ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 39 Nr kol. 686

Ewa SZOCIŃSKA

STOCHASTYCZNA STABILNOŚĆ ROZWIĄZAŃ RÓWNAŃ Z CAŁKĄ WZGLĘDEM MARTYNGAŁU

Streszczenie. W pracy podaje się kryteria stochastycznej stabilności i asymptotycznej stochastycznej stabilności rozwiązań równań różniczkowych z całką względem martyngału, uzyskane metodą funkcji Lapunowa.

1. Wstęp

Niech $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ - przestrzeń probabilistyczna, $T \subset R$, $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ - rodzina $\mathcal{G}$- algebr $(\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G})$, jeśli $t_1 < t_2$ to $\mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}$. Proces stochastyczny $\xi(t,\omega)$ jest zgodny z rodziną $\mathcal{F}_t$, jeśli $\xi(t,\omega)$ jest $\mathcal{F}_t$ mierzalne dla każdego $t \in T$.

Rozpatrzymy układ stochastycznych równań różniczkowych postaci:

$$dX(t,\omega) = a(t,X(t,\omega))dt + \sum_{k=1}^{m} b_k(t,X(t,\omega))d\mu^k(t,\omega) \tag{1'}$$

z warunkiem początkowym

$$X(t_o,\omega) = x_o$$

lub w postaci całkowej

$$X(t,\omega) = X(t_o,\omega) + \int_{t_o}^{t} a(s,X(s,\omega))ds + \sum_{k=1}^{m} \int_{t_o}^{t} b_k(S,X(s,\omega))d\mu^k(s,\omega) \tag{1}$$

gdzie $X(t,\omega)$, $a(t,X(t,\omega))$, $b_k(t,X(t,\omega))$ są wektorami z E_l, $\mu^k(t,\omega)$ - martyngały lokalnie całkowalne z kwadratem. Zakładamy, że współczynniki równania spełniają założenia gwarantujące istnienie i jednoznaczność rozwiązań układu równań (1) (twierdzenie, patrz np. [1]). Rozwiązanie jest procesem zgodnym z rodziną $\mathcal{F}_t$ i ciągłym z prawdopodobieństwem 1. Zakładamy ponadto, że $a(t,0) = 0$, $b_k(t,0) = 0$, a co za tym idzie - istnienie rozwiązanie trywialnego układu równań (1).

Niech dana będzie funkcja $V(t,x)$ ciągła i różniczkowalna w sposób ciągły jednokrotnie względem t i dwukrotnie względem x, co oznaczamy $V(t,x) \in C^{12}_{tx}$.

Aby uprościć zapis, dalej w pracy opuszczać będziemy ω, pisząc $X(t,\omega) = X(t)$ itp.

Korzystając ze wzoru Ito (patrz [1]) mamy:

$$V(t,X(t)) - V(t_o,X(t_o)) = \int_{t_o}^{t} \frac{\partial V(s,X(s))}{\partial s}\, ds + \int_{t_o}^{t} \frac{\partial V(s,X(s))}{\partial x}\, a(s,X(s)) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{m} \int_{t_o}^{t} \frac{\partial^2 V(s,X(s))}{\partial x_j \partial x_k} \sum_{h=1}^{m} b_{hj}(s,X(s)) b_{kh}(s,X(s))\, d<\mu^j,\mu^k>s +$$

$$+ \int_{t_o}^{t} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial V(s,X(s))}{\partial x}\, b_k(s,X(s))\, d\mu^k(s),$$

gdzie $<\mu,\mu>_t$ oznacza charakterystykę martyngału $\mu(t)$.

Wprowadzimy oznaczenia

$$\alpha_1 V(t,x) = \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\, a(t,x)$$

$$\alpha_2 V(t,x) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x_j \partial x_k} \sum_{s=1}^{m} b_{sj}(t,x) b_{ks}(t,x)$$

Wtedy

$$V(t,X(t)) - V(t_o,X(t_o)) = \int_{t_o}^{t} \alpha_1 V(s,X(s))\, ds +$$

$$+ \int_{t_o}^{t} \alpha_2 V(s,X(s))\, d<\mu^k,\mu^k>s + \int_{t_o}^{t} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial V(s,X(s))}{\partial x}\, b_k(s,X(s))\, d\mu^k(s)$$

2. Definicje i lematy pomocnicze

Def. 1. Proces $\xi(t)$ zgodny z rodziną $\mathcal{F}_t$ nazywamy nadmartyngałem, gdy $E|\xi(t)| < \infty \bigwedge_{t \geq 0}$, $E\{\xi(t)|\mathcal{F}_s\} \leq \xi(s)$, $s < t$.

Niech

$$U = \langle 0,\infty) \times U_h, \quad U_h = \{x : \|x\| < h, h > 0\}$$

Def. 2. Funkcję $V(t,x)$ określoną i ciągłą w U nazywamy dodatnio określoną, jeśli istnieje ciągła funkcja $W(x)$ taka, że

$$V(t,x) \geq W(x) > 0 \text{ dla } \|x\| \neq 0 \bigwedge_{t \geq 0} \text{ oraz } V(t,0) = W(0) = 0.$$

$V(t,x)$ nazywamy ujemnie określoną, gdy $-V(t,x)$ jest określona dodatnio.

Def. 3. Mówimy, że funkcja $V(t,x)$ ma własność (w) dla $x \to 0$, jeśli

$$\lim_{x \to 0} \sup_{t > 0} V(t,x) = 0.$$

Wykażemy teraz dwa lematy pomocnicze.

Lemat 1. Jeśli $X(u)$ jest rozwiązaniem równania (1) na $\langle t_0,\infty)$, $V(t,x) \in C^{12}_{tx}(U)$, τ_u - moment pierwszego wyjścia trajektorii procesu $X(u)$ z U_h, $\tau_u(t) = \min(\tau_u,t)$, $P\{X(t_0) \in U_h\} = 1$, to

$$E[V(\tau_u(t),X(\tau_u(t))) - V(t_0,X(t_0))] = E\int_{t_0}^{\tau_u(t)} \alpha_1 V(s,X(s))ds +$$

$$+ E\int_{t_0}^{\tau_u(t)} \alpha_2 V(s,X(s))d\langle \mu^k, \mu^k\rangle s.$$

DOWÓD. Utwórzmy proces $Y(t) = X(\tau_u(t))$ otrzymany przez zatrzymanie procesu $X(u)$ w chwili osiągnięcia brzegu obszaru U, tj.:

$$Y(t) = \begin{cases} X(t) & \text{gdy } t < \tau_u \\ x(\tau_u) & \text{gdy } t \geq \tau_u \end{cases}$$

Proces ten ma różniczkę stochastyczną na $\langle t_0, \infty)$ i

$$dY(t) = \chi_{\tau_u > t}\, a(t,Y(t))dt + \sum_{k=1}^{m} \chi_{\tau_u > t}\, b_k(t,Y(t))d\mu^k(t).$$

Stosując do $Y(t)$ i $V(t,x)$ wzór Ito i oznaczając

$$\int_{t_o}^{t} \chi_{\tau_u > t} \Phi d\xi = \int_{t}^{\tau_u(t)} \Phi \, d\xi$$

mamy:

$$V(\tau_u(t), X(\tau_u(t))) - V(t_o, x_o) = \int_{t_o}^{\tau_u(t)} \alpha_1 V(s, X(s)) ds +$$

$$+ \int_{t_o}^{\tau_u(t)} \alpha_2 V(s, X(s)) d\langle \mu^k, \mu^k \rangle s +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \int_{t_o}^{\tau_u(t)} \frac{\partial V(s, X(s))}{\partial x} b_k(s, X(s)) d\mu^k(s).$$

Wykorzystując znaną własność całek względem martyngału $E(\int_{6}^{\tau} \eta d\mu \setminus F_6) = 0$ mamy natychmiast tezę lematu.

L e m a t 2. Jeśli funkcja $V(t,x) \in C^{12}_{tx}(U \setminus \{0\})$ i jest w tym obszarze ograniczona oraz $\alpha_1 V(t,x) + \alpha_2 V(t,x) \leqslant 0$, to proces $V(\tau_u(t), X(\tau_u(t)))$ jest nadmartyngałem oraz dla $x_o \in U$ zachodzi

$$EV(\tau_u(t), X(\tau_u(t); t_o, x_o)) \leqslant V(t_o, x_o).$$

DOWÓD. Weźmy $\tau_u < t_o$ z lematu 1 i założeń $\tau_u(t) = \tau_u(t_o) = \tau_u$

$$E(V(\tau_u(t), X(\tau_u(t))) \, F_{t_o}) = E(V(\tau_u(t_o), X(\tau_u(t_o))) | F_{t_o}) =$$

$$= EV(\tau_u, X(\tau_u)) | F_{t_o}) = V(\tau_u, X(\tau_u)) = V(\tau_u(t_o), X(\tau_u(t_o))).$$

Dla $\tau_u \geqslant t_o$ mamy na mocy lematu 1 $\tau_u(t) = t_o$

$$E(V(\tau_u(t), X(\tau_u(t))) | F_{t_o}) = E\{[V(\tau_u(t), X(\tau_u(t))) - V(t_o, x_o) +$$

$$+ V(t_o, x_o)] | F_{t_o}\} \leqslant V(t_o, x_o) = V(\tau_u(t_o), X(\tau_u(t_o))).$$

czyli

$$V(\tau_u(t), X(\tau_u(t)))$$

jest nadmartyngałem.
Analogicznie wykazuje się drugą część tezy.

Przypomnimy jeszcze nierówność Czebyszewa w wygodnej dla nas postaci. Niech $V(t,x)$ - nieujemna funkcja, $\eta(t)$ proces taki, że istnieje $E\eta(t)$. Wtedy

$$P\{|\eta(t)| > R\} < \frac{EV(t,\eta(t))}{\inf\limits_{U_R^x\{s>t_0\}} V(s,x)} \qquad \text{(patrz [2])}.$$

3. Kryteria stochastycznej stabilności

Podamy teraz warunek wystarczający stochastycznej stabilności rozwiązań układu (1).

Def. 4. Rozwiązanie trywialne układu równań (1) nazywamy rozwiązaniem stochastycznie stabilnym dla $t \geqslant 0$, jeśli

$$\bigwedge_{t_0 \geqslant 0} \ \bigwedge_{\varepsilon > 0} \ \lim_{x_0 \to 0} P\{\sup_{t \geqslant t_0} |X(t,t_0,x_0)| > \varepsilon\} = 0$$

$X(t,t_0,x_0)$ oznacza rozwiązanie układu (1), wychodzące w chwili t_0 z punktu x_0.

Definicja ta oznacza, że trajektoria procesu $X(t)$, wychodząca z punktu x_0 w chwili t_0, zawsze zostanie w dowolnie zadanym otoczeniu początku układu współrzędnych z prawdopodobieństwem dążącym do jedności, gdy x_0 zmierza do zera.

Tw. 1. Jeśli w obszarze U istnieje ciągła dodatnio określona funkcja $V(t,x) \in C^{12}_{t\,x}(U\setminus\{0\})$ taka, że dla $x \neq 0$ $\alpha_1 V + \alpha_2 V \leqslant 0$, to rozwiązanie trywialne układu (1) jest stochastycznie stabilne.

DOWÓD. Wybierzmy liczbę $0<r<h$. Otoczenie U_r punktu $x = 0$ zawiera się łącznie z brzegiem w U_h. Oznaczmy przez $V_r = \inf\limits_{x \subset U_h \setminus U_r} V(t,x)$. Ponieważ $V(t,x)$ jest dodatnio określona, więc $V_r > 0$.
Z lematu 2 wynika, że dla $\|x\| < r$

$$EV(\tau_{u_r}(t), X(\tau_{u_r}(t), t_0, x_0)) \leqslant V(t_0, x_0).$$

Stąd i z nierówności Czebyszewa mamy:

$$P\left\{\sup_{t_o\leqslant u\leqslant t}|X(u,t_o,x_o)|>r\right\}\leqslant\frac{EV(\tau_{u_r}(t),X(\tau_{u_r}(t);t_o,x_o))}{V_r}\leqslant\frac{V(t_o,x_o)}{V_r}.$$

Przechodząc do granicy przy $t\to\infty$ mamy

$$P\left\{\sup_{u\geqslant t_o}|X(u;t_o,x_o)|>r\right\}\leqslant\frac{V(t_o,x_o)}{V_r}$$

Ponieważ z dodatniej określoności $V(t,0)=0$ i funkcja $V(t,x)$ jest ciągła, więc z ostatniej nierówności przy $x_o\to 0$ wynika teza naszego twierdzenia.

Def. 5. Rozwiązania trywialne równania (1) jest jednostajnie stabilne stochastycznie, gdy zmierzanie do granicy w definicji 4 jest jednostajne względem t_o.

Uwaga. Z dowodu twierdzenia 1 widać, że dla jednostajnej stabilności wystarczy założyć, aby funkcja $V(t,x)$ oprócz założeń twierdzenia 1 spełniała dodatkowo warunek (w).

Podamy teraz kryterium asymptotycznej stochastycznej stabilności.

Def. 6. Rozwiązanie trywialne układu (1) nazywamy stochastycznie asymptotycznie stabilnym, jeśli jest ono stochastycznie stabilne i zachodzi ponadto warunek

$$\lim_{x_o\to 0}P\left\{\lim_{t\to\infty}X(t;t_o,x_o)=0\right\}=1.$$

Tw. 2. Niech w obszarze U istnieje dodatnio określona funkcja

$$V(t,x)\in C^{12}_{tx}(U\setminus\{0\}),$$

spełniająca własność (w), taka, że $\alpha_1 V+\alpha_2 V\leqslant 0$ oraz niech zachodzi warunek "W": rozwiązanie układu (1) wychodzące z obszaru $\varepsilon<\|x\|<r$ z prawdopodobieństwem 1 osiąga brzeg tego obszaru w skończonym czasie dla dowolnych ε i r. Wtedy rozwiązanie trywialne układu (1) jest asymptotycznie stochastycznie stabilne.

DOWÓD. Z lematu 2 wynika, że proces $V(\tau_u(t),X(\tau_u(t),t_o,x_o))$ jest nadmartyngałem, a zatem z twierdzenia o zbieżności nadmartyngałów wynika istnienie z prawdopodobieństwem 1 granicy

$$(*)\qquad \lim_{t\to\infty}V(\tau_u(t),X(\tau_u(t),t_o,x_o))=\xi.$$

Oznaczmy przez B_{x_0} zbiór trajektorii $X(t,t_0,x_0)$, dla których $\tau_u = \infty$. Ponieważ założenia twierdzenia są silniejsze niż założenia tw. 1, więc rozwiązanie trywialne jest stochastycznie stabilne, a zatem $P(B_{x_0}) \to 1$, gdy $x_0 \to 0$. Z warunku "W" wynika, że dla wszystkich trajektorii ze zbioru B_{x_0}, oprócz zbioru trajektorii prawdopodobieństwa 0, zachodzi $\inf_{t>0}|X(t,t_0,x_0)| = 0$, a nawet $x_0 \neq 0$ $\lim_{t\to\infty} |X(t,t_0,x_0)| = 0$. Ponieważ funkcja spełnia własność (w), to $\lim_{t\to\infty} V(t,X(t,t_0,x_0)) = 0$. Z (*) dla prawie wszystkich trajektorii z B_{x_0}

$$\lim_{t\to\infty} V(\tau_u(t),X(\tau_u(t),t_0,x_0)) = \lim_{t\to\infty} V(t,X(t,t_0,x_0)) = 0.$$

Z dodatniej określoności wynika, że również $W(X(t,t_0,x_0)) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ i na mocy ciągłości $\lim_{t\to\infty} X(t,t_0,x_0) = 0$.
Uwzględniając fakt, że gdy $x_0 \to 0$ to $P(B_{x_0}) \to 1$, mamy tezę twierdzenia.

LITERATURA

[1] GICHMAN, SKOROCHOD: Teorija słuczajnych procesow, tom III. "Nauka", Moskwa 1975.

[2] HASMINSKII: Ustoiczіwost sistiem differencialnych urawnienij pri słuczajnych wozmuszczenijach ich paramietrow. Nauka, Moskwa 1969.

[3] ARNOLD: Stochastische differentialgleichung theorie und Anwendung, Oldemburg Verlag Munchen Wien 1973.

СЛУЧАЙНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ
С ИНТЕГРАЛОМ ПО МАРТИНГАЛУ

Р е з ю м е

В работе исследуем методом функций Ляпунова случайную и асимптотическую случайную устойчивость решений дифференциальных уравнений с интегралом по мартингалу.

STOCHASTIC STABILITY OF THE SOLUTIONS OF EQUATIONS WITH THE MARTINGALE INTEGRALS

S u m m a r y

We give sufficient conditions of stochastic and asymptotic stochastic stability of solutions of differential equations with martingale integral, obtained using the method of Liapunov functions.

Wpłynęło do Redakcji 14.V.1980 r.

Recenzent

Doc. dr hab. inż. Andrzej Tylikowski