ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 39 Nr kol. 686

Tomasz JĘKOT

NIELINIOWE GEOMETRYCZNIE PROBLEMY TERMOSPRĘŻYSTOŚCI SPRZĘŻONEJ POWŁOK GRUBYCH
I. SFORMUŁOWANIE PROBLEMÓW BRZEGOWYCH

Straszczenie. W pracy sformułowano zagadnienia brzegowe dla powłok poddanych działaniu niestacjonarnego pola temperatur z uwzględnieniem sprzężenia pola termicznego z polem przemieszczań; rozpatrywany jest przypadek nieliniowości geometrycznej.

1. Wstęp

Opis sprzężonych pól temperatur i przemieszczeń w powłokach nieliniowych można otrzymać na drodze uogólnienia rezultatów teorii sprzężonej płyt i powłok klasycznie liniowych, por. np. [26]x), ponieważ w teorii tej przyjmuje się wiele hipotez upraszczających, których stosowanie tolerowane jest dla płyt i powłok cienkich, przeto wyniki teoretyczne - uzyskane przez całkowanie równań wymienionej teorii - mogą prowadzić do dużych błędów, w przypadkach zmiennych obciążeń, nieciągłości krzywizny,wzrostu grubości powłok, itp. por. [24], [25]. Błąd ten zwiększa się szczególnie szybko wraz ze wzrostem grubości rozpatrywanej powłoki [24].

W pracach [5], [23], [25] wyprowadzone zostały równania statyki i dynamiki nieliniowych geometrycznie powłok sprężystych. Siły wewnętrzne odniesiono do konfiguracji początkowej. Przy sprowadzaniu problemu przestrzennego teorii sprężystości do zagadnienia dwuwymiarowego (funkcje dwu zmiennych) przyjęto: w pracach [23], [25] powłoki tzw. typu Timoszenki, a w [5] - hipotezę Kirchhoffa-Love'a. W pracach [1], [2] podano równania wariacyjne teorii powłok cienkich fizykalnie i geometrycznie nieliniowych, przytoczono też równania przemieszczeniowe tej teorii oraz podano warunki brzegowe oraz sformułowano problem brzegowy.

Nieliniowe problemy teorii powłok w bardzo ogólnym ujęciu rozpatrzone są w monografii Woźniaka [20] oraz w pracach [8], [10], a niektóre zagadnienia sprzężonych pól termicznych i przemieszczeniowych w pracy [21]. W [4] rozważano powłoki cienkie, przyjmując model Donnella-Musztariego-Własowa; korzystając z zasady Hamiltona otrzymano równania ruchu i warunki brzegowe, uwzględniono też odkształcenia w kierunku stycznym i normalnym,a tak-

x) Literatura tutaj przytaczana umieszczona jest w części II artykułu.

że wpływy termiczne. Praca [7] omawia klasyczną nieliniową teorię powłok. Podano w niej kanoniczną postać równań nieliniowej teorii powłok pierwszego przybliżenia. Rozważano kryteria przybliżenia tensora naprężenia oraz podjęto próby oszacowania błędu rozwiązań. Obszerny przegląd problemów termomechaniki powłok przedstawiono w pracy [3]. Kolejnym sposobem podejścia do problemu termomechaniki sprężystej powłok jest traktowanie połwoki jako trójwymiarowego kontinuum, a więc przyjęcie ogólnych równań przewodnictwa ciepła i równowagi dynamicznej (równań ruchu), słusznych dla elementu trójwymiarowego ośrodka sprężystego, przy uwzględnieniu nieliniowości geometrycznej. Takie podejście prezentuje niniejsza praca. Problem jest analizowany we współrzędnych krzywoliniowych, którymi parametryzuje się obszar zajmowany przez powłokę. W stronie geometrycznej zagadnienia przyjęto tensor odkształceń skończonych Lagrange'a. Przyjęto równania konstytutywne w postaci zaproponowanej przez Murnaghana, por. [9], rozszerzonej o wpływy termiczne, przy uwzględnieniu jednak zapisu we współrzędnych uogólnionych. Określono też warunki początkowo-brzegowe. Ze względu na to, że mamy na uwadze algorytmizację numeryczną podanych tutaj równań, zadania formułujemy w ujęciu rozwiązań uogólnionych. Ten sposób pozwala wykorzystać do rozwiązań numerycznych np. metodę elementów skończonych.

2. Wprowadzenie

Przyjmujemy, że wskaźniki łańciskie $i,j,k,...,$ (greckie $\alpha,\beta,...$) przebiegać będą zbiór liczb 1,2,3, (1,2).

Załóżmy też, że powłoka o stałej grubości $2h$ zajmuje przed odkształceniem obszar V o brzegu $S = \partial V$.

Wprowadzamy powierzchnię środkową S_o, równo oddaloną od płatów powierzchni brzegowych, "górnej" $-S^+$ i "dolnej" $-S^-$.

Przyjmujemy, że w układzie współrzędnych kartezjańskich równanie powierzchni S_o będzie określone zależnościami:

$$\mathring{R} = \mathring{R}(x^\alpha), \quad \mathring{R} = [\mathring{R}_1, \mathring{R}_2, \mathring{R}_3] = e_i\,\mathring{R}_i, \tag{2.1}$$

gdzie x^α są współrzędnymi krzywoliniowymi powierzchni S_o, a e_i - bazą układu ortonormalnego, względem którego określony jest wektor $\mathring{R}(\mathring{R}_i)$. Każdy punkt powierzchni S_o najeżamy bazą lokalną

$$g_\alpha = \mathring{R}_{,\alpha}, g_3 = \frac{g_1 \times g_2}{|g_1 \times g_2|} = n \tag{2.2}$$

W równaniu (2.1) symbol $(^\circ)$ oznacza, że wielkość $(\cdot)$ odnosi się do punktu powierzchni środkowej powłoki; elementy g_α są styczne do linii

x, którymi parametryzowana jest powierzchnia środkowa powłoki; wektor g_3 gazy jest jednostkowy i ortogonalny do powierzchni środkowej; przecinkiem, umieszczonym na dole, po prawej stronie rdzenia oznaczono pochodną cząstkową. Dowolny punkt obszaru powłoki określony jest wektorem:

$$r = r(x^i) = \overset{o}{R} + x^3 n = \overset{o}{R} + x^3 g_3, \tag{2.3}$$

Bazę dla powierzchni współrównoległych do powierzchni S_o, por. [20], określa się następująco:

$$\hat{g}_\alpha = g_\alpha + x^3 n_{,\alpha}, \quad \hat{g}_3 = g_3. \tag{2.4}$$

Umieszczenie znaku ^ nad obiektem $(\hat{\cdot})$ będzie oznaczało, że odnosi się on do punktów obszaru v, tzn. $\hat{g}(x^i)\Big|_{x^3=0} = g_\alpha$. Wprowadzamy bazę dualną g^i, $\hat{g}^i$, tak aby

$$g^i \circ g_j = \delta^i_j, \quad \hat{g}^i \circ \hat{g}_j = \delta^i_j. \tag{2.5}$$

Tensory metryczne dla S_o oraz powierzchni współrównoległych określamy kolejno równaniami:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= g_i \circ g_j = g_{ji}, \quad g^{ij} = g^i \circ g^j = g^{ji}, \\ \hat{g}_{ij} &= \hat{g}_i \circ \hat{g}_j = \hat{g}_{ji}, \quad \hat{g}^{ij} = \hat{g}^i \circ \hat{g}^j = \hat{g}^{ji}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Dla opisu ruchu punktów powłoki przyjmujemy opis Lagrange'a, przy uwzględnieniu współrzędnych konwekcyjnych, tj. przy założeniu, że linie x^i odkształcają się wraz z ośrodkiem, a odpowiadającym sobie punktom w powłoce przed i po odkształceniu przypisane są te same współrzędne krzywoliniowe, zatem jeśli $A(x^i_A) \in V$ przekształca się w $\overset{*}{A}(\overset{*}{x}{}^i_A) \in \overset{*}{V}$, to $x^i_A = \overset{*}{x}{}^i_A$.

Wielkościom odnoszącym się do konfiguracji odkształconej będziemy dopisywać znak *. Po odkształceniu powłoka zajmuje obszar V^* o brzegu S^*. Wektorowi r przed odkształceniem odpowiada wektor $\overset{*}{r}$ po odkształceniu. Wprowadzamy bazę wektorową i tensor metryczny dla konfiguracji po odkształceniu

$$\hat{\overset{*}{g}}_i = \overset{*}{r}_{,i}, \quad \hat{\overset{*}{g}}_{ij} = \hat{\overset{*}{g}}_i \circ \hat{\overset{*}{g}}_j \tag{2.7}$$

oraz - analogicznie jak poprzednio - wektory bazy dualnej $\hat{\overset{*}{g}}{}^i$, która generuje tensor metryczny $\hat{\overset{*}{g}}{}^{ij}$. Wektor przemieszczenia $u = r - r$ przedstawiony jest przez współrzędne kontrawariantne $(\overset{*}{u}{}^i)$ lub (u^i), odpowiadające kolejno bazom $\hat{\overset{*}{g}}_i$, $\hat{g}_i$:

$$u = \overset{*}{u}{}^i \hat{\overset{*}{g}}_i = u^i \hat{g}_i. \tag{2.8}$$

Gradient temperatury Θ oznaczać będziemy przez $\operatorname{grad}\Theta = \hat{\overset{*}{g}}{}^j \Theta_{,j}$ lub $(\operatorname{grad}\Theta)_j = \Theta_{,j}$. Zgodnie z prawem przewodnictwa ciepła Fouriera, strumień cieplny, oznaczany tutaj przez $\overset{*}{q}_j$, jest proporcjonalny do gradientu skalarnego pola temperatury, czyli

$$\overset{*}{q}_j = -\underset{T}{\lambda}{}^k_j \, \Theta_{,k}, \tag{2.9}$$

Jeżeli w (2.9) przyjmiemy, że ośrodek jest jednorodny i izotropowy, to

$$\underset{T}{\lambda}{}^i_j(x^k) \to \underset{T}{\lambda} = \text{const.} \;\; \forall x_k \in \mathcal{V}, \text{ skąd } \overset{*}{q}_j = -\underset{T}{\lambda}\, \Theta_{,j}; \tag{2.10}$$

W (2.9), (2.10) przez $\overset{*}{q}_i$ oznaczone współrzędne kowariantne wektora strumienia cieplnego w bazie konfiguracji po odkształceniu, dalej $\underset{T}{\lambda}$ jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego i wreszcie $\Theta = T - T_o = \Theta(x^i, t)$ jest poszukiwaną funkcję pola temperatury, określającą przyrost pola temperatury ponad stan naturalny, określony temperaturą $T_o(x^i, t) = \text{const}$ dla $(x^i, t) \in \mathcal{V} \times \mathcal{T}$. Nasuwając na równanie (2.10) tensor metryczny $\hat{\overset{*}{g}}{}^{ij}$, otrzymamy

$$\overset{*}{q}{}^i = -\underset{T}{\lambda}\, \hat{\overset{*}{g}}{}^{ij}\, \Theta_{,j}. \tag{2.11}$$

3. Równania problemu w konfiguracji odkształconej

Oznaczmy przez g macierz $[g^{ij}]$, utworzoną ze współrzędnych tensora metrycznego, a przez ε macierz $[\varepsilon_{ij}]$, której elementami są współrzędne tensora odkształceń skończonych Greena

$$2\varepsilon_{ij} = \hat{g}_{ik} u^k{}_{;j} + \hat{g}_{kj} u^k{}_{;i} + \hat{g}_{kl} u^k{}_{;i} u^l{}_{;j} \tag{3.1}$$

w (3.1) symbol $(\cdot)_{;}$ oznacza pochodną kowariantną w metryce konfiguracji początkowej.

Obliczając wartość wyrażenia $\det(\mathcal{E}g - \lambda E)$ znajdziemy niezmienniki $I_{(1)}$, $I_{(2)}$, $I_{(3)}$ tensora odkształcenia. Otrzymamy:

$$\det(\mathcal{E}g - \lambda E) = I_{(3)} - I_{(2)}\lambda + I_{(1)}(\lambda)^2 - (\lambda)^3, \tag{3.2}$$

gdzie E jest macierzą jednostkową 3 x 3,

$$\begin{aligned} I_{(1)} &= \mathrm{Tr}(\mathcal{E}g), \\ I_{(2)} &= \mathrm{Tr}(\mathrm{co}(\mathcal{E}g)), \\ I_{(3)} &= \det(\mathcal{E}g) = \det(\mathcal{E})\det(g); \end{aligned} \tag{3.3}$$

we wzorach (3.3) przez $\mathrm{Tr}(\ )$ oznaczono ślad macierzy $(\cdot)$, tzn. sumę elementów leżących na przekątnej głównej macierzy, a elementy macierzy co $([a_{ij}])$ tworzymy przez zastępienie wyrazów a_{ij} ich dopełnieniami algebraicznymi. Oznaczmy przez $\overset{*}{\sigma}$ macierz $[\overset{*}{\sigma}{}^{ij}]$, w której $\overset{*}{\sigma}{}^{ij}$ są współrzędnymi tensora naprężenia Eulera. Uwzględniając opis przedstawiony w p.2, stwierdzamy, por. [9], że zachodzi następujący związek:

$$\overset{*}{\sigma} = \frac{\overset{*}{\varrho}}{\overset{\circ}{\varrho}} \frac{\partial\Phi}{\partial\mathcal{E}}, \tag{3.4}$$

w którym $\frac{\partial}{\partial\mathcal{E}}(\cdot)$ jest macierzą $\left[\frac{\partial(\cdot)}{\partial\mathcal{E}_{ij}}\right]$, $\overset{\circ}{\varrho}, \overset{*}{\varrho}$ - funkcje gęstości ośrodka przed i po odkształceniu, Φ jest energią właściwą odkształcenia.

Dalej rozważamy ośrodek jednorodny i izotropowy o skończonych okształceniach. Zakładamy, że Φ, por. [9], jest funkcją temperatury i niezmienników $I_{(k)}$, $(k = 1,2,3)$, $\Phi = \Phi(\Theta, I_{(1)}, I_{(2)}, I_{(3)})$. Jeżeli w rozwinięciu Φ pominiemy elementy macierzy $\mathcal{E}$ o rzędzie wielkości większym niż 3 oraz temperaturę, o rzędzie wielkości większym niż 1, to Φ przyjmie postać:

$$\Phi = \Phi_{(1)} + \Phi_{(2)} + \Phi_{(3)}, \quad \Phi_{(1)} = \alpha\Theta I_{(1)}, \quad \Phi_{(2)} = \frac{\lambda+2\mu}{2}(I_{(1)})^2 - 2\mu I_{(2)}$$

$$\Phi_{(3)} = \frac{l + 2m}{3}(I_{(1)})^3 - 2\,m\,I_{(1)}I_{(2)} + \eta I_{(3)}. \tag{3.5}$$

Uwzględniając we wzorze (3.4) podstawianie (3.5) oraz związki:

$$\frac{\partial I_{(1)}}{\partial\mathcal{E}} = g, \quad \frac{\partial I_{(2)}}{\partial\mathcal{E}} = I_{(1)}g - g\mathcal{E}g, \quad \frac{\partial I_{(3)}}{\partial\mathcal{E}} = \det(g)\mathrm{co}(\mathcal{E}) \tag{3.6}$$

otrzymamy

$$\overset{*}{\sigma} = \frac{\overset{*}{\varrho}}{\overset{\circ}{\varrho}}\,\bar{\sigma}, \tag{3.7}$$

gdzie $\bar{\sigma} = \alpha\Theta g + [\lambda I_{(1)} + 2\mu\varepsilon(g)^2] + [l(I_{(1)})^2 g - 2m I_{(2)} g + 2m I_{(1)} g\varepsilon g + n\,\mathrm{co}(\varepsilon)\det(g)]$, we wzorach (3.5), (3.7), $\alpha = -p_o - 3K$, $K = 3\lambda + 2\mu$; l, m, n - stałe materiałowe drugiego rzędu.

Przyjmując $p_o = 0$, $\overset{*}{\varrho} = \overset{\circ}{\varrho}$ i ograniczając się do trzech pierwszych wyrażeń występujących po prawej stronie wzoru $(3.7)_2$, otrzymuje się klasyczne równanie konstytutywne typu liniowego

$$\overset{*}{\sigma}{}^{ij} = \bar{\sigma}^{ij} = \lambda g^{ij} g^{kl}\varepsilon_{kl} + 2\mu g^{il} g^{jk}\varepsilon_{lk} - 3K\Theta g^{ij}. \tag{3.8}$$

Równania przewodnictwa ciepła i równania ruchu Cauchy'ego, por. [12],[21] [25], dla elementu ośrodka sprężystego, w konfiguracji odkształconej mają postać:

$$\begin{aligned} \overset{*}{q}{}^{i}\Big|_{i} + \overset{*}{c}\,\dot{\overset{*}{\Theta}} + T_o\,\gamma\,\dot{\overset{*}{I}}_{(1)} &= 0, \\ \overset{*}{\sigma}{}^{ij}\Big|_{j} - \overset{*}{\varrho}\,\ddot{\overset{*}{u}}{}^{i} + \overset{*}{\varrho}\,\overset{*}{f}{}^{i} &= 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

W równaniach (3.9) przez $(\cdot)\Big|_{l}$ oznaczono pochodną kowariantną obiektu w metryce konfiguracji po odkształceniu, natomiast

$$\overset{*}{I}_{(1)} = \overset{*}{g}{}^{ij}\overset{*}{\varepsilon}_{ij}, \quad \gamma = 3K\alpha_T, \tag{3.10}$$

gdzie $\overset{*}{\varepsilon}_{ij}$ jest tensorem odkształceń skończonych Almansiego

$$2\overset{*}{\varepsilon}_{kl} = \overset{*}{g}_{ik}\overset{*}{u}{}^{i}\Big|_{l} + \hat{\overset{*}{g}}_{jl}\overset{*}{u}{}^{i}\Big|_{k} - \hat{\overset{*}{g}}_{ij}\overset{*}{u}{}^{i}\Big|_{k}\overset{*}{u}{}^{j}\Big|_{l}, \tag{3.11}$$

α_T - to współczynnik rozszerzalności cieplnej, a

$\overset{*}{f}{}^{i}$ - wektor sił masowych w bazie konfiguracji po odkształceniu;

$\overset{\circ}{c}, \overset{*}{c}$ - ciepło właściwe odpowiednio przed i po odkształceniu.

4. Równania problemu odniesione do konfiguracji początkowej

Przyjmujemy oznaczenia

$$G = \det([\hat{g}_{ij}]), \qquad \overset{*}{G} = \det([\hat{\overset{*}{g}}_{ij}]). \tag{4.1}$$

$$\overset{*}{G} = GI, \quad I = I(\varepsilon_{ij}). \tag{4.2}$$

Niech element dA powierzchni w konfiguracji początkowej ośrodka z wektorem normalnym $\mathbf{n} = n_i\hat{g}^i$ przekształca się w element $d\overset{*}{A}$ z wektorem normalnym $\overset{*}{\mathbf{n}} = \overset{*}{n}_i\hat{\overset{*}{g}}{}^i$.

Wektor strumienia ciepła $\mathbf{q} = \overset{*}{q}{}^i\hat{\overset{*}{g}}_i$, odpowiadający jednostce powierzchni $d\overset{*}{A}$, zastąpimy wektorem $\bar{\mathbf{q}} = \bar{q}^i\hat{\overset{*}{g}}_i$ działającym na powierzchni $d\overset{*}{A}$, jednak że odpowiadającym jednostce powierzchni dA przed odkształceniem.

Ponieważ

$$\overset{*}{n}_i d\overset{*}{A} = \frac{\sqrt{\overset{*}{G}}}{\sqrt{G}}\, n_i dA, \tag{4.3}$$

więc

$$\overset{*}{q}{}^i\overset{*}{n}_i d\overset{*}{A} = \overset{*}{q}{}^i n_i I^{1/2} dA. \tag{4.3'}$$

Przyjmujemy dalej, że

$$\bar{q}^i = I^{1/2}\overset{*}{q}{}^i. \tag{4.3 }$$

Wyprowadzimy związki między współrzędnymi $q^l, \bar{q}^l$ wektora $\mathbf{q}$ w bazach kolejno konfiguracji przed i po odkształceniu.

Wykorzystując zależność

$$\overset{*}{g}_l = \hat{g}_i A^i_l, \quad A^i_l = \delta^i_l + u^i_{;l} \tag{4.4}$$

zapiszemy

$$\bar{q} = q^l\hat{g}_l = \bar{q}^l\hat{\overset{*}{g}}_l, \tag{4.4'}$$

gdzie kolejno:

$$q^l = \bar{q} \circ \hat{g}^l = \bar{q}^i\hat{\overset{*}{g}}_i\hat{g}^l = \bar{q}^i A^j_i\hat{g}_j\hat{g}^l = \bar{q}^i A^j_i\delta^l_j = \bar{q}^i A^l_i$$

$$\bar{q}_i = \bar{q}\hat{\overset{*}{g}}_i = \hat{g}_l q^l A^j_i\hat{g}_j = A^j_i\hat{g}_{jl}q^l. \tag{4.5}$$

Ponieważ $\bar{q}^j = \hat{\overset{*}{g}}{}^{ji}\bar{q}_i$, więc

$$\bar{q}^j = \hat{\overset{*}{g}}{}^{ji}A^n_i\hat{g}_{nl}q^l \tag{4.6}$$

Tensor $\hat{\overset{*}{g}}{}^{ij}$ można określić przez wielkości, które odnoszą się do konfiguracji początkowej, korzystając z zależności

$$\hat{\overset{*}{g}}{}^{ij} = \frac{\overset{*}{G}_{ij}}{\overset{*}{G}} = \frac{(IG)_{ij}}{IG} = B^{ij}, \tag{4.7}$$

gdzie $\overset{*}{G}_{ij}$ jest dopełnieniem algebraicznym elementu $\overset{*}{g}_{ij}$ w macierzy $[\hat{\overset{*}{g}}_{ij}]$.

Analogicznie, $(IG)_{ij}$ jest dopełnieniem algebraicznym elementu $2\varepsilon_{ij} + \hat{g}_{ij} = \hat{\overset{*}{g}}_{ij}$ w macierzy $[2\varepsilon_{ij} + \hat{g}_{ij}]$. Korzystając z (4.6), (4.7) zapiszemy

$$q^j = B^{ij}A^n_i g_{ln} q^l. \tag{4.8}$$

Uwzględniając (4.3) i (4.7) w (2.10) otrzymamy

$$\bar{q}^i = -I^{1/2}\lambda_T B^{ij}\Theta_{,j}. \tag{4.9}$$

Mnożąc równania przewodnictwa $(3.9)_1$ przez $I^{1/2}$ oraz wykorzystując równości

$$\sqrt{\overset{*}{G}}\, g^i\Big|_i = \sqrt{G}\, \bar{q}^i_{;i}, \mathring{c} = \overset{*}{c} I^{1/2},$$
$$\overset{*}{I}_{(1)} = \hat{\overset{*}{g}}{}^{kl}\overset{*}{\varepsilon}_{kl} = B^{kl}\varepsilon_{kl} = I'_{(1)}, \tag{4.10}$$

dostaniemy równanie przewodnictwa ciepła

$$\bar{q}^i_{;i} + \mathring{c}\dot{\Theta} + T_0\gamma I^{1/2}\dot{I}'_1 = 0, \tag{4.11}$$

które odniesione jest do konfiguracji początkowej. Równanie $(3.4)_2$, zgodnie z [16], [25], zapiszemy w postaci

$$T^{ji}_{;j} - \mathring{\varrho}\,\ddot{u}^i + \mathring{\varrho} f^i = 0, \tag{4.12}$$

gdzie T^{ij} jest tensorem naprężenia Pioli-Kirchhoffa

$$T^{ij} = I^{1/2}\overset{*}{\sigma}{}^{il}A^j_l. \tag{4.13}$$

a u^i, f^i są kolejno współrzędnymi wektora przemieszczenia oraz sił masowych w konfiguracji początkowej. Oznaczając przez T macierz $\|T^{ij}\|$, przez A macierz $[a_{ij}]$, dla której $a_{ij} = \delta_{ik}A^k_j$, wykorzystując wzór (3.7) oraz uwzględniając zależność

$$I^{1/2}\frac{\overset{*}{\varrho}}{\varrho} = \frac{\sqrt{\overset{*}{G}}}{\sqrt{G}}\frac{\overset{*}{\varrho}}{\varrho} = 1, \tag{4.14}$$

we wzorze (4.13), otrzymamy

$$T = I^{1/2}\frac{\overset{*}{\varrho}}{\varrho}\bar{\sigma}\cdot A = \bar{\sigma}\cdot A. \tag{4.15}$$

5. Warunki początkowe i brzegowe

Przyjmijmy, że poszukiwane funkcje Θ, u spełniają następujące warunki początkowe:

$$\Theta(x^i,t)\Big|_{t=0} = \Theta_o(x^i);$$

$$u(x^i,t)\Big|_{t=0} = u_o(x^i), \tag{5.1}$$

$$\dot{u}\Big|_{t=0} = v_o(x^i), x^i \in \bar{V} = V \cup S.$$

Warunki brzegowe zapiszemy w następujących grupach:

I. Termiczne warunki brzegowe:

a) $\Theta(x^i,t) = f^{(1)}(t)$, $x^i \in \Omega_{(1)} \in S$;

b) $B^{ij}\Theta_{,j}n_i = f^{(2)}(t)$, $x^i \in \Omega_{(2)} \subset S$;

c) $B^{ij}\Theta_{,j}n_i + \varkappa\Theta = \varkappa f^{(3)}(t)$, $x^i \in \Omega_{(3)} \subset S$,

gdzie

$$S = \Omega_{(1)} \cup \Omega_{(2)} \cup \Omega_{(3)}, \quad \Omega_{(i)} \cap \Omega_{(j)} = \phi, \; i \neq j \quad t \in \langle 0;\infty),$$

w (5.2) $f^{(k)}(t)$ są znanymi funkcjami czasu, dla $t \in \langle 0,\infty)$, określonymi na obszarach $\Omega_{(k)} \subset S$, $k = 1,2,3$.

II. Przemieszczeniowe warunki brzegowe

$$u^i(x^j,t) = \varphi^i(t), \quad x^j \in \Omega_{(4)} \subset S, \quad t \in <0,\infty). \tag{5.3}$$

III. Naprężeniowe warunki brzegowe

$$T^{ij}(x^k,t)n_i = N^j(t), \qquad x^k \in \Omega_{(5)} \subset S$$

gdzie:

$$S = \Omega_{(4)} \cup \Omega_{(5)}, \quad \Omega_{(4)} \cap \Omega_{(5)} = \Phi, \qquad t \in <0,\infty). \tag{5.4}$$

НЕЛИНЕЙНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
СОПРЯЖЕННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ТОЛСТЫХ ОБОЛОЧЕК.
I. ФОРМИРОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Р е з ю м е

В работе сформулировано краевые задачи для оболочек подверженных действию нестационарного поля температур учитивая сопряжение термического поля и поля перемещений. Рассмотрено случай геометрической нелинейности.

NONLINEAR GEOMETRICAL PROBLEMS OF COUPLED THERMOELASTICITY
OF THICK SHELLS
I. THE FORMULATION OF THE BOUNDARY PROBLEMS

S u m m a r y

The paper presents the formulation of boundary problem for shells subjected to the effects of nonstationary temperature fields accounting for the coupling of temperature field with displacement field. The problem of geometrical nonlinearity is discussed.

Wpłynęło do Redakcji 13.III.1980 r. Recenzent

Prof. dr hab. inż. Szczepan Borkowski