ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 39 Nr kol. 686

Barbara LUKS-OGRODNIK

ZASTOSOWANIE POCHODNYCH CZĄSTKOWYCH CZEBYSZEWA RZĘDU $\alpha > 0$ W APROKSYMACJI FUNKCJI DWÓCH ZMIENNYCH Z PRZESTRZENI L_w^P

Streszczenie. W pracy uogólniono wyniki uzyskane przez P.L.Butzera i R.L. Stensa [1] na funkcje przestrzeni L_w^P z normami mieszanymi i z wagą $w(x_1,x_2)$.

1. Wstęp

Niech $X = L_w^P$; $p = (p_1,p_2)$; $1 \leq p_1, p_2 < \infty$ oznacza przestrzeń funkcji mierzalnych określonych w prostokącie

$$E = \begin{cases} -1 \leq x_1 \leq 1 \\ -1 \leq x_2 \leq 1 \end{cases}$$ gdzie normę określamy następująco:

$$\|f\| = \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \left| f(x_1,x_2) \right|^{p_1} \cdot w(x_1)dx_1 \right]^{\frac{p_2}{p_1}} \cdot w(x_2)dx_2 \right\}^{\frac{1}{p_2}}$$

$$w(x_i) = (1 - x_i^2)^{-\frac{1}{2}}; \qquad i = 1,2.$$

W dowodach często korzysta się z transformaty Czebyszewa funkcji f, określonej następująco:

$$f^\wedge(k_1,k_2) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} f(x_1,x_2) \cdot T_{k_1}(x_1) \cdot T_{k_2}(x_2) \cdot w(x_1) \cdot w(x_2)dx_1dx_2,$$

gdzie $T_{k_i}(x_i) = \cos(k_i \cdot \arccos x_i)$, $i = 1,2$, $k_i = 0,1,2,\ldots$ jest wielomianem Czebyszewa oraz z własności jednoznaczności tej transformaty [2].

Operator translacji $\tau_{h_1h_2} f$ oraz częstkowe moduły ciągłości Czebyszewa zostały określone w pracy [2].

Dla przypomnienia:

$$\omega_1^T(f,\eta_1,1) \quad \sup_{\eta_1 \leq h_1 \leq 1} \|\tau_{h_1 1} f - f\| = \sup_{\eta_1 \leq h_1 \leq 1} \|\Delta^1_{h_1 1} f\|$$

$$\omega_1^T(f,1,\eta_2) = \sup_{\eta_2 \leq h_2 \leq 1} \|\tau_{1,h_2} f - f\| = \sup_{\eta_2 \leq h_2 \leq 1} \|\Delta^1_{1h_2} f\|$$

W pracy [3] zostały zdefiniowane pochodne cząstkowe Czebyszewa rzędu α, funkcji $f \in X$ w następujący sposób:

Definicja. Niech funkcje f i $g_1 \in X$. Jeżeli

$$\lim_{h_1 \to 1^-} \left\| \frac{\Delta^{\alpha}_{h_1 1} f}{(1-h_1)^{\alpha}} - g_1 \right\| = 0,$$

to funkcję g_1 nazywamy pochodną cząstkową Czebyszewa rzędu α względem x_1 i piszemy:

$$D^{(\alpha)}_{x_1} f = g_1.$$

Podobnie, jeżeli $g_2 \in X$ i

$$\lim_{h_2 \to 1^-} \left\| \frac{\Delta^{\alpha}_{1h_2} f}{(1-h_2)^{\alpha}} - g_2 \right\| = 0 \text{ to } \quad D^{(\alpha)}_{x_2} f = g_2,$$

gdzie

$$(\Delta^{\alpha}_{h_1 h_2} f)(x_1,x_2) = (-1)^{[\alpha]} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} (\tau^j_{h_1 h_2} f)(x_1,x_2).$$

Własności tych pochodnych zostały podane i wykazane w pracy [3]. Przez $p_{kl}(x_1,x_2)$ będziemy oznaczać wielomian algebraiczny stopnia k ze względu na x_1, stopnia l ze względu na x_2. Symbolem P_{nm} oznaczymy zbiór wszystkich wielomianów $p_{kl}(x_1,x_2)$, dla których $k \leq n$, $l \leq m$.

Wprowadźmy podstawową wielkość

$$E_{nm}(f,X) = \inf_{p_{kl} \in P_{nm}} \|f - p_{kl}\| \qquad n,m \geq 0,$$

zwaną najlepszym przybliżeniem funkcji f wielomianami algebraicznymi.

2. Podstawowe twierdzenia aproksymacyjne

TWIERDZENIE 1.1

Niech $f \in X$, $\alpha < 1$, $\beta < 1$ i jest spełniony następujący warunek:

$$E_{nm}(f,X) = O(n^{-2\alpha} + m^{-2\beta}) \qquad \begin{matrix} n \to \infty \\ m \to \infty \end{matrix}$$

Wtedy istnieją pochodne cząstkowe Czebyszewa

$$D_{x_1}^{(\gamma_1)} f, \; D_{x_2}^{(\gamma_2)} \quad \text{dla} \quad 0 < \gamma_1 < \alpha, \; 0 < \gamma_2 < \beta$$

oraz

$$\left\| D_{x_1}^{(\gamma_1)} f - D_{x_1}^{(\gamma_1)} p_{nm}^{*} \right\| = O\left[n^{2\gamma_1}(n^{-2\alpha} + m^{-2\beta})\right],$$

$$\left\| D_{x_2}^{(\gamma_2)} f - D_{x_2}^{(\gamma_2)} p_{n,m}^{*} \right\| = O\left[m^{2\gamma_2}(n^{-2\alpha} + m^{-2\beta})\right]$$

DOWÓD

Niech $p_{n,m}^{*}(x_1,x_2)$ oznacza wielomian najlepszego przybliżenia dla funkcji f, czyli $E_{n,m}(f,X) = \|f - p_{n,m}^{*}\|$.

Weźmy wielomian $p^{*}_{2^{l+1},m_{2^{l+1}}}(x_1,x_2)$, gdzie

$$m_{2^{l+1}} = \min\{m \in N;\ m^{-2\beta} \leqslant 2^{-2\alpha(l+1)}\}.$$

Wykażemy, że ciąg pochodnych $D_{x_1}^{(\gamma_1)} p^{*}_{2^{l+1},m_{2^{l+1}}}(x_1,x_2)$ spełnia warunek Couchy'ego w metryce przestrzeni X.

W tym celu oszacujemy następującą różnicę dla $l > k$:

$$\left\| D_{x_1}^{(\gamma_1)} p^{*}_{2^{l+1},m_{2^{l+1}}} - D_{x_1}^{\gamma_1} p^{*}_{2^{k+1},m_{2^{k+1}}} \right\| \leqslant \sum_{\nu=k+1}^{l} \left\| D_{x_1}^{(\gamma_1)} (p^{*}_{2^{\nu+1},m_{2^{\nu+1}}} - p^{*}_{2^{\nu},m_{2^{\nu}}}) \right\|$$

Zgodnie z wnioskiem 1 [5] mamy dalej:

$$\left\| D_{x_1}^{(\gamma_1)} P^*_{2^{l+1}, m_{2^{l+1}}} - D_{x_1}^{(\gamma_1)} P^*_{2^{k+1}, m_{2^{k+1}}} \right\| \leq C(\gamma_1) \sum_{\nu=k+1}^{l} 2^{2(\nu+1)\gamma_1} \left\| P^*_{2^{\nu+1}, m_{2^{\nu+1}}} - \right.$$

$$\left. - P^*_{2^\nu, m_{2^\nu}} \right\| \leq C(\gamma_1) \sum_{\nu=k+1}^{l} 2^{2(\nu+1)\gamma_1} \left[E_{2^{\nu+1}, m_{2^{\nu+1}}}(f,X) + \right.$$

$$\left. + E_{2^\nu, m_{2^\nu}}(f,X) \right] \leq 2C(\gamma_1) \sum_{\nu=k+1}^{l} 2^{2(\nu+1)\gamma_1} \cdot E_{2^\nu, m_{2^\nu}}(f,X).$$

Na podstawie założenia twierdzenia i warunku narzuconego na m_{2^ν} mamy dalej:

$$\left\| D_{x_1}^{(\gamma_1)} P^*_{2^{l+1}, m_{2^{l+1}}} - D_{x_1}^{(\gamma_1)} P^*_{2^{k+1}, m_{2^{k+1}}} \right\| \leq C \cdot 2 \cdot C(\gamma_1) \sum_{\nu=k+1}^{l} 2^{2(\nu+1)\gamma_1} \cdot 2^{\nu(-2\alpha)} \leq$$

$$\leq 2C_1(\alpha) C(\gamma_1) \sum_{\nu=k+1}^{l} 2^{2(\nu+1)(\gamma_1-\alpha)} \leq 2\, C_1(\alpha)\, C(\gamma_1) \cdot \frac{1}{2^{2k(\alpha-\gamma_1)}\left(2^{2(\alpha-\gamma_1)} - 1\right)}$$

Widzimy, że ciąg $D_{x_1}^{(\gamma_1)} P^*_{2^{l+1}, m_{2^{l+1}}}(x_1,x_2)$ spełnia warunek Cauchy'ego, więc z zupełności przestrzeni X wynika istnienie funkcji $\varphi_{\gamma_1}(x_1,x_2) \in X$, dla której

$$\left\| D_{x_1}^{(\gamma_1)} P^*_{2^{l+1}, m_{2^{l+1}}} - \varphi_{\gamma_1} \right\| \xrightarrow[l \to \infty]{} 0.$$

Ponieważ

$$\left\| P^*_{2^{l+1}, m_{2^{l+1}}} - f \right\| \leq C\left(2^{-2\alpha(l+1)} + m_{2^{l+1}}^{-2\beta}\right) \leq 2C \cdot 2^{-2\alpha(l+1)}$$

więc

$$\left\| p^{*}_{2^{l+1},m_{2^{l+1}}} - f \right\| \xrightarrow[l\to\infty]{} 0$$

Na podstawie własności domkniętości operatora $D^{(\gamma_1)}_{x_1} f$, [3] mamy, że istnieje pochodna cząstkowa rzędu γ_1 funkcji f i $D^{(\gamma_1)}_{x_1} f(x_1,x_2) = \varphi_{\gamma_1}(x_1,x_2)$ p.w.

Wykażemy teraz drugą część tezy. Szereg $\sum_{\nu=0}^{\infty} D^{(\gamma_1)}_{x_1}(p^{*}_{2^{\nu+1},m_{2^{\nu+1}}} - p^{*}_{2^{\nu},m_{2^{\nu}}})$ jest zbieżny prawie wszędzie w E, a jego suma jest równa $\varphi_{\gamma_1}(x_1,x_2) - p^{*}_{1,m}(x_1,x_2)$.

Niech $p^{*}_{nm}(x_1,x_2)$ będzie wielomianem najlepszego przybliżenia. Rozpatrzmy

$$\left\| D^{(\gamma_1)}_{x_1} f - D^{(\gamma_1)}_{x_1} p^{*}_{n,m} \right\|$$

Wybierając takie l, by $2^{l+1} \leqslant n < 2^{l+2}$, otrzymujemy, że

$$\left\| D^{(\gamma_1)}_{x_1} f - D^{(\gamma_1)}_{x_1} p^{*}_{nm} \right\| \leqslant \left\| D^{(\gamma_1)}_{x_1} f - D^{(\gamma_1)}_{x_1} p_{2^{l+1},m_{2^{l+1}}} \right\| +$$

$$+ \left\| D^{(\gamma_1)}_{x_1} p^{*}_{2^{l+1},m_{2^{l+1}}} - D^{(\gamma_1)}_{x_1} p^{*}_{n,m} \right\| =$$

$$= \left\| \varphi_{\gamma_1} - D^{(\gamma_1)}_{x_1} p^{*}_{2^{l+1},m_{2^{l+1}}} \right\| + \left\| D^{(\gamma_1)}_{x_1} p^{*}_{2^{l+1},m_{2^{l+1}}} - D^{(\gamma_1)}_{x_1} p^{*}_{n,m} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=l+1}^{\infty} \left\| D^{(\gamma_1)}_{x_1}(p^{*}_{2^{\nu+1},m_{2^{\nu+1}}} - p^{*}_{2^{\nu},m_{2^{\nu}}}) \right\| + \left\| D^{(\gamma_1)}_{x_1}(p^{*}_{2^{l+1},m_{2^{l+1}}} - p^{*}_{n,m}) \right\| \leqslant$$

$$\leq \sum_{\nu=l+1}^{\infty} C(\gamma_1) \cdot 2^{(\nu+1) \cdot 2\gamma_1} \cdot \left\| p^*_{2^{\nu+1}, m_{2^{\nu+1}}} - p^*_{2^\nu, m_{2^\nu}} \right\| +$$

$$+ C(\gamma_1) \cdot n^{2\gamma_1} [E_{2^{l+1}, m_{2^{l+1}}}(f,X) + E_{nm}(f,X)] \leq$$

$$\leq C(\gamma_1) \cdot \sum_{\nu=l+1}^{\infty} 2^{(\nu+1) \cdot 2\gamma_1} \cdot [E_{2^{\nu+1}, m_{2^{\nu+1}}}(f,X) + E_{2^\nu, m_{2^\nu}}(f,X)] +$$

$$+ C(\gamma_1)\, n^{2\gamma_1} [2^{-2(l+1)} + m_{2^{l+1}}^{-2\beta} + n^{-2\alpha} + m^{-2\beta}] \leq$$

$$\leq 2 \cdot C(\gamma_1) \cdot \sum_{\nu=l+1}^{\infty} 2^{(\nu+1) \cdot 2\gamma_1} [E_{2^\nu, m_{2^\nu}}(f,X)] + C(\gamma_1) \cdot n^{2\gamma_1} [2 \cdot 2^{2\alpha} n^{-2\alpha} +$$

$$+ n^{-2\alpha} + m^{-2\beta}) \leq 4 \cdot 2^{2\alpha} \cdot C(\gamma_1) \cdot \sum_{\nu=l+1}^{\infty} 2^{2\gamma_1(\nu+1)} \cdot 2^{-2\alpha(\nu+1)} +$$

$$+ C_1(\alpha) \cdot C(\gamma_1) \cdot n^{2\gamma_1} (n^{-2\alpha} + m^{-2\beta}) \leq 4 \cdot C(\gamma_1) \cdot C(\alpha) \cdot 2^{2(l+2)(\gamma_1 - \alpha)} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{1 - 2^{2(\gamma_1 - \alpha)}} + C_1(\alpha) \cdot C(\gamma_1) \cdot n^{2\gamma_1} (n^{-2\alpha} + m^{-2\beta}) \leq 4\, C_1(\gamma_1, \alpha) \cdot n^{2(\gamma_1 - \alpha)} +$$

$$C_2(\gamma_1, \alpha) \cdot n^{2\gamma_1} \cdot (n^{-2\alpha} + m^{-2\beta}) \leq C_3(\gamma_1, \alpha) \cdot n^{-2\gamma_1} (n^{-2\alpha} + m^{-2\beta})$$

Podstępując analogicznie można wykazać istnienie pochodnych $D_{x_2}^{(\gamma_2)} f$, $\gamma_2 < \beta$ i podobną własność tej pochodnej, tzn.

$$\left\| D_{x_2}^{(\gamma_2)} f - D_{x_2}^{(\gamma_2)} p^*_{nm} \right\| = O[m^{2\gamma_2} (n^{-2\alpha} + m^{-2\beta})]$$

Wykażemy teraz twierdzenie odwrotne.

TWIERDZENIE 1.2

Niech $f \in X$, $\alpha < 1$, $\beta < 1$, $\gamma_1 < \alpha$, $\gamma_2 < \beta$.

Jeżeli istnieją pochodne $D_{x_1}^{(\gamma_1)} f$, $D_{x_2}^{(\gamma_2)} f \in X$ oraz

$$\left\| D_{x_1}^{(\gamma_1)} f - D_{x_1}^{(\gamma_1)} p_{nm}^{*} \right\| = O[n^{2\gamma_1}(n^{-2\alpha} + m^{-2\beta})],$$

$$\left\| D_{x_2}^{(\gamma_2)} f - D_{x_2}^{(\gamma_2)} p_{nm}^{*} \right\| = O[m^{2\gamma_2}(n^{-2\alpha} + m^{-2\beta})]$$

wtedy

$$E_{nm}(f,X) = O(n^{-2\alpha} + m^{-2\beta}).$$

DOWÓD

Ponieważ $E_{nm}(f,X) = E_{nm}(f - p_{nm}^{*},X)$ i są spełnione założenia twierdzenia Jacksona [3], więc

$$E_{nm}(f,X) \leq I(\gamma_1) \cdot n^{-2\gamma_1} \cdot \left\| D_{x_1}^{(\gamma_1)}(f - p_{nm}^{*}) \right\| + I(\gamma_2) \cdot m^{-2\gamma_2} \left\| D_{x_2}^{(\gamma_2)}(f - p_{nm}^{*}) \right\|$$

Zgodnie z założeniem mamy dalej:

$$E_{nm}(f,X) \leq I(\gamma_1) \cdot C_1(\gamma_1,\alpha) \cdot n^{-2\gamma_1} \cdot n^{2\gamma_1}(n^{-2\alpha} + m^{-2\beta}) +$$

$$+ I(\gamma_2) \cdot C_2(\gamma_2,\beta) \cdot m^{-2\gamma_2} \cdot m^{2\gamma_2}(n^{-2\alpha} + m^{-2\beta}) \leq$$

$$\leq K(\gamma_1,\gamma_2,\alpha,\beta) \cdot (n^{-2\alpha} + {}^{-2\beta}),$$

co daje tezę twierdzenia.

Ponieważ w pracy [4] zostało udowodnione twierdzenie o równoważności następujących warunków:

1) $E_{n,m}(f,X) = O(n^{-2\alpha} + m^{-2\beta}), \quad 0 < \alpha, \ \beta < 1$

2) $f \in \mathrm{Lip}^T(\alpha,\beta)$,

możemy więc wypowiedzieć następujący wniosek:

Wniosek 1.1. Niech $f \in X$, α, $\beta < 1$, $\gamma_1 < \alpha$; $\gamma_2 < \beta$, wtedy następujące warunki są równoważne:

(i) $E_{n,m}(f,X) = O(n^{-2\alpha} + m^{-2\beta})$

(ii) istnieją

$$D_{x_1}^{(\gamma_1)}, \quad D_{x_2}^{(\gamma_2)} f \qquad \text{oraz}$$

$$\left[D_{x_1}^{(\gamma_1)} f - D_{x_1}^{(\gamma_1)} p_{nm}^{*}\right] = O\left[n^{2\gamma_1}(n^{-2\alpha} + m^{-2\beta})\right],$$

$$\left[D_{x_2}^{(\gamma_2)} f - D_{x_2}^{(\gamma_2)} p_{nm}^{*}\right] = O\left[m^{-2\gamma_2}(n^{-2\alpha} + m^{-2\beta})\right].$$

(iii) $f \in \mathrm{Lip}^T(\alpha,\beta)$.

LITERATURA

[1] BUTZER P.L., STENS R.L.: Chebyshev transform methods in the Solution of the fundamental theorem of best algebraic approximation in the fractional case. Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai. Budapest, 1976, (19), (ss. 191-211).

[2] LUKS-OGRODNIK B.: Zastosowanie metody transformaty Czebyszewa w aproksymacji funkcji dwóch zmiennych. Cz. I. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Mat.-Fiz. z. 35, Gliwice 1979, ss. 101-115.

[3] LUKS-OGRODNIK B.: Metoda transformaty Czebyszewa w aproksymacji funkcji dwóch zmiannych. Cz. II. Pochodne rzędu $\alpha > 0$. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Mat.-Fiz. z. 39 (w druku).

[4] LUKS-OGRODNIK B.: Twierdzenie typu Bernsteina dla funkcji dwóch zmiennych z przestrzeni L_w^p. Zeszyty Naukowa Politechniki Śląskiej Mat.-Fiz. z. 39 (w druku).

[5] LUKS-OGRODNIK B.: Nierówność typu Bernsteina. Zeszyty Naukowe Polit. Śląskiej, Mat.-Fiz. (w przygotowaniu).

ПРИМЕНЕНИЕ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕБЫШЕВА ПОРЯДКА $\alpha > 0$
В АПРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ИЗ ПРОСТРАНСТВА L_w^p

Р е з ю м е

В представленной работе обобщены результаты П.Л. Бутцера и Р.Л. Стенса иа функции пространства L_w^p с миксированными нормами.

THE APPLICATION OF CHEBYSHEV PARTIAL DERIVATIVES OF ORDER $\alpha > 0$
IN THE APPROXIMATION OF FUNCTION OF TWO VARIABLES FROM SPACE L_w^p

S u m m a r y

The paper generalizes the results of P.L. Butzer and R.L. Stens [1] for functions in the spaces L_w^p with a mixed norms.

Wpłynęło do Redakcji 12.IX.1980 r.

Recenzent

Prof. dr hab. J. Musielak