ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 39 Nr kol. 686

Barbara LUKS-OGRODNIK

TWIERDZENIE TYPU BERNSTEINA DLA FUNKCJI DWÓCH ZMIENNYCH Z PRZESTRZENI L_w^p

Streszczenie. W pracy zdefiniowano dla funkcji dwóch zmiennych z przestrzeni $L_w^{p}[p_1,p_2]$ z mieszanymi potęgami klasę Lipschitza-Czebyszewa, udowodniono nierówność Bernsteina dla pochodnych częstkowych Czebyszewa wielomianów algebraicznych, twierdzenie typu Bernsteina oraz podano wynikający stąd wniosek, który jest pewnym uogólnieniem twierdzenia 2 [1] na przestrzeń $L_w^p[p_1,p_2]$.

1. Wstęp

Przez $X = L_w^p$ będziemy oznaczać przestrzeń unormowaną funkcji mierzalnych i określonych na obszarze $E \begin{cases} -1 \le x_1 \le 1 \\ -1 \le x_2 \le 1 \end{cases}$, gdzie norma określona jest następująco:

$$\|f\| = \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \left| f(x_1,x_2) \right|^{p_1} w(x_1)dx_1 \right]^{\frac{p_2}{p_1}} w(x_2)dx_2 \right]^{\frac{1}{p_2}}$$

$$1 \le p_1,\ p_2 < \infty,\ w(x_i) = (1 - x_i^2)^{-\frac{1}{2}} \qquad i = 1,2$$

Operator translacji $\tau_{h_1h_2}f;\ |h_i| \le 1 \quad i = 1,2$ definiujemy następująco:

$$(\tau_{h_1h_2}f)(x_1,x_2) = \frac{1}{4}\left\{ f[x_1h_1 + \sqrt{(1-x_1^2)(1-h_1^2)};\right.$$

$$x_2h_2 + \sqrt{(1-x_2^2)(1-h_2^2)}\Big] + f[x_1h_1 - \sqrt{(1-x_1^2)(1-h_1^2)};$$

$$x_2h_2 + \sqrt{(1-x_2^2)(1-h_2^2)}\Big] + f[x_1h_1 + \sqrt{(1-x_1^2)(1-h_1^2)};$$

$$x_2h_2 - \sqrt{(1-x_2^2)(1-h_2^2)}] + f[x_1h_1 - \sqrt{(1-h_1^2)(1-x_1^2)};$$

$$x_2h_2 - \sqrt{(1-x_2^2)(1-h_2^2)}]\Big\}$$

W dowodach często korzysta się z transformaty Czebyszewa funkcji $f \in X$, określonej następująco:

$$f^{\wedge}(k_1k_2) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x_1,x_2)T_{k_1}(x_1)T_{k_2}(x_2)w(x_1)w(x_2)dx_1dx_2$$

gdzie $T_{k_i}(x_i) = \cos(k_i \cdot \arccos x_i)$; $i = 1,2$; $k_i = 0,1,2,\ldots$ jest wielomianem Czebyszewa, oraz z własności jednoznaczności tej transformaty, tj.: jeżeli $f^{\wedge}(k_1,k_2) = 0$, $k_i = 0,1,2,\ldots$, to $f = 0$ prawie wszędzie (własność (iv) lemat 1 [2]).

Moduł ciągłości Czebyszewa i moduły ciągłości cząstkowe oraz splot częściowy względem zmiennej x_1 lub x_2 określa się następująco [def.5 [2] def. 2.3 [3]]:

$$\omega_1^T(f, \eta_1, \eta_2) = \sup_{\substack{\eta_1 \le h_1 \le 1 \\ \eta_2 \le h_2 \le 1}} \|\tau_{h_1h_2} f - f\|,$$

$$\omega_1^T(f, \eta_1, 1) = \sup_{\eta_1 \le h_1 \le 1} \|\tau_{h_11} f - f\|,$$

$$\omega_1^T(f, 1, \eta_2) = \sup_{\eta_2 \le h_2 \le 1} \|\tau_{1h_2} f - f\|,$$

$$(f *_1 g)(x_1,x_2) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} (\tau_{x_1x_2} f)(u_1,1)g(u_1)w(u_1)du_1; \quad \text{gdzie} \quad g(u_1) \in L_2^1,$$

$$f *_2 g\,(x_1,x_2) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} (\tau_{x_1x_2} f)(1,u_2)g(u_2)w(u_2)du_2, \quad g(u_2) \in L_w^1.$$

Przez $W_{x_i}^{\alpha}$ będziemy oznaczać klasę funkcji $f \in X$, dla których istnieje pochodna cząstkowa Czebyszewa rzędu $\alpha > 0$ względem zmiennej x_i, $i = 1,2$, zdefiniowana w pracy [3].

2. Klasa Lipschitza-Czebyszewa

Definicja 2.1. Niech $f \in X$. Klasę Lipschitza-Czebyszewa rzędu $\alpha, \beta, > 0$, $\beta > 0$ będziemy nazywać zbiór tych funkcji $f \in X$, dla których $\omega_1^T(f,\eta_1,1) + \omega_1^T(f,1,\eta_2) = O[(1-\eta_1)^\alpha + (1-\eta_2)^\beta]$; $\eta_1 \to 1^-$, $\eta_2 \to 1^-$. Klasę tę oznaczamy przez $L_{ip}^T(X,\alpha,\beta)$, czyli

$$L_{ip}^T(X,\alpha,\beta) =$$

$$= \{f \in X;\ \omega_1^T(f,\eta_1,1) + \omega_1^T(f,1,\eta_2) = O[(1-\eta_1)^\alpha + (1-\eta_2)^\beta]\quad \eta_1 \to 1^-,$$

$$\eta_2 \to 1^-\}.$$

TWIERDZENIE 2.1. Jeżeli $f \in L_{ip}^T(X,1,1)$, wtedy

$$E_{nm}(f,X) = O(n^{-2} + m^{-2}) \qquad \begin{matrix} n \to \infty \\ m \to \infty \end{matrix}$$

DOWÓD:

Zgodnie z wnioskiem 2 [1] mamy:

$$E_{nm}(f,X) \leq \|K_{nm}\, f - f\| \leq \left(1 + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \left[\omega_1^T\left(f, \cos\sqrt{1 - \cos\frac{\pi}{n+2}}, 1\right) + \right.$$

$$\left. + \omega_1^T\left(f, 1, \cos\sqrt{1 - \cos\frac{\pi}{m+2}}\right)\right].$$

Ponieważ $f \in L_{ip}^T(X,1,1)$, więc

$$E_{nm}(f,X) \leq \left(1 + \frac{}{\sqrt{2}}\right)^2 \left[C_1\left(1 - \cos\sqrt{1 - \cos\frac{\pi}{n+2}}\right)^1 + C_2\left(1 - \cos\sqrt{1 - \cos\frac{\pi}{m+2}}\right)^1\right]$$

$$\leq C_1' n^{-2} + C_2' m^{-2},$$

skąd wynika teza.

3. Twierdzenie typu Bernsteina

L e m a t 3.1. Niech funkcja $g(x_i) \in L_w^1$ i istnieje pochodna Czebyszewa funkcji g rzędu $\alpha > 0$; $D_{x_1}^{(\alpha)} g \in L_w^1$.

Niech $f \in X$. Wtedy $f *_1 g \in W^{\alpha}_{x_1}$ i zachodzi $D^{(\alpha)}_{x_1}(f *_1 g) = f *_1 D^{(\alpha)}_{x_1} g$ prawie wszędzie w E.

DOWÓD:

Zgodnie z definicją pochodnej cząstkowej Czebyszewa rzędu α musimy wykazać, że

$$\lim_{h_1 \to 1^-} \left\| \frac{\Delta^{\alpha}_{h_1 1}(f *_1 g)}{(1 - h_1)^{\alpha}} - f *_1 D^{(\alpha)}_{x_1} g \right\| = 0.$$

Mamy:

$$\left\| \frac{\Delta^{\alpha}_{h_1 1}(f *_1 g)}{(1 - h_1)^{\alpha}} - f *_1 D^{(\alpha)}_{x_1} g \right\| = \left\| \frac{f *_1 \Delta^{\alpha}_{h_1 1} g}{(1 - h_1)^{\alpha}} - f *_1 D^{(\alpha)}_{x_1} g \right\| =$$

$$= \left\| f *_1 \left(\frac{\Delta^{\alpha}_{h_1 1} g}{(1 - h_1)^{\alpha}} - D^{(\alpha)}_{x_1} g \right) \right\| \leqslant \|f\|_X \cdot \left\| \frac{\Delta^{\alpha}_{h_1 1} g}{(1 - h_1)^{\alpha}} - D^{(\alpha)}_{x_1} g \right\|_{L^1_w}.$$

Skąd wynika teza. Ostatnią nierówność można było napisać na podstawie własności (i) lematu 2.4 z pracy [3].

TWIERDZENIE 3.1 (nierówność Bernsteina)

Niech $p_{nm}(x_1, x_2)$ będzie wielomianem algebraicznym stopnia n ze względu na x_1, m ze względu na x_2. Istnieją $D^{(r_1)}_{x_1} p_{nm}$ i $D^{(r_2)}_{x_2} p_{nm}$, $r_1, r_2 \in N$ oraz

$$\left\| D^{(r_1)}_{x_1} p_{nm} \right\| \leqslant n^{2r_1} 2^{r_1} \|p_{nm}\|$$

$$\left\| D^{(r_2)}_{x_1} p_{nm} \right\| \leqslant m^{2r_2} 2^{r_2} \|p_{nm}\| .$$

Dowód przeprowadzimy dla $r_1 = 1$, bowiem $D^{(r_1)}_{x_1} f = D^1_{x_1}(D^{(r_1 - 1)}_{x_1} f)$, dowód dla $D^{(r_2)}_{x_2} p_{nm}$ będzie przebiegał analogicznie.

Każdy wielomian p_{nm} można zapisać w następujący sposób:

$$p_{nm}(x_1, x_2) = p_{nm}{}^{\to\!|}{}_{1} \left[1 + 2 \sum_{k_1=1}^{n} T_{k_1}(x_1)\right]$$

prawie wszędzie.

Ponieważ $1 + 2 \sum\limits_{k_1=1}^{n} T_{k_1}(x_1)$ jest skończoną sumą wielomianów Czebyszewa, więc istnieje pochodna Czebyszewa funkcji

$$g(x_1) = 1 + 2 \sum_{k_1=1}^{n} T_{k_1}(x_1)$$

względem x_1 i jest równa:

$$D^1_{x_1} g = 0 + 2 \sum_{k_1=1}^{n} D^1_{x_1} T_{k_1}(x_1) = 2 \sum_{k_1=1}^{n} (-k_1^2) T_{k_1}(x_1).$$

Równość ta wynika z twierdzenia 2.1 [3].
Zgodnie z lematem 3.1 mamy, że

$$D^1_{x_1} p_{nm} = p_{nm}{}^{\to\!|}{}_{1} \left\{2 \sum_{k_1=1}^{n} (-k_1^2) T_{k_1}(x_1)\right\} =$$

$$p_{nm}{}^{\to\!|}{}_{1} \left\{2 \sum_{k_1=1}^{n-1} (-k_1^2) T_{k_1}(x_1) - 2n^2 T_n(x_1)\right\}.$$

Ponieważ

$$p_{nm}{}^{\to\!|}{}_{1} \left\{2 \sum_{k_1=1}^{n-1} (-k_1^2) T_{2n-k_1}(x_1) = 0\right\} \quad \text{prawie wszędzie}$$

oraz

$$T_{k_1}(u) + T_{2n-k_1}(u) = 2T_n(u) T_{n-k_1}(u),$$

mamy dalej:

$$D^1_{x_1} \dot{p}_{nm} = p_{nm} * 1 \left\{ 2 \sum_{k_1=1}^{n-1} (-k_1^2) \cdot 2T_n(x_1) T_{n-k_1}(x_1) - 2n^2 T_n(x_1) \right\} =$$

$$= p_{nm} * 1 \left\{ -2n^2 T_n(x_1) \left[2 \sum_{k_1=1}^{n-1} \left(\frac{k_1}{n}\right)^2 T_{n-k_1}(x_1) + 1 \right] \right\} =$$

$$= p_{nm} * 1 \left\{ -2n^2 T_n(x_1) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{n}\right)^2 T_k(x_1) \right] \right\} =$$

$$= p_{nm} * 1 \left\{ -2n^2 T_n(x_1) \cdot \left[(1 + 2 \sum_{k_1=1}^{n-1} (1 - \frac{k}{n}) T_k(x_1) * (1 + 2 \sum_{k_1=1}^{n-1} (1 - \frac{k}{n}) T_k(x_1) \right] \right.$$

$$\| D^1_{x_1} p_{nm} \| \leqslant 2 \| p_{nm} \| n^2 \| F_{n-1}(x_1) \| \| F_{n-1}(x_1) \|_{L^1_w} = 2n^2 \| p_{nm} \| ,$$

bo $F_{n-1}(x_1)$ jest jądrem Fejéra, którego norma jest równa 1. Tezę otrzymamy poprzez przejście indukcyjne.

L e m a t 3.2. Niech $f \in X$, a $p^*_{nm}(x_1, x_2)$ niech będzie wielomianem najlepszego przybliżenia, czyli $E_{n,m}(f,X) = \| f - p^*_{nm} \|$, wtedy

$$\omega^T_1(f - p^*_{nm}, \eta_1, \eta_2) \leqslant 2E_{n,m}(f,X).$$

DOWÓD

$$\omega^T_1(f - p^*_{nm}, \eta_1, \eta_2) = \sup_{\substack{\eta_1 \leqslant h_1 \leqslant 1 \\ \eta_2 \leqslant h_2 \leqslant 1}} \| \tau_{h_1 h_2}(f - p^*_{nm}) - (f - p^*_{nm}) \|$$

$$\leqslant \sup_{\substack{\eta_1 \leqslant h_1 \leqslant 1 \\ \eta_2 \leqslant h_2 \leqslant 1}} \| \tau_{h_1 h_2}(f - p^*_{nm}) \| + \| p_{nm} - f \| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \| f - p^*_{nm} \| = 2E_{n,m}(f,X).$$

TWIERDZENIE 3.2. Niech $f \in X$ i niech $E_{n,m}(f,X)$ będzie ciągiem najlepszych przybliżeń funkcji f wielomianami algebraicznymi, wtedy:

$$\omega_1^T(f,\cos\frac{1}{n},1) \leqslant \frac{C_1^*}{n^2}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)E_{\nu,m}(f,X); \quad m \in N,$$

$$\omega_1^T(f,1,\cos\frac{1}{m}) \leqslant \frac{C_2^*}{m^2}\sum_{\mu=0}^{m}(\mu+1)E_{n,\mu}(f,X); \quad n \in N.$$

DOWÓD

Niech $p_{nm}(x_1,x_2)$ będzie wielomianem najlepszego przybliżenia dla funkcji f, czyli $E_{n,m}(f,X) = \|f - p_{nm}(x_1,x_2)\|$.

Wykażemy pierwszą z nierówności. Niech $m \in N$, $r_1 \in N \cup \{0\}$, wtedy

$$\omega_1^T(f,\cos\frac{1}{n},1) \leqslant \omega_1^T(f - p_{2^{r_1+1},m},\cos\frac{1}{n},1) + \omega_1^T(p_{2^{r_1+1},m}\cos\frac{1}{n},1) \leqslant$$

$$\leqslant 2E_{2^{r_1+1},m}(f,X) + \omega_1^T(p_{2^{r_1+1},m},\cos\frac{1}{n},1).$$

Wielomian $p_{2^{r_1+1},m}$ można zapisać za pomocą następującej sumy:

$$p_{2^{r_1+1},m} = p_{1,m} + \sum_{\nu=0}^{r_1}[p_{2^{\nu+1},m} - p_{2^\nu,m}].$$

Zgodnie z lematem 4 [2] mamy:

$$\omega_1^T(f,\cos\frac{1}{n},1) \leqslant 2E_{2^{r_1+1},m}(f,X) + C_1(1-\cos\frac{1}{n})(\|D^1_{x_1}(p_{1,m} - p_{0,m})\| +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{r_1}\|D^1_{x_1}(p_{2^{\nu+1},m} - p_{2^\nu,m})\|).$$

Korzystając z nierówności Bernsteina mamy dalej:

$$\omega_1^T(f,\cos\frac{1}{n},1) \leqslant 2E_{2^{r_1+1},m}(f,X) + C_1\frac{1}{n^2}[4E_{0,m}(f,X) +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{r_1} 2 \cdot 2^{(\nu+1).2} \left\| p_{2^{\nu+1},m} - p_{2^{\nu},m} \right\| \Big| \leq 2E_{2^{r_1+1},m}(f,X) +$$

$$+ \frac{C_1}{n^2} \Big[4E_{0,m}(f,X) + 4 \sum_{\nu=0}^{r_1} 2^{(\nu+1)2} E_{2^{\nu},m}(f,X)\Big].$$

Ponieważ

$$2^{(\nu+1)2} E_{2^{\nu},m}(f,X) \leq 4 \sum_{\mu=2^{\nu-1}+1}^{2} \mu E_{\mu,m}(f,X),$$

mamy:

$$\omega_1^T(f,\cos\tfrac{1}{n},1) \leq 2E_{2^{r_1+1};m}(f,X) + \frac{C_1}{n^2}\Big|\Big[4E_{0,m}(f,X) + 16E_{1,m}(f,X) +$$

$$+ 64 \sum_{\nu=1}^{r_1} \sum_{T\mu=2^{\nu-1}+1}^{2^{\nu}} \mu E_{\mu,m}(f,X) \leq 2E_{2^{r_1+1},m}(f,X) +$$

$$+ \frac{C_1}{n^2}\Big[4E_{0,m}(f,X) + 16E_{1,m}(f,X) + 64 \sum_{\nu=2}^{2^{r_1}} \nu E_{\nu,m}(f,X)\Big].$$

Więc

$$\omega_1^T(f,\cos\tfrac{1}{n},1) \leq 2E_{2^{r_1+1},m}(f,X) + \frac{64C_1}{n^2} \sum_{\nu=0}^{2^{r_1}} (\nu+1)\, E_{\nu,m}(f,X).$$

Przyjmując $2^{r_1} \leq n \leq 2^{r_1+1}$ otrzymamy:

$$\omega_1^T(f,\cos\tfrac{1}{n},1) \leq \frac{4}{n^2} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)E_{\nu,m}(f,X) + \frac{64C_1}{n^2} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)E_{\nu,m}(f,X)$$

$$\leq \frac{2\bar{C}_1}{n^2} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)E_{\nu,m}(f,X),$$ co daje tezę.

Postępując analogicznie można wykazać, że

$$\omega_1^T(f,1,\cos\frac{1}{m}) \leq \frac{C_2^*}{m^2}\sum_{\mu=0}^{m}(\mu+1)E_{n,\mu}(f,X).$$

TWIERDZENIE 3.3 (Bernsteina)

Niech $f \in X$ i $E_{n,m}(f,X) = O(\frac{1}{n^{2\alpha}} + \frac{1}{m^{2\beta}})$.

Wtedy:

1) $\omega_1^T(f,\eta_1,1) = O[(1-\eta_1)^\alpha]$ $\quad \alpha < 1 \quad \eta_1 \to 1^-$

$\omega_1^T(f,1,\eta_2) = O[(1-\eta_2)^\beta]$ $\quad \beta < 1 \quad \eta_2 \to 1^-$

2) $\omega_1^T(f,\eta_1,1) = O[(1-\eta_1)\cdot|\ln 2(1-\eta_1)|]$ $\quad \alpha = 1 \quad \eta_1 \to 1^-$

$\omega_1^T(f,1,\eta_2) = O[(1-\eta_2)^\beta]$ $\quad \beta < 1 \quad \eta_2 \to 1^-$

3) $\omega_1^T(f,\eta_1,1) = O[(1-\eta_1)^\alpha]$ $\quad \alpha < 1 \quad \eta_1 \to 1^-$

$\omega_1^T(f,1,\eta_2) = O[(1-\eta_2)|\ln 2(1-\eta_2)|]$ $\quad \beta = 1 \quad \eta_2 \to 1^-$

4) $\omega_1^T(f,\eta_1,1) = O[(1-\eta_1)|\ln 2(1-\eta_1)|]$ $\quad \alpha = 1 \quad \eta_1 \to 1^-$

$\omega_1^T(f,1,\eta_2) = O[(1-\eta_2)|\ln 2(1-\eta_2)|]$ $\quad \beta = 1 \quad \eta_2 \to 1^-$

5) $\omega_1^T(f,1,\eta_2) = O(1-\eta_2)$ $\quad \beta > 1 \quad \eta_2 \to 1^-$

$\omega_1^T(f,\eta_1,1) = O(1-\eta_1)$ $\quad \alpha > 1 \quad \eta_1 \to 1^-$

DOWÓD

1) $\alpha < 1$, $\beta < 1$

Wybierzemy n tak, by:

$$\cos\frac{1}{n} \leq \eta_1 \leq \cos\frac{1}{n+1}.$$

wtedy:

$$\omega_1^T(f,\eta_1,1) \leqslant \omega_1^T(f,\cos\frac{1}{n},1) \leqslant \frac{C_1^*}{n^2}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)E_{\nu,m}(f,X) =$$

$$= \frac{C_1^*}{n^2}\left[E_{0,m}(f,X) + 2\sum_{\nu=1}^{n}\nu E_{\nu,m}(f,X)\right] \leqslant \frac{C_1^*}{n^2}\Big[E_{0,m}(f,X) +$$

$$2K\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1}{\nu^{2\alpha-1}} + \frac{\nu}{m^{2\beta}}\right).$$

Niech m będzie takie, by $\frac{1}{m^{2\beta}} \leqslant \frac{1}{n^{2\alpha}}$,

wtedy:

$$\omega_1^T(f,\eta_1,1) \leqslant \frac{C_1^*}{n^2}\left[E_{0,m}(f,X) + 2K\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu^{2\alpha-1}} + 2K\frac{(n+1)n}{n^{2\alpha}\,2}\right] =$$

$$= \frac{C_1^*}{n^2}\left[E_{0,m}(f,X) + 2K\left(\frac{2\alpha-1}{2\alpha-2} + \frac{1}{(2-2\alpha)n^{2\alpha-2}}\right) + K\frac{(n+1)n}{n^{2\alpha}}\right] \leqslant$$

$$\leqslant A_1\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \leqslant 2^{2\alpha}A_1\left(\frac{1}{n+1}\right)^{2\alpha} \leqslant B_1\left(\frac{\arccos^2\eta_1}{2}\right)^{\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant C_1(1-\eta_1)^{\alpha}.$$

W analogiczny sposób udowodnimy, że:

$$\omega_1^T(f,1,\eta_2) \leqslant C_2(1-\eta_2)^{\beta}.$$

2) $\alpha = 1,\ \beta < 1$

$$\omega_1^T(f,\eta_1,1) \leqslant \omega_1^T(f,\cos\frac{1}{n},1) \leqslant \frac{C_1^*}{n^2}\left[E_{0,m}(f,X) + 2\sum_{\nu=1}^{n}\nu E_{\nu,m}(f,X)\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_1^*}{n^2}\left[E_{0,m}(f,X) + 2K \cdot \ln n + \frac{K(n+1) \cdot n}{m^{2\beta}}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A_1}{n^2}[1 + \ln n] \leqslant \frac{A_1}{n^2}\left|\ln \frac{1}{n^2}\right| \leqslant C_1(1 - \eta_1)\left|\ln 2(1 - \eta_1)\right|.$$

Nierówności te zachodzą dla $n > 1$.

Dowód drugiej części, to jest dowód nierówności

$$\omega_1^T(f,1,\eta_2) = O[(1 - \eta_2)^\beta], \quad \text{jak w przypadku 1.}$$

Dowód części 3, 4 przebiega analogicznie jak w przypadku 2.

5) $$\omega_1^T(f,\eta_1,1) \leqslant \frac{C_1^*}{n^2}\left[- E_{0,m}(f,X) + 2K \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1}{\nu^{2\alpha-1}} + \frac{\nu}{m^{2\beta}}\right)\right]$$

$\alpha > 1, \quad \beta > 1,$

$$\omega_1^T(f,\eta_1,1) \leqslant \frac{C_1^*}{n^2}\left[E_{0,m}(f,X) + 2K\left(\frac{2\alpha - 1}{(2-2\alpha)n^{2\alpha-2}} + \frac{(n+1)n}{2n^{2\alpha}}\right)\right] \leqslant$$

$$\leqslant A_1\left(\frac{1}{n^2}\right) \leqslant C_1(1 - \eta_1).$$

<u>Wniosek 3.1</u>. Następujące dwa warunki są równoważne:

1) $E_{n,m}(f,X) = O\left(\frac{1}{n^{2\alpha}} + \frac{1}{m^{2\beta}}\right)$ $\qquad \alpha < 1, \quad \beta < 1$

2) $f \in \mathrm{Lip}^T(X,\alpha,\beta)$.

DOWOD:

Wnikanie $1 \Longrightarrow 2$ jest oczywiste na podstawie twierdzenia Bernsteina cz. 1 i def. klasy Lipschitza-Czebyszewa.

Dowód wynikania $2 \Longrightarrow 1$ przebiega analogicznie jak dowód twierdzenia 2.1.

LITERATURA

[1] BUTZER P.L., STENS R.L.: Chebyshev Methods in the Theory of Best Algebraic Approximation - Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Univ. Hamburg 1976, 45.

[2] LUKS-OGRODNIK B.: Zastosowanie metody transformaty Czebyszewa w aproksymacji funkcji dwóch zmiennych. Zeszyty Naukowe Pol. Śl. nr 35,1979, ss. 101-114.

[3] LUKS-OGRODNIK B.: Metoda transformaty Czebyszewa w aproksymacji funkcji dwóch zmiennych cz. II. Pochodne cząstkowe Czebyszewa rzędu $\alpha > 0$. Zeszyty Naukowe Pol. Śl., s. "Mat.-Fiz.", z. 39.

ТЕОРЕМА ТИПА БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ИЗ ПРОСТРАНСТВА L_w^p

Р е з ю м е

В статье определён класс Липшица-Чебышева для функции двух переменных из пространства L_w^p со смешанными степенями. Доказаны: неравенство Бернштейна для частных производных Чебышева алгебраических многочленов, теорема типа Бернштейна и вытекающий отсюда выбор, который является известным обобщением теоремы 2 [1] на пространство L_w^p.

THE THEOREM OF THE BERSTEIN TYPE FOR FUNCTIONS OF TWO VARIABLES IN THE SPACE L_w^p

S u m m a r y

The Lipschitz-Chebyshev class of functions of two varisbles from the space $L_w^p\,[p_1,p_2]$ with mixed powers is defined. The Berstein inequality is proved for Chebyshev partial derivatives of algebraic polynomials $P_{nm}(x_1,x_2)$. The theorem of the Berstein type as well as the conclusion resulting from this theorem is given. This conclusion is a certain generalization of the theorem 2 [1] for the space L_w^p.

Wpłynęło do Redakcji 10.XII.1979 r.

Recenzent

Prof. dr hab. J. Musielak