ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 39 Nr kol. 686

Tomasz JĘKOT

NIELINIOWE GEOMETRYCZNIE PROBLEMY TERMOSPRĘŻYSTOŚCI SPRZĘŻONEJ POWŁOK GRUBYCH
II. RÓWNANIA WARIACYJNE I ROZWIĄZANIA UOGÓLNIONE

Streszczenie. Wyprowadzono równania wariacyjne dla problemów brzegowych teorii powłok grubych w niestacjonarnym polu temperatur z uwzględnieniem sprzężenia pola termicznego z polem przemieszczeń, dopuszczano przypadek nieliniowości geometrycznej. Określono rozwiązania uogólnione problemu.

1. Wstęp

W pracach [6], [22] zostały wyprowadzone równania wariacyjne dla powłok cienkich w teorii nieliniowej geometrycznie. Siły wewnętrzne, w jakich są określone równania wariacyjne, odniesione do konfiguracji początkowej. Problemy sprowadzono do dwuwymiarowych, stosując hipotezy upraszczające; w pracy [6] ograniczono się do teorii typu Leve'a-Kirchhoffa, a w [22] przyjęto model Timoszenki.

W niniejszej pracy wyprowadzono równania wariacyjne dla problemów brzegowych powłok grubych rozpatrywanych w części I.

Stosując metody prezentowane w pracy [27], określono rozwiązania uogólnione, które stanowią dogodną podstawę przy rozwiązywaniu problemu metodami iteracyjnymi.

2. Równanie wariacyjne problemu

Niech $W^3_1(\mathcal{V})$ oznacza przestrzeń Sobolewa funkcji ciągłych na obszarze domkniętym $\mathcal{V}$, mających pochodną uogólnioną rzędu pierwszego we wnętrzu $\mathcal{V}$ i całkowalnych z 3 potęgą wraz ze wszystkimi swoimi pochodnymi uogólnionymi rzędu pierwszego na obszarze $\mathcal{V}$. Równanie

$$\bar{q}^{i}_{;i} + \overset{b}{c}\,\dot{\Theta} + T_0\gamma\dot{I}'_1 = 0, \tag{2.1}$$

przedstawione w części I niniejszej pracy, mnożymy przez funkcję $\vartheta \in W^3_1(\mathcal{V})$, a następnie całkujemy po obszarze $\mathcal{V}$ i przedziale czasu $\langle t_0, t_1\rangle$, wykorzystując wzór

$$\int_V a^i_{;i} p\, dV = \oint_S a^i n_i p\, dS - \int_V a^i p_{,i}\, dV \tag{2.2}$$

i stosując podstawienie $(4.9)_1$ oraz warunki brzegowe przedstawione w części I, p. 5 otrzymamy dla pierwszego wyrażenia tego równania:

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_V q^i_{,i}\,\vartheta\, dt = \int_{t_0}^{t_1}\Big(\oint_S q^i\vartheta n_i\, dS - \int_V \bar{q}^i\vartheta_{,i}\, dV\Big)dt =$$

$$= -\lambda_T\int_{t_0}^{t_1}\Big(\oint_S I^{1/2}\vartheta B^{ij}\Theta_{,j} n_i\, dS - \int_V \bar{q}^i\vartheta_{,i}\, dV\Big)dt =$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1}\Big[\lambda_T\int_{\Omega_{(1)}} I^{1/2}B^{ij}n_i f^{(1)}_{,j}\vartheta\, dS + \int_{\Omega_{(2)}}\vartheta f^{(2)} I^{-1/2}\, dS +$$

$$+ \varkappa\int_{\Omega_{(3)}}\big(f^{(3)} - \Theta\big)\vartheta\, dS\Big) + \int_V q^i\vartheta_{;i}\, dV dt. \tag{2.3}$$

Trzecie wyrażenie równania (2.1) przekształcamy następująco:

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_V I^{1/2}\dot{I}_1\vartheta\, dV dt = \int_{t_0}^{t_1}\int_V I^{1/2}\Big[B^{kl}g_{ik}\dot{u}^i_{,l} + 1/2\, B^{kl}g_{ij}\frac{D}{Dt}$$

$$\big(u^i_{;k}\cdot u^j_{;l}\big)\Big]\vartheta\, dV dt = \int_{t_0}^{t}\int_{S/\Omega_4} I^{1/2}B^{kl}g_{ik}\vartheta\dot{u}^i n_l\, ds dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega_{(4)}} I^{1/2}B^{kl}g_{ik}\vartheta\dot{\varphi}^i n_l\, dS dt - \int_{t_0}^{t}\int\Big[\dot{u}^i g_{ik}\big(I^{1/2}B^{kl}\vartheta\big)_{;l} +$$

$$- 1/2\, B^{kl}g_{ij}I^{1/2}\frac{D}{dt}\big(u^i_{;k}\, u^j_{;l}\big)\Big]\vartheta\, dV. \tag{2.4}$$

Równanie

$$T^{ij}_{;j} - \overset{\circ}{\varrho}\ddot{u}^{i} + \overset{\circ}{\varrho}f^{i} = 0 \tag{2.5}$$

oznaczone przez (4.12) w części I, mnożymy kolejno przez funkcje w_i, $i = 1,2,3$, $w_i \in W^3_1(\mathcal{V})$, całkujemy po obszarze $\mathcal{V}$ i przedziale czasu $\langle t_0, t_1\rangle$, wykorzystując wzór (2.1) oraz uwzględniając warunki brzegowe $(5.3)_I$, $(5.4)_I$ dla pierwszego wyrażenia równania (2.5) i otrzymamy:

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathcal{V}} T^{ji}_{;j}w_i\,d\mathcal{V}dt = \int_{t_0}^{t_1}\oint_{S} T^{ji}w_in_j\,dSdt - \int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathcal{V}} T^{ji}w_{i,j}\,d\mathcal{V}dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\Big(\int_{S/\Omega_{(5)}} w_iT^{ji}n_j\,dS + \int_{\Omega_{(5)}} N^iw_i\,dS - \int_{\mathcal{V}} T^{ji}w_{i,j}\,d\mathcal{V}\Big)dt\,, \tag{2.6}$$

po zsumowaniu przekształconych równań (2.1), (2.5) otrzymujemy wariancyjną postać tych równań:

$$\int_{t_0}^{t_1}\Bigg\{\lambda_0\Big(\int_{\Omega_{(1)}} I^{1/2}B^{ij}n_if^{(1)}_{,j}\vartheta\,dS + \int_{\Omega_{(2)}} \vartheta f^{(2)}I^{1/2}dS +$$

$$+ \varkappa\int_{\Omega_{(3)}}(f^{(3)} - \Theta)\vartheta\,dS\Big) + \int_{\mathcal{V}} \bar{q}^i\vartheta_{,i}\,d\mathcal{V} + \overset{\circ}{c}\int_{\mathcal{V}}\dot{\Theta}\vartheta\,d +$$

$$+ T_0\gamma\Bigg[\int_{\Omega_{(4)}} I^{1/2}B^{kl}g_{ik}n_l\varphi^i\,\vartheta\,dS + \int_{S/\Omega_{(4)}} I^{1/2}B^{kl}g_{ik}\dot{u}^in_l\vartheta +$$

$$- \int_{\mathcal{V}}\Big[\dot{u}^ig_{ik}(I^{1/2}B^{kl}\vartheta)_{;l} - 1/2B^{kl}g_{ij}I^{1/2}\frac{D}{Dt}(u^i_{;k}u^j_{;l})\vartheta\,d\mathcal{V}\Big]\Bigg]\Bigg\}dt +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\Big(\int_{\Omega(5)} N^i w_i dS + \int_{S/\Omega(5)} T^{ji} n_j w_i dS - \int_{\mathcal{V}} T^{ji} w_{i,j} d\mathcal{V} +$$

$$-\overset{\circ}{\varrho}\int_{\mathcal{V}} \ddot{u}^i w_i d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} F^i w_i d\mathcal{V}\Big)dt, \qquad (2.7)$$

Oznaczmy przez T przestrzeń funkcji określonych w czasie, ciągłych oraz jednokrotnie różniczkowalnych względem czasu oraz przez T_2 przestrzeń funkcji określonych w czasie, dwukrotnie różniczkowalnych względem czasu. Oznaczmy przez $\mathcal{V}$ przestrzeń $V = (W_1^3 \times T_1) \times (W_1^3 \times T_2)^3$, gdzie liczba 3 przy nawiasie oznacza krotność produktu przestrzeni (np. $(H)^2 = H \times H$).

Określenie:

Funkcję wektorową $v = [\Theta, u]$, $v \in V$ nazywamy rozwiązaniem uogólnionym układu równań (2.1), (2.5), jeśli spełnia ona równania (2,6), (2.7) dla każdej funkcji wektorowej $w = [\vartheta, w_1, w_2, w_3] \in V$.

LITERATURA

[1] BORKOWSKI Sz.: Physically and geometrically nonlinear thermomechanics of elastic shells, I. Constitutive equations of the problem, Bull.Acad. Polon. Sci, Sér, sci, techn., 9, 24, (1979), w druku.

[2] BORKOWSKI Sz.: Physically and geometrically nonlinear thermomechanics of elastic shells, II. The variational equations of the problem, ibid.

[3] BORKOWSKI Sz.: Współczesne problemy i kierunki rozwojowe termomechaniki powłok [w:] Konstrukcje powłokowe, teoria i zastosowanie, t. II, PWN, Warszawa 1979.

[4] EBCIOGLU J.I.: Non-Linear theory of shells, Int. J.Non-Linear Mech, 1970, vol. 6, 469-478.

[5] HABIP L.M.: On the equations of motion of shells in the reference state, Ing. Arch. 1965, vol. 34, 28-32.

[6] HABIP L.M.: Theory of elastic shells in the reference state, Ing.Arch. 1965, vol. 34, 228-237.

[7] KOITER W.T., SIMMONDS J.G.: Foundations of shell theory. Theor.a.Appl. Mech. Proc. 13-th Inf. Congr. Uniw. Moskiewsk. Ang. 21-26,1972, Springer-Verlag, Berlin-Heid. - New York 1973, 150-176.

[8] KOITER W.T.: On the nonlinear theory of thin elastic shells, Proc.Kon. Wed. Ak. Wet, 1966, ser. B, vol. 69, No 1, 1-54.

[9] MURNAGHAN F.D.: Finite deformation of an elastic solid, New York 1951.

[10] NAGHDI P.M.: Foundation of elastic shell theory, Progres in solids Mechanics, vol. IV, Amsterdam 1963.

[11] NAGHDI P.M.: The theory of shell and plates, Handbuch der Physik, vol. IV a/2, 425-640. Berlin-Heidelberg-New York 1972.

[12] NOWACKI W.: Dynamiczne zagadnienia termosprężystości. PWN, Warszawa 1966.

[13] NOWOTNY B.: On the asymptotic integration of the three dimensional non-linear equations of thin elastic shell and plates, Int. J. Sol. Str., 1970, vol. 6, 433-451.

[14] PIETRASZKIEWICZ W.: Finite rotations and Lagrangian description in the non-linear theory of shells. Warszawa-Poznań 1979.

[15] SHRIVASTAVA J.P., GLOCKNER P.G.: Lagrangian formulation of statics of shells, Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div. EMS, 1970, 547-563.

[16] SOKOŁOWSKI M.: Termosprężystość w Mechanika techniczna, t.IV, Sprężystość. PWN, Warszawa 1978, cz. 3, ss. 369-483.

[17] TRESDELL C., NOLL W.: The non-linear field theory, Handbuch der Physik, vol. III/3, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1965.

[18] WESOŁOWSKI Z.: Nieliniowa teoria sprężystości w: Mechanika techniczna, t. V, Sprężystość. PWN, Warszawa 1978, cz. 2, ss. 261-367.

[19] WESOŁOWSKI Z.: Zagadnienia dynamiczne nieliniowej teorii sprężystości. PWN, Warszawa 1974.

[20] WOŹNIAK Cz.: Nieliniowa teoria powłok. PWN, Warszawa 1966.

[21] WOŹNIAK Cz.: Podstawy dynamiki ciał odkształcalnych. PWN, Warszawa 1969.

[22] АИНОЛА: Вариационные методы для геометрически нелинейной динамики оболочек, Прикл. Мат.-Мех., 1,32 1968 , 154-158.

[23] АИНОЛА: Нелинейная теория типа Тимошенко для упругих оболочек, Прик. Мат. Мех., 3, 14 1965 , 337-344.

[24] ГАЛИМОВ К.З.: Основы нелинейной теории тонких оболочек. Казань 1975.

[25] ГАЛИМОВ К.З.: Теория оболочек с учётом поперечнего сдвига, ИКУ, 1977.

[26] ГОЦУЛЯК Е.А., ГУЛЯЕВ В.И., ЧИБИРЯКОВ В.К.: Дифференциальные уравнения оболочек при тепловом ударе по поверхности, Прикл. Мех. 2, 9 (1973), 32-41.

[27] ЛАДЫЖЕНСКАЯ О.А.: Краевые задачи математической физики, Наука, 1973.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИИ НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРОБЛЕМЫ
СОПРЯЖЕННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ТОЛСТЫХ ОБОЛОЧЕК.
II. ВАРИАЦЁННЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

Р е з ю м е

В стати выведено вариацённые уравнения для краевых задач теории толстых оболочек, в нестационарных температурных полях с учётом сопряжения поля перемещений и температуры.

В работе рассмотрено случай геометрической нелинейности, определено тоже обобщенные решения этой задачи.

GEOMETRICALLY NONLINEAR PROBLEMS OF COUPLED THERMOELASTICITY OF THE THICK SHELLS.
II. THE VARIATIONAL EQUATIONS AND WEAK SOLUTIONS

S u m m a r y

The variational equations was derived, for the boundary problems of thick shells in the nonstationar field of temperature with the considera- tion of the couple of the termical field with the displacement's field in the case of the geometrical nonlinearity. The general solutions was de- fined.

Wpłynęło do Redakcji 13.III.1980 r. Recenzent

Prof. dr hab. inż. Szczepan Borkowski