ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 39 Nr kol. 686

Barbara LUKS-OGRODNIK

NIERÓWNOŚĆ TYPU BERNSTEINA

Streszczenie. W pracy uogólniono nierówność typu Bernsteina [2], [5] dla pochodnych cząstkowych Czebyszewa wielomianów algebraicznych.

1. Wstęp

Niech $X = L^p_w$; $p = (p_1, p_2)$; $1 \leq p_1, p_2 < \infty$ oznacza przestrzeń funkcji mierzalnych określonych w prostokącie

$$E = \begin{cases} -1 \leq x_1 \leq 1 \\ -1 \leq x_2 \leq 1 \end{cases}; \quad \text{gdzie normę określamy następująco:}$$

$$\|f\| = \left\{\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}|f(x_1,x_2)|^{p_1}\cdot w(x_1)dx_1\right]^{\frac{p_2}{p_1}}\cdot w(x_2)dx_2\right\}^{\frac{1}{p_2}}$$

$$w(x_i) = (1 - x_i^2)^{-\frac{1}{2}}; \qquad i = 1,2.$$

W dowodach często korzysta się z transformaty Czebyszewa funkcji f, określonej następująco:

$$f^{\wedge}(k_1,k_2) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x_1,x_2)\cdot T_{k_1}(x_1)\cdot T_{k_2}(x_2)\cdot w(x_1)\cdot w(x_2)dx_1dx_2,$$

gdzie $T_{k_i}(x_i) = \cos(k_i \cdot \arccos x_i)$, $i = 1,2$, $k_i = 0,1,2,3,\dots$.

Operator translacji $\tau_{h_1h_2}f$; $|h_i| \leq 1$, $i = 1,2$ definiujemy następująco:

$$(\tau_{h_1h_2}f)(x_1,x_2) = \frac{1}{4}\left\{f[x_1h_1 + (w(x_1)w(h_1))^{-1};\right.$$

$$x_2h_2 + (w(x_2)w(h_2))^{-1}] + f[x_1h_1 - (w(x_1)w(h_1))^{-1};$$

$$x_2h_2 + (w(x_2)w(h_2))^{-1}] + f[x_1h_1 + (w(x_1)w(h_1))^{-1};$$

$$x_2h_2 - (w(x_2)w(h_2))^{-1}] + f[x_1h_1 - (w(x_1)w(h_1))^{-1};$$

$$x_2h_2 - (w(x_2)w(h_2))^{-1}]\},$$

jego założenia zaś indukcyjnie

$$(\tau^j_{h_1h_2})(x_1,x_2) = \tau_{h_1h_2}(\tau^{j-1}_{h_1h_2}f)(x_1,x_2)$$

Przez różnicę Czebyszewa rzędu $\alpha > 0$ dla funkcji $f \in X$ rozumiemy

$$(\Delta^{\alpha}_{h_1h_2}f)(x_1,x_2) = (-1)^{[\alpha]}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{\alpha}{j}(\tau^j_{h_1h_2}f)(x_1,x_2)$$

Własności operatora $\tau_{h_1h_2}f$, jego złożenia $\tau^j_{h_1h_2}f$ oraz różnicy Czebyszewa rzędu α zostały wykazane w pracach [3], [4].

W pracach [3, 4] zostały zdefiniowane pochodne cząstkowe Czebyszewa rzędu α funkcji f oraz wykazane zostały podstawowe własności tych pochodnych. Będziemy z nich korzystać w dalszej części pracy.

2. Uogólniona nierówność typu Bernsteina

Niech $p_{nm}(x_1,x_2)$ będzie wielomianem algebraicznym stopnia n ze względu na x_1, a stopnia m ze względu na x_2. Obliczmy różnicę Czebyszewa $\Delta^{\alpha}_{h_1,1}\, p_{nm}$, gdzie $\alpha > 0$, $|h_1| < 1$.

Mamy:

$$(\Delta^{\alpha}_{h_1 1}\, p_{nm})(x_1,x_2) = (-1)^{[\alpha]}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{\alpha}{j}(\tau^j_{h_1,1}\, p_{nm})(x_1,x_2). \tag{1}$$

Wielomian algebraiczny $p_{nm}(x_1,x_2)$ możemy zapisać następująco:

$$p_{nm}(x_1,x_2) \overset{\text{p.w.}}{=} \sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{m} c_{k_1k_2}\cdot T_{k_1,k_2}(x_1,x_2), \tag{2}$$

gdzie

$$T_{k_1,k_2}(x_1,x_2) = T_{k_1}(x_1)\cdot T_{k_2}(x_2),$$

$$c_{k_1k_2} = \begin{cases} 4\,p_{nm}^{\wedge}(k_1,k_2) & \text{gdzie} \quad k_1,k_2 \in N = \{1,2,3\ldots\} \\ 2\,p_{nm}^{\wedge}(k_1,k_2) & \text{jeżeli} \quad k_1 = 0,\ k_2 \in N \ \text{lub}\ k_1 \in N,\ k_2 = 0 \\ p_{nm}^{\wedge}(k_1,k_2) & \text{jeżeli} \quad k_1 = k_2 = 0. \end{cases}$$

Korzystając z (2) oraz z następującej własności:

$$(\tau^j_{h_1h_2} T_{k_1,k_2})(x_1,x_2) = T^j_{k_1,k_2}(h_1,h_2)\cdot T_{k_1,k_2}(x_1,x_2),$$

równość (1) przyjmie postać:

$$(\Delta^{\alpha}_{h_1 1}\, p_{nm})(x_1,x_2) = (-1)^{[\alpha]} \sum_{k_1=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{m} c_{k_1k_2}\, [1 - T_{k_1}(h_1)]^{\alpha} \cdot T_{k_1,k_2}(x_1,x_2). \tag{3}$$

Obliczmy teraz pochodną częstkową $D^{(\alpha)}_{x_1}\, p_{nm}(x_1,x_2)$.

Na podstawie własności tej pochodnej (tj. addytywności oraz $D^{(\alpha)}_{x_1} T_{k_1k_2}(x_1,x_2) = (-1)^{[\alpha]}\, k_1^{2\alpha}\cdot T_{k_1,k_2}(x_1,x_2)$ mamy:

$$D^{(\alpha)}_{x_1}\, p_{nm}(x_1,x_2) = \sum_{k_1=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{m} c_{k_1k_2}\cdot (-1)^{[\alpha]}\, k_1^{2\alpha}\cdot T_{k_1,k_2}(x_1,x_2)$$

Wprowadzimy teraz dwie funkcje φ i ψ jednej zmiennej x.

$$\varphi(x) = [1 - T_x(h_1)]^{\alpha} = [1 - \cos(x \arccos h_1)]^{\alpha},$$

$$\psi(x) = \left[\frac{x^2}{1 - T_x(h_1)}\right]^{\alpha} = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^{2\alpha} \cdot \left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x\lambda}{2}}\right)^{2\alpha}$$

gdzie $\lambda = \arccos h_1$.

Oznaczmy przez $\mu(x)$ następującą funkcję:

$$\mu(x) = \left(\frac{x}{\sin\lambda x}\right). \quad \text{Wtedy} \quad \psi(x) = A(\alpha)\cdot\left[\mu\left(\frac{x}{2}\right)\right]^{2\alpha}$$

Niech λ jest takie, że $n\lambda < \pi$ i niech $\psi(0) = \lim_{x\to 0} \psi(x) = \frac{2^{\alpha}}{(\arccos^2 h_1)^{\alpha}}$,

wtedy tak określona funkcja $\psi(x)$ jest ciągła, parzysta i dodatnia w przedziale $\langle -n, n\rangle$.
Przedłużamy ją okresowo na całą oś rzeczywistą. Obliczmy $\psi'(x)$.

$$\psi'(x) = A(\alpha)\cdot\alpha\cdot\left[\mu\left(\frac{x}{2}\right)\right]^{2\alpha-1}\cdot\frac{\cos\frac{\lambda x}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\lambda x}{2}-\frac{\lambda x}{2}\right)}{\sin^2\frac{\lambda x}{2}}$$

Widzimy, że $\psi'(x) > 0$ dla $x\in(0,n)$ oraz

$$\psi'(0) = A(\alpha)\cdot\alpha\cdot\left[\mu(0)\right]^{2\alpha-1}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\mu(h)-\mu(0)}{h} = 0,$$

więc funkcja $\psi(x)$ jest funkcją ściśle rosnącą w przedziale $\langle 0,n\rangle$, posiadającą ciągłą i ograniczoną pochodną w tym przedziale. Można ją przedstawić za pomocą jej szeregu Fouriera, czyli

$$\psi(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l\cdot\cos\frac{l\pi x}{n}.$$

Wykażemy, że $a_l\cdot(-1)^l > 0$.

Ponieważ $\psi(x)$ jest dodatnia, więc $a_0 > 0$. Zbadamy teraz monotoniczność funkcji $\psi'(x)$. Mamy:

$$\psi''(x) = \frac{1}{2}A(\alpha)\cdot\alpha\cdot\left[\mu\left(\frac{x}{2}\right)\right]^{2\alpha-2}\cdot\left[(2\alpha-1)\,\mu'\left(\frac{x}{2}\right)^2+\mu\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\mu''\left(\frac{x}{2}\right)\right]$$

Ponieważ $\mu''\left(\frac{x}{2}\right) > 0$ dla $x\in(0,n)$, więc $\psi''(x) > 0$, jeżeli $(2\alpha-1) > 0$.
Jeżeli $(2\alpha-1) < 0$, wtedy

$$\mu\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\mu''\left(\frac{x}{2}\right)+(2\alpha-1)\,\mu'\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geq \left|\mu'\left(\frac{x}{2}\right)\right|^2\cdot\frac{\left(\frac{\lambda x}{2}\right)^2-\left(\sin\frac{\lambda x}{2}\right)^2}{\left(\sin\frac{\lambda x}{2}-\frac{\lambda x}{2}\cos\frac{\lambda x}{2}\right)^2} > 0,$$

czyli $\psi'(x)$ jest funkcją rosnącą w przedziale $\langle 0,n\rangle$ dla każdego α. Obliczmy współczynnik a_l, dla którego $l > 0$. Mamy

$$a_l = \frac{2}{n}\int_0^n \psi(t)\cos\frac{l\pi t}{n}\,dt = -\frac{2}{l\pi}\int_0^n \psi'(t)\sin\frac{l\pi t}{n}\,dt =$$

$$= -\frac{2}{l\pi}\sum_{\nu=1}^{l}\int_{(\nu-1)\frac{n}{l}}^{\frac{\nu n}{l}} \psi'(t)\sin\frac{l\pi t}{n}\,dt = -\frac{2}{l\pi}\sum_{\nu=1}^{l}\int_0^{\frac{n}{l}} \psi'(s +$$

$$+ \frac{(\nu-1)n}{l}) \cdot \sin\frac{l\,(s + \frac{(\nu-1)n}{l}}{n}\quad ds =$$

$$= \frac{2}{l\pi}\int_0^{\frac{n}{l}} \sum_{\nu=1}^{l} \psi'(s + \frac{(\nu-1)n}{l}) \cdot \sin\frac{l\pi s}{n}\,(-1)^{\nu}\,ds =$$

$$= \frac{2}{l\pi}\int_0^{\frac{n}{l}} \sin\frac{l\pi s}{n} \sum_{\nu=1}^{l} (-1)^{\nu}\,\psi'(s + \frac{(\nu-1)n}{l})$$

Ponieważ $\psi'(x)$ jest dodatnia i monotoniczna, więc znak a_l będzie taki jak znak $(-1)^l$, co daje, że

$$(-1)^l\,a_l > 0.$$

Powróćmy teraz do pochodnej cząstkowej Czebyszewa, rzędu α wielomianu algebraicznego $p_{nm}(x_1,x_2)$. Zgodnie z poprzednimi rozważaniami możemy napisać:

$$D^{(\alpha)}_{x_1}\,p_{nm}(x_1,x_2) = (-1)^{[\alpha]}\sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{m} c_{k_ik_2}\,\psi(k_1)\cdot\varphi(k_1)\cdot T_{k_1,k_2}(x_1,x_2) =$$

$$+ (-1)^{[\alpha]}\sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{m} c_{k_1k_2}\sum_{l=0}^{\infty} a_l\cos\frac{l\pi k_1}{n}\cdot\varphi(k_1)\cdot T_{k_1,k_2}(x_1,x_2) =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} a_l(-1)^{[\alpha]}\sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{m} c_{k_1k_2}\cdot\varphi(k_1).T_{k_1,k_2}[\cos(\pi l + \arccos x_1);\ x_2] =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} a_l \cdot \frac{1}{2} \Delta^{\alpha}_{h_1 l} \left\{ p_{nm} \left[\cos\left(\frac{\pi l}{n} + \arccos x_1\right); x_2 \right] + \right.$$

$$\left. + p_{nm} \left[\cos\left(\frac{\pi l}{n} - \arccos x_1\right); x_2 \right] \right\}.$$

Mamy więc, że

$$\left\| D^{(\alpha)}_{x_1} p_{nm}(x_1, x_2) \right\| \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} |a_l| \cdot \left\| \Delta^{\alpha}_{h_1, 1} p_{nm}(x_1, x_2) \right\| =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} |a_l(-1)^l| . \left\| \Delta^{\alpha}_{h_1 1} p_{nm}(x_1, x_2) \right\| =$$

$$= \Psi(n) \cdot \left\| \Delta^{\alpha}_{h_1 1} p_{nm}(x_1, x_2) \right\|$$

Jest więc prawdziwa następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 1

Niech h_1 będzie takie, że $\arccos(h_1) \in (0, \frac{\pi}{n})$, $\alpha > 0$, wtedy

$$\left\| D^{(\alpha)}_{x_1} p_{nm}(x_1, x_2) \right\| \leqslant \left[\frac{n^2}{1 - T_n(h_1)} \right]^{\alpha} \cdot \left\| \Delta^{\alpha}_{h_1 1} p_{nm}(x_1, x_2) \right\|$$

Analogicznie, jeżeli $\arccos(h_2) \in (0, \frac{\pi}{m})$, wtedy

$$\left\| D^{(\alpha)}_{x_2} p_{nm}(x_1, x_2) \right\| \leqslant \left[\frac{m^2}{1 - T_m(h_2)} \right]^{\alpha} \left\| \Delta^{\alpha}_{1, h_2} p_{nm}(x_1, x_2) \right\|$$

<u>Wniosek 2.1.</u> Niech $h_1 = \cos \frac{\pi}{2n}$, $\alpha > 0$, wtedy nierówności z twierdzenia 1.1 przyjmą postać

$$\left\| D^{(\alpha)}_{x_1} p_{nm}(x_1, x_2) \right\| \leqslant C(\alpha) \cdot n^{2\alpha} \left\| p_{nm}(x_1, x_2) \right\|,$$

$$\|D^{(\alpha)}_{x_2}\, p_{nm}(x_1,x_2)\| \leqslant C(\alpha)\,.\, m^{2\alpha}\|p_{nm}(x_1,x_2)\|,$$

gdzie

$$C(\alpha) = \sum_{j=0}^{\infty} |\tbinom{\alpha}{j}|$$

Dowód jest oczywisty na podstawie własności $\Delta^{\alpha}_{h_1h_2} f$ podanej w pracy [4].

LITERATURA

[1] BUTZER P.L., STENS R.L.: Chebyshev transform methods in the solution of the fundamental theorem of best algebraic approsimation in the fractional case. Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai. Budapest 1976, (19), (191-221).

[2] BUTZER P.L., DYCKHOFF H., GÖRLICH E., STENS R.L.: Best trigonometric fractional order derivatives and Lipshitz classes. Canadian Journal of Mathematics. 1977, (XXIX), (781-793).

[3] LUKS-OGRODNIK B.: Zastosowanie metody transformaty Czebyszewa w aproksymacji funkcji dwóch zmiennych. Cz. I. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Mat.-Fiz. z. 35, Gliwice 1979, ss. 101-115.

[4] LUKS-OGRODNIK B.: Metoda transformaty Czebyszewa w aproksymacji funkcji dwóch zmiennych. Cz. II. Pochodne rzędu $\alpha > 0$. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Mat.-Fiz. z. 39 (w druku).

[5] TABERSKI R.: Aproksymacja funkcji wielomianami trygonometrycznymi. Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 1979.

НЕРАВЕНСТВО ТИПА БЕРНШТЕЙНА

Р е з ю м е

В представленной работе обобщено неравенство типа Бернштейна [2], [5] для частных производных Чебышева алгебраических многочленов.

THE INEQUALITY OF THE BERNSTEIN TYPE

S u m m a r y

The paper generalizes the inequality of the Bernstein type [2],[5] for Chebyshev partial derivatives of algebraic polynomials.

Wpłynęło do Redakcji 12.IX.1980 r.

Recenzent
Prof. dr hab. J. Musielak