f ma pochodną cząstkową Czebyszewa rzędu α względem x_1 i i $D^{(\alpha)}_{x_1} f = g \in X$, co kończy dowód.

Dla ułatwienia zapisu następnego twierdzenia wprowadzimy teraz pewne oznaczenia. Mianowicie:

$$W^{\alpha}_{x_i} = \left\{ f \in X; \bigvee_{D^{(\alpha)}_{x_i} f} \quad i \quad D^{(\alpha)}_{x_i} f \in X \qquad i = 1,2 \right\}$$

$I^{\alpha}_1 f = f *_1 \varphi_{\alpha}$, gdzie φ_{α} wyznaczana jest przez swoją transformatę następująco:

$$\varphi_{\alpha}^{\wedge}(k) = \begin{cases} (-1)^{[\alpha]} \cdot k^{-2\alpha} & k \in N \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

Funkcja $\varphi_{\alpha} \in L^1_w$. Podobnie definiujemy $I^{\alpha}_2 f$. Istnienie funkcji jest wykazane w pracy [1]

Twierdzenie 2.2. Niech $f \in X$; $\alpha, \beta > 0$, $i = 1,2$. Wtedy: (i) operator $D^{(\alpha)}_{x_i} : W^{\alpha}_{x_i} \to X$ jest domknięty

(ii) $W^{\alpha}_{x_i} \subset W^{\beta}_{x_i}$, jeśli $0 < \beta \leqslant \alpha$

(iii) $D^{\alpha}(D^{\beta} f) = (-1)^{[\alpha]+[\beta]-[\alpha+\beta]} D^{\alpha+\beta} f$ o ile pochodne te istnieją.

(iv) $f \in W^{\alpha}_{x_i} \Rightarrow D^{\alpha}_{x_i}(I^{\alpha}_1 f) = I^{\alpha}_1(D^{\alpha}_{x_i} f)$ prawie wszędzie.

DOWÓD:

(i) Musimy wykazać, że jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0$, $\{f_n\} \subset W^{\alpha}_{x_i}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty}\|D^{(\alpha)}_{x_i} f_n - g_i\| = 0$, to $f \in W^{\alpha}_{x_i}$ i $D^{(\alpha)}_{x_i} f = g_i$ prawie wszędzie.

Ponieważ $|(-1)^{[\alpha]} k_i^{2\alpha} f_n^{\wedge}(k_1,k_2) - g_i^{\wedge}(k_1,k_2)| \leqslant \|D^{(\alpha)}_{x_i} f_n - g_i\|$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{\wedge}(k_1,k_2) = f^{\wedge}(k_1,k_2)$ więc $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{[\alpha]} k_i^{2\alpha} f_n^{\wedge}(k_1,k_2) = (-1)^{[\alpha]} k_i^{2\alpha} f^{\wedge}(k_1,k_2) = g_i^{\wedge}(k_1,k_2)$.

Na podstawie twierdzenia 2.1 istnieje $D^{(\alpha)}_{x_i} f = g_i$.

(ii) Zakładamy, że istnieje $D^{(\alpha)}_{x_i} f = g_i$ $\alpha \geqslant \beta > 0$. Zgodnie z lematem 2.2 $g_i^{\wedge}(k_1,k_2) = (-1)^{[\alpha]} k_i^{2\alpha} f^{\wedge}(k_1,k_2)$.

Rozpatrzmy funkcję $h_i(x_1,x_2) = I_i^{\alpha-\beta} g_i \dfrac{(-1)^{[\beta]}}{(-1)^{[\alpha-\beta]+[\alpha]}}$ i obliczmy jej transformatę Czebyszewa:

$$h_i^{\wedge}(k_1,k_2) = \frac{(-1)^{[\beta]}}{(-1)^{[\alpha-\beta]+[\alpha]}} \cdot g_i^{\wedge}(k_1,k_2) \cdot \varphi^{\wedge}_{\alpha-\beta}(k_i) =$$

$$= \frac{(-1)^{[\beta]}}{(-1)^{[\alpha-\beta]+[\alpha]}} \cdot k_i^{2\alpha} \cdot f^{\wedge}(k_1,k_2) \cdot \begin{cases} (-1)^{[\alpha-\beta]} \; k_i^{-2(\alpha-\beta)} & k_i \in N \\ 0 & k_i = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (-1)^{[\beta]} \cdot k_i^{2\beta} \cdot f^{\wedge}(k_1,k_2) & \text{dla } k_i \in N \\ 0 & k_i = 0 \end{cases}$$

Z twierdzenia 2.1 mamy, że istnieje pochodna $D^{(\beta)}_{x_i} f = h_i \in X$. Dowody własności (iii), (iv) przebiegają poprzez wykazanie równości transformat.

Zbudujemy teraz operator $A^{\alpha}_{h_1 1} f$, $A^{\alpha}_{1 h_2} f$ następująco:

$$(A^{\alpha}_{h_1 1} f)(x_1,x_2) = f *_1 \mathcal{H}_{\alpha}(x_1,h_1)$$

$$(A^{\alpha}_{1 h_2} f)(x_1,x_2) = f *_2 \mathcal{H}_{\alpha}(x_2,h_2)$$

i wykażemy następujący lemat:

L e m a t 2.6. Niech $f \in X$ i istnieją $D^{(\alpha)}_{x_i} f \in X, \alpha > 0,\ i = 1,2$.
Wtedy:

(i) $\|A^{\alpha}_{h_1 1} f\| \leq C_\alpha \|f\|$; $\|A^{\alpha}_{1 h_2} f\| \leq C_\alpha \|f\|$

(ii) $$[A^{\alpha}_{h_1 1} f]^{\wedge}(k_1,k_2) = \begin{cases} \left[\dfrac{1 - T_{k_1}(h_1)}{\frac{1}{2}(k_1 \operatorname{arccosh}_1)^2}\right]^{\alpha} . f^{\wedge}(k_1,k_2) & k_1 \in N \\ f^{\wedge}(0,k_2) & k_1 = 0 \end{cases}$$

(iii) $$A^{\alpha}_{h_1 1}(D^{(\alpha)}_{x_1} f) = (\tfrac{1}{2} \arccos^2 h_1)^{-\alpha} (\Delta^{\alpha}_{h_1 1} f)(x_1,x_2) \quad \text{p.w}$$

$$A^{\alpha}_{1 h_2}(D^{(\alpha)}_{x_2} f) = (\tfrac{1}{2} \arccos^2 h_2)^{-\alpha} (\Delta^{\alpha}_{1 h_2} f)(x_1,x_2) \quad \text{p.w}$$

Dowód przeprowadzimy dla $i = 1$, operatora $A^{\alpha}_{h_1 1} f$.

Własności (i) i (ii) wynikają z lematów 2.4 i 2.5. Własności (iii) wykażemy poprzez wykazanie równości transformat Czebyszewa.

Na podstawie własności (ii) mamy:

$$[A^{\alpha}_{h_1 1}(D^{(\alpha)}_{x_1} f]^{\wedge}(k_1,k_2) = \begin{cases} \left[\dfrac{1 - T_{k_1}(h_1)}{\frac{1}{2}[(\operatorname{arccosh}_1).k_1]^2}\right]^{\alpha} .(-1)^{[\alpha]} k_1^{2\alpha} f^{\wedge}(k_1,k_2) & k_1 \in N \\ 0 & k_1 = 0 \end{cases}$$

Transformata strony prawej równa się:

$$(\tfrac{1}{2} \arccos^2 h_1)^{-\alpha} (-1)^{[\alpha]} [1 - T_{k_1}(h_1)]^{\alpha} . f^{\wedge}(k_1,k_2)$$

Mamy więc równość transformat, czyli równość funkcji prawie wszędzie, co kończy dowód.

3. Twierdzenie typu Jacksona

L e m a t 3.1. Niech χ będzie nieujemną funkcją jednej zmiennej z przestrzeni L^1_w, spełniającą $\chi^{\wedge}(0) = 1$.

Wtedy

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(\arccos u)^{2\alpha}\cdot \chi(u)\cdot w(u)du \leqslant \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^{2\alpha}[1-\chi^{\wedge}(\alpha)]^{\alpha}; \quad 0<\alpha\leqslant 1$$

Dowód w pracy P.L. Butzera i R.L. Stensa [2].

Twierdzenie 3.1 (Jacksona)

Niech $f\in X$, istnieją $D_{x_1}^{(\alpha)}f$, $D_{x_2}^{(\beta)}f$, $1\geqslant\alpha,\beta>0$ i $D_{x_1}^{(\alpha)}f$, $D_{x_2}^{(\beta)}f\in X$.
Wtedy:

$$E_{nm}(f,X) = \inf_{p_{nm}\in P_{nm}}\|f-p_{nm}\|\leqslant I_\alpha n^{-2\alpha}\cdot\|D_{x_1}^{(\alpha)}f\| + I_\beta m^{-2\beta}\|D_{x_2}^{(\beta)}f\|$$

DOWÓD:

Niech $0<\alpha\leqslant 1$ $0<\beta\leqslant 1$ i $K_{n,m}f = (f \circledast k_{nm})(x_1,x_2)$ jest całką osobliwą Fejéra-Korowkina, zdefiniowaną w [3].
Wykażemy, że

$$\|K_{nm}f-f\|\leqslant I_\alpha n^{-2\alpha}\|D_{x_1}^{(\alpha)}f\| + I_\beta m^{-2\beta}\|D_{x_2}^{(\beta)}f\|$$

Zgodnie z własnościami (iv), (v) z lematu 2.1 mamy:

$$\|\Delta^1_{h_1h_2}f\|\leqslant\|\Delta^1_{h_11}f\|+\|\Delta^1_{1h_2}f\| = \|\Delta^{1-\alpha}_{h_11}(\Delta^{\alpha}_{h_11}f)\| + \|\Delta^{1-\beta}_{1h_2}(\Delta^{\beta}_{1h_2}f)\|\leqslant$$

$$\leqslant M_{1-\alpha}\|\Delta^{\alpha}_{h_11}f\| + M_{1-\beta}\|\Delta^{\beta}_{1h_2}f\|$$

Na podstawie poprzedniej nierówności, własności (iii) z lematu 2.6 oraz lematu 3.1 mamy:

$$\|K_{n,m}f-f\|\leqslant\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\|\tau_{u_1u_2}f-f\|\,k_n(u_1)k_m(u_2)w(u_1)w(u_2)du_1du_2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi^2}M_{1-\alpha}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\|\Delta^{\alpha}_{u_11}f\|\,k_n(u_1)k_m(u_2)w(u_1)w(u_2)du_1du_2 +$$

$$+ \frac{1}{\pi^2} M_{1-\beta} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \| \Delta_{1u_2}^{\beta} f \| \, k_n(u_1) k_m(u_2) w(u_1) w(u_2) du_1 du_2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi^2} M_{1-\alpha} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \left(\tfrac{1}{2}\arccos^2 u_1\right)^{\alpha} \| A_{u_1 1}^{\alpha} (D_{x_1}^{(\alpha)} f) \| \, k_n(u_1) k_m(u_2) w(u_1, u_2) du_1 du_2 +$$

$$+ \frac{1}{\pi^2} M_{1-\beta} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \left(\tfrac{1}{2}\arccos^2 u_2\right)^{\beta} \| A_{1u_2}^{\beta} (D_{x_2}^{(\beta)} f) \| \, k_n(u_1) k_m(u_2) w(u_1, u_2) du_1 du_2 \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-\alpha} \frac{1}{\pi^2} M_{1-\alpha} C_{\alpha} \| D_{x_1}^{(\alpha)} f \| \int_{-1}^{1} (\arccos u_1)^{2\alpha} k_n(u_1) w(u_1) du_1 \; +$$

$$+ \; 2^{-\beta} \frac{1}{\pi^2} M_{1-\beta} C_{\beta} \| D_{x_2}^{(\beta)} f \| \int_{-1}^{1} (\arccos u_2)^{2\beta} k_m(u_2) w(u_2) du_2 \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-\alpha} \frac{1}{\pi^2} M_{1-\alpha} C_{\alpha} \| D_{x_1}^{(\alpha)} f \| \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^{2\alpha} [1 - \hat{k}_n(1)]^{\alpha} \; +$$

$$+ \; 2^{-\beta} \frac{1}{\pi^2} M_{1-\beta} C_{\beta} \| D_{x_2}^{(\beta)} f \| \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^{2\beta} [1 - \hat{k}_m(1)]^{\beta}$$

Ponieważ $1 - \hat{k}_n(1) = 1 - \cos \frac{\pi}{n+2} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n+2}\right)^2$ więc przyjmując za $I_{\alpha} = 2^{-3\alpha} \cdot 2^{\{1-\alpha\}} \pi^{4\alpha} C_{\alpha}$ i $I_{\beta} = 2^{-2\beta} \cdot 2^{\{1-\beta\}} \pi^{4\beta} C_{\beta}$ otrzymamy tezę.

LITERATURA

[1] BUTZER P.L., STENS R.L.: The operational properties of the Chebyshev transform" II Fractional derivatives. Труды Международной конференции потери приближения функций. НАУКА Москва 1977.

[2] BUTZER P.L., STENS R.L.: Chebyshev transform methods in the solution of the fundamental theorem of best algebraic approximation in the fractional case - Colloquia Matematica Societatis Janos Bolyai Budapest 1976 - 191 - 211.

[3] LUKS-OGRODNIK B.: Zastosowania transformaty Czebyszewa w aproksymacji funkcji dwóch zmiennych. Zeszyty Naukowe Pol. Śl., Mat.-Fiz.nr 35, Gliwice 1979.

МЕТОД ИЗОБРАЖЕНИЯ ЧЕБЫШЕВА В АППРОКСИМАЦИИ
ФУНКЦИИ ВДУХ ПЕРЕМЕННЫХ.
II. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ЧЕБЫШЕВА ПОРЯДКА $\alpha > 0$

Р е з ю м е

В представленной работе обобщены результаты П.Л. Бутцера и Р.Л. Стенса [1], [2] на функции с пространства L^p_w [-1,1; -1,1] с миксированными нормами.

CHEBYSHEV TRANSFORM METHOD IN THE APPROXIMATION
OF THE FUNCTIONS OF TWO VARIABLES
II. CHEBYSHEV PARTIAL DERIVATIVES OF ORDER $\alpha > 0$

S u m m a r y

The results obtained by P.L. Butzer and R.L. Stens are generalized to the case of functions in the space L^p_w [-1,1; -1,1] with mixed norms.

Wpłynęło do Redakcji 26.XI.1979 r.

Recenzent

Prof. dr hab. J. Musielak