

Robert WÓJCIK

NUMERYCZNE ROZWIĄZANIE PROBLEMÓW BRZEGOWYCH  
NIELINIOWEJ TEORII SKRĘCANIA PRĘTÓW

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono wyniki numerycznego rozwiązywania problemów brzegowych nieliniowej teorii skręcania prętów. Rozważania zilustrowano przykładem dotyczącym skręcania prętów o przekroju prostokątnym; przeprowadzono także dyskusję odnoszącą się do uzyskanych wyników i zestawiono wnioski.

1. Wstęp

Niniejsza praca jest kontynuacją problematyki przedstawionej w publikacjach [2], [3], [4], [7], [8], [9], treścią których było wariacyjne ujęcie problemu brzegowego teorii skręcania prętów fizycznie nieliniowych oraz wariacyjno-różnicowa metoda (wariant metody elementów skończonych) rozwiązywania zadań tegoż problemu. Wykorzystując wyniki uzyskane w pracy [8] rozwiązano zadanie skręcania pręta o przekroju prostokątnym. Rozwiązanie powyższego zadania uzyskano dla dwu przypadków aproksymacji:

- a) funkcja naprężeń  $F(x,y)$  aproksymowana była wielomianem liniowym w podobszarach trójkątnych  $\Gamma_1$ , na które podzielono przekrój prostokątny pręta,
- b)  $F(x,y)$  aproksymowana była w  $\Gamma_1$  wielomianem stopnia drugiego.

Otrzymane wyniki porównano z rozwiązaniem analogicznego zadania, przedstawionego przez J.A. Barga, Wł. Miszewa w pracy [1]. Zadanie to rozwiązywane było przez wspomnianych autorów metodą różnic skończonych.

Na koniec podano oszacowanie rozwiązań przybliżonych w obu przypadkach aproksymacji, o której wspomniano wcześniej.

2. Metoda rozwiązywania

Wyznaczanie pola naprężeń określonego w obszarze skręcanego pręta, dla którego modelem fizycznym jest nieliniowy ośrodek Kauderera, przy zadanym momencie skręcającym

$$K = 2G\theta \int_{\Gamma} F(x,y) dx dy, \quad (2.1)$$

sprowadzić do (por. [1],[2]) do rozwiązania równania różniczkowego nieliniowego

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[ \gamma(s^2) \frac{\partial F}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[ \gamma(s^2) \frac{\partial F}{\partial Y} \right] = -2; (X, Y) \in \Gamma \quad (2.2)$$

z warunkiem brzegowym

$$F(X, Y) \Big|_{(X, Y) \in \partial \Gamma} = 0 \quad (2.3)$$

Równoważną metodą rozwiązywania tego problemu jest metoda wariacyjna, polegającą na poszukiwaniu minimum funkcjonału, określającego energię uzupełniającą skręcanego pręta. Przybliżoną postać takiego funkcjonału uzyskano w pracy [7]:

$$\tilde{V}[F] = \frac{1}{2} G I \Theta^2 \int_{\Gamma} \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 \right] \left\{ 1 + \frac{3}{8} \Theta^2 \gamma_2 \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 \right] \right\} - 4F \, dx dy \quad (2.4)$$

W (2.1)-(2.4)  $F(X, Y)$  przedstawia funkcję naprężeń,

$\Theta$  - jednostkowy kąt skręcania,  $\Gamma$  - zbiór punktów przekroju pręta,  $K$  - moment skręcający, działający w przekroju brzegowym,  $z = 1$ ;  $\gamma(s^2)$  - funkcja materiałowa intensywności naprężeń  $s$  - przy czym  $s^2 = \frac{3}{4} \Theta^2 \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 \right]$ ,  $G, \gamma_2$  - stałe materiałowe, wyznaczone doświadczalnie.

W funkcjonalne (2.4) funkcję materiałową intensywności naprężeń przyjęto (por. [5]) w postaci:

$$\gamma(s^2) = 1 + \gamma_2 s^2 \quad (2.5)$$

W celu znalezienia minimum funkcjonału (2.4) można zastosować metodę elementów skończonych, przyjmując jako dziedzinę rozważanego funkcjonału klasę funkcji liniowych (por. [8]) lub kwadratowych w podobozzarach trójkątnych  $\Gamma_1$ , na które został podzielony obszar  $\Gamma$ .

Realizując algorytm numeryczny dla tych przypadków uzyskuje się układ nieliniowych równań algebraicznych, z którego określić możemy przybliżone rozwiązanie zadania.

W zapisie macierzowym wspomniany układ równań ma postać:

$$(M_L + M_N) \cdot F = F, \quad (2.6)$$

gdzie  $M = M_L + M_N$  przedstawia macierz sztywności układu,  $F$  - macierz niewiadomych wartości węzłowych w obszarze  $\Gamma$ .

Układ równań (2.6) rozwiązujemy metodą kolejnych przybliżeń, przyjmując następujący proces iteracyjny:

$$H_L^{(0)} F = I, \quad (2.7)$$

$$(H_L^{(n)} + H_N^{(n)}) \cdot F = I, \quad H_N^{(n)} = H_N^{(n)}(F), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

Równanie (2.7) otrzymano z (2.8), przyjmując  $n = -1$  i  $H_N^{(-1)} = 0$ ; wyznaczenie funkcji  $F(X, Y)$  jest równoważne rozwiązaniu odpowiedniego zadania liniowego teorii skręcania prętów.

### 3. Pręt o przekroju prostokątnym

W celu zilustrowania powyżej opisanej metody rozwiązano przykład, por. rys. 1a, dla pręta wykonanego z czystej miedzi, o przekroju prostokątnym, o wymiarach  $a = 6 \text{ [cm]} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ [m]}$ ,  $b = 4 \text{ [cm]} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ [m]}$ , przy zadanym momencie skręcającym  $K = 32000 \text{ [KG.cm]} = 3139,2 \text{ [N.m]}$ .

Analogiczny przykład rozwiązano w pracy [1], stosując do rozwiązania zadania brzegowego (2.2), (2.3) metodę różnic skończonych.

Stałe materiałowe, por. [5], dla czystej miedzi, uważanej za ośrodek fizykalnie nieliniowy, por. rys. 1c, wynoszą

$$G = 0,45 \cdot 10^6 \left[ \frac{\text{KG}}{\text{cm}^2} \right] = 0,44 \cdot 10^5 \left[ \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \right], \quad \gamma_2 = 0,16 \cdot 10^6.$$

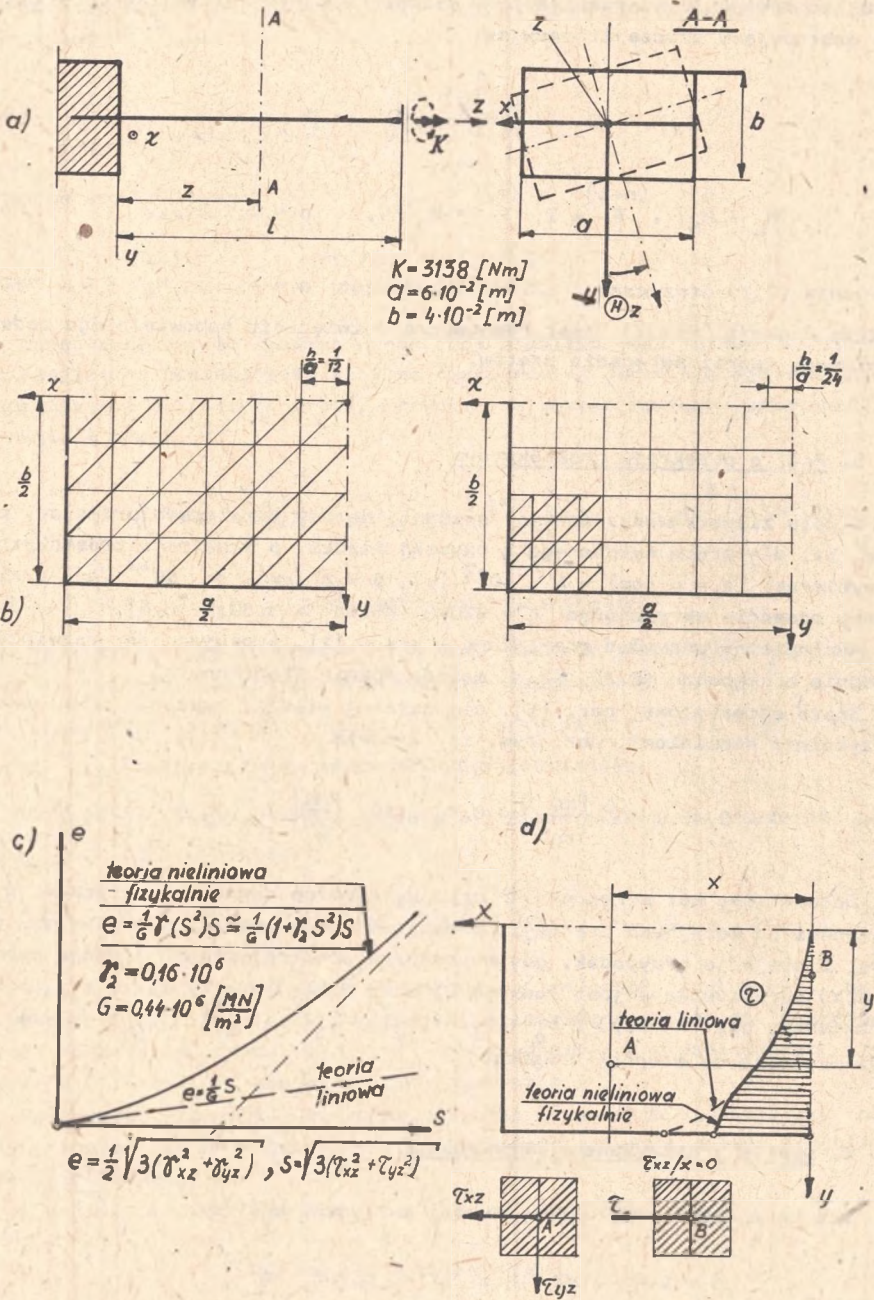
Jednostkowy kąt skręcania  $\Theta$  oraz maksymalne naprężenie styczne, w zależności od kolejnych iteracji, przedstawiono w postaci wykresów przy czym rys. 2 obejmuje przypadek, gdy w podobezarach trójkątnych funkcja naprężeń  $F(X, Y)$  aproksymowana jest funkcją liniową  $\bar{F}(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y$ , a rys. 3 przypadek, gdy  $\bar{F}(x, y) = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 x^2 + b_4 y^2 + b_5 y^2$  (aproksymacja wielomianem stopnia drugiego).

### 4. Dyskusja otrzymanego rozwiązania

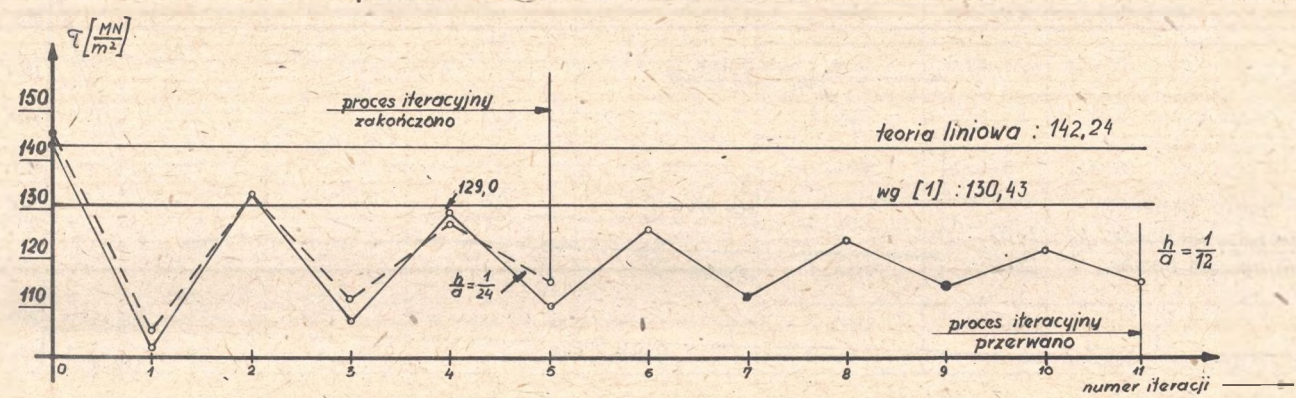
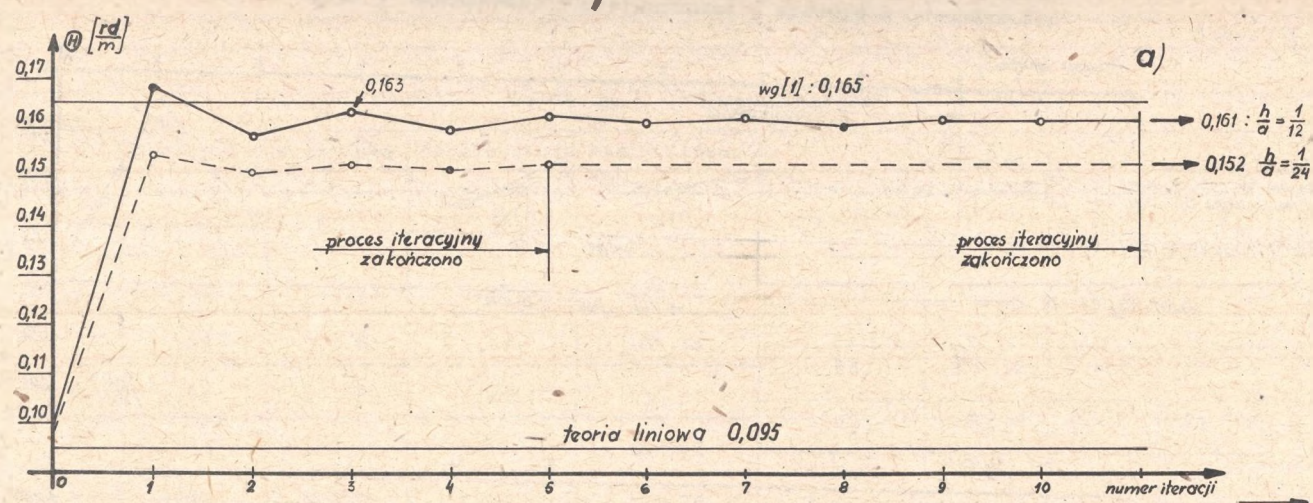
Dla porównania przytoczymy wyniki otrzymane w [1]:

$$\Theta = 1,65 \cdot 10^{-3} \text{ [cm}^{-1}] = 0,165 \text{ [m}^{-1}],$$

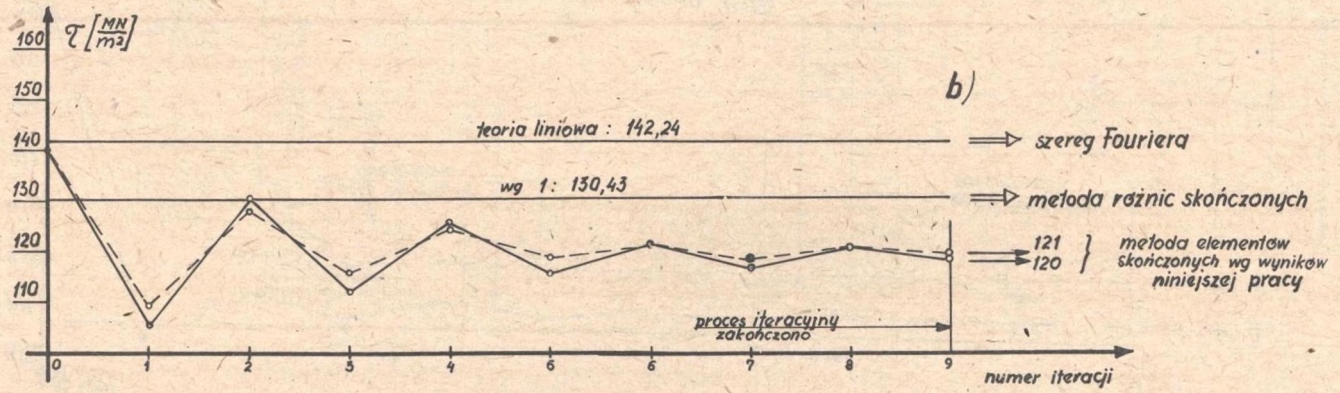
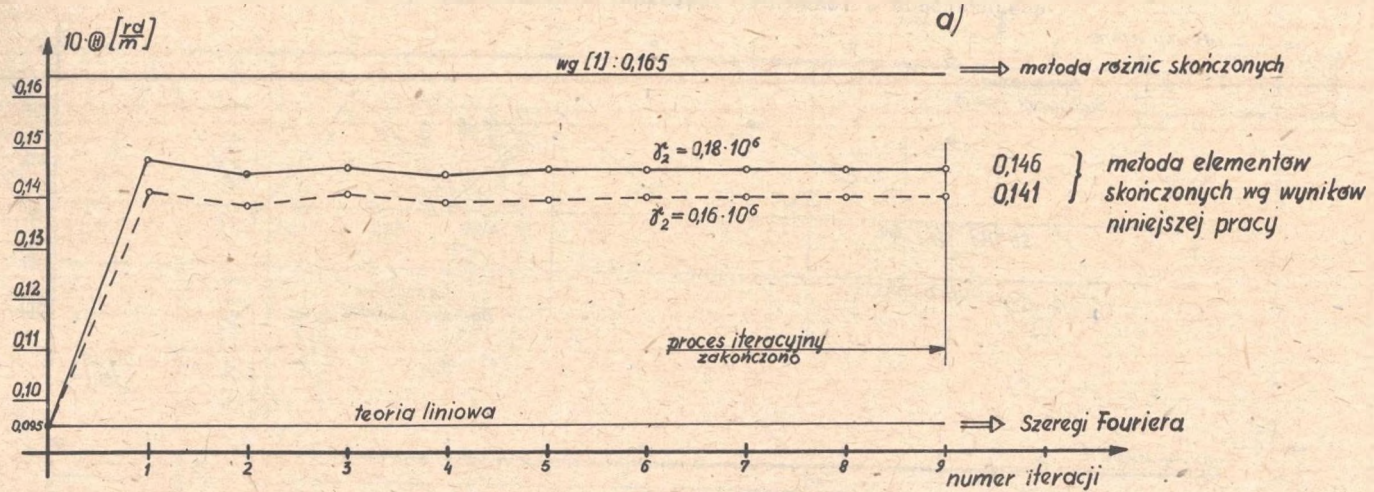
$$\tau_{zx} = 1330 \left[ \frac{\text{KG}}{\text{cm}^2} \right] = 130,43 \left[ \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \right].$$



Rys. 1



Rys. 2. Aproxymacja funkcjami liniowymi w podobszarach



Rys. 3. Aproksymacja wielomianami 2 stopnia w podobszarach

Tabela 1

Wartości średnie<sup>x)</sup> kątów  $\bar{\theta}_\alpha^{(n)}$  [rd/m] i naprężeń  $\bar{\tau}_\alpha^{(n)}$  [MN/m<sup>2</sup>]

Nr iteracji n	Aproksymacja liniowa $\alpha = 1$		Aproksymacja wielomianowa $= 2$		Wartości średnie			
	10 $\bar{\theta}_1^{(n)}$	$\bar{\tau}_1^{(n)}$	10 $\bar{\theta}_2^{(n)}$	$\bar{\tau}_2^{(n)}$	10 $\bar{\theta}_1^{(n)}$	$\bar{\tau}_1^{(n)}$	10 $\bar{\theta}_2^{(n)}$	$\bar{\tau}_2^{(n)}$
0	1,00	142,93	0,95	140,28	-	-	-	-
1	1,68	101,63	1,48	105,36	1,630	117,525	1,465	117,865
2	1,58	133,42	1,45	130,37	1,605	120,42	1,460	121,300
3	1,63	107,42	1,47	112,23	1,610	118,21	1,460	119,235
4	1,59	129,00	1,45	126,24	1,605	119,83	1,455	121,000
5	1,62	110,66	1,46	115,76	1,610	118,455	1,460	119,34
6	1,60	126,25	1,46	122,92	1,605	119,58	1,460	120,320
7	1,61	112,91	1,46	117,72	1,605	118,6	1,460	119,635
8	1,60	124,29	1,46	121,55	1,605	119,385	1,460	120,125
9	1,61	114,48	1,46	118,70	1,610	118,745	-	-
10	1,61	123,01	-	-	1,610	119,285	-	-
11	1,61	115,56	-	-	-	-	-	-

$$x) \quad \bar{\theta}_\alpha^{(n)} = \frac{1}{2}(\bar{\theta}_\alpha^{(n+1)} + \bar{\theta}_\alpha^{(n)}), \quad \bar{\tau}_\alpha^{(n)} = \frac{1}{2}(\tau_\alpha^{(n+1)} + \tau_\alpha^{(n)}), \quad \alpha = 1, 2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Jak łatwo zauważyć, przytoczone dane zbliżone są do wyników dla 3-literacji ( $\Theta = 1,63 \cdot 10^{-3} \cdot [\text{cm}^{-1}] = 0,163 [\text{m}^{-1}]$ ) w przypadku przedstawionym na rys. 2a, natomiast dla sytuacji przedstawionej na rys. 2b - dla 4-iteracji ( $\tau_{zx \max} = 1315 \left[ \frac{\text{KG}}{\text{cm}^2} \right] = 129,0 \left[ \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \right]$ ).

Zauważamy również, że w przypadku aproksymacji liniowej - rys. 2 - proces iteracyjny jest słabo zbieżny, a przytoczone wyniki odbiegają od rezultatów otrzymanych przy aproksymacji wielomianami drugiego stopnia, por. rys. 3.

Oszacowanie otrzymanego rozwiązania  $F^h$ , (por. [6] s. 100) określa nierówność

$$\|F^h - \hat{F}\|_{W_2^1} \leq Ch, \quad (4.1)$$

gdzie:

$C$  - stała dodatnia,

$\hat{F}$  - rozwiązanie dokładne,

$h$  - podziałka (długość elementu).

W drugim przypadku, tj. aproksymacji wielomianami stopnia drugiego (por. rys. 3), proces iteracyjny jest szybko zbieżny, a oszacowanie rozwiązania  $\hat{F}$  (por. [6], [10]) określone jest w przestrzeni  $W_2^1$  nierównością

$$\|F^h - \hat{F}\|_{W_2^1} \leq C_1 h^2.$$

W tabelicy 1 zestawiono wartości średnie, wyznaczone na podstawie zależności

$$\bar{\theta}_\alpha^{(n)} = \frac{1}{2} \left| \theta_\alpha^{(n+1)} + \theta_\alpha^{(n)} \right|, \quad \bar{\tau}_\alpha^{(n)} = \frac{1}{2} \left| \tau_\alpha^{(n+1)} + \tau_\alpha^{(n)} \right|, \quad \alpha = 1, 2; \quad n = 2, 3, \dots$$

## 5. Wnioski

1. Stosowanie funkcji podobszarami liniowych do rozwiązania zagadnienia skręcania prowadzi do wyników poprawnych dla wielkości określającej jednostkowy kąt skręcania; w tym przypadku proces jest szybko zbieżny. Przy wyznaczaniu maksymalnego naprężenia stycznego - należy przeprowadzić różniczkowanie funkcji naprężeń; ta operacja powoduje obniżenie szybkości zbieżności procesu iteracyjnego, tak że nawet zmniejszenie podziałki - w metodzie elementów skończonych - nie poprawia zbieżności. Proces iteracyjny jest bardzo wolno zbieżny.



2. Ze względu na to, że aproksymacja liniowa (w podobozarach) nie prowadzi do procesów iteracyjnych szybko zbieżnych, należy stosować aproksymację wielomianową.

3. Zastosowanie aproksymacji wielomianowej (wielomiany 2 stopnia) prowadzi do poprawnych wyników już przy pierwszej iteracji (dla względnych kątów skręcania), a sam proces iteracyjny dla naprężeń jest również szybko zbieżny, z prędkością mniejszą jednak niż dla kątów skręcania.

4. Z porównania uzyskanych tutaj rezultatów z wynikami teorii liniowej wynika, że uwzględnienie nieliniowości fizycznej prowadzi do zwiększenia względnego kąta skręcania o około 50% i zmniejszenia naprężeń około 19%.

5. Porównując wyniki uzyskane w pracy z danymi przytoczonymi przez Barga i Miszeva dochodzimy do wniosku: zastosowana tam metoda różnic skończonych i proces iteracyjny albo nie zostały doprowadzone do końca, albo przedstawiona tam metoda prowadzi do wyników bardzo przybliżonych.

6. Im większe jest obciążenie (moment skręcający), tym większe są różnice między teorią liniową a nieliniową fizycznie, lecz przy większych obciążeniach mogą już ujawniać się wpływy nieliniowości geometrycznej.

7. Przedstawiony algorytm numerycznego rozwiązania zadania został przetestowany na przykładzie przekroju prostokątnego, nie mniej jednak pozostaje on słuszny dla dowolnych innych przekrojów prętów skręcanych.

8. Należy tutaj uważać, że do następnej iteracji, np.  $n$ -tej, możemy przyjmować wartości średnie z iteracji poprzednich  $n-2$  i  $n-1$ , por. rys.2,

$$3: F = \frac{1}{2} \left( F^{(n)} + F^{(n-1)} \right).$$

#### LITERATURA

- [1] BARG J.A., MISZEWA W.N.: Kruczenie pryzmatycznych stierżni z nieliniowego uprogogo materiała, Izv. Wuzow, Str. 1 Arch. 9, 1972, 42-46.
- [2] BORKOWSKI Sz.: Torsion of physically nonlinear bar with a multiply connected cross-section, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. techn., 10, 24 (1976), 441-445.
- [3] BORKOWSKI Sz.: Niektóre problemy wariacyjnego formułowania zadań brzegowych ośrodków fizycznie nieliniowych, ZN Pol. Śl., Mat.-Fiz., z. 25, 1974, ss. 181-188.
- [4] BORKOWSKI Sz.: The finite element method of solving the boundary problems in nonlinear physical media, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. techn. 3, 26, (1978), 1-6.
- [5] KAUDERER H.: Nichtlineare Mechanik, Springer Verlag 1958.
- [6] MARCZUK G.J.: Metody wyczystitelnoj matematyki. Nauka, Moskwa 1977.
- [7] WÓJCIK R.: Wariacyjne ujęcie problemu brzegowego teorii skręcania prętów dla ośrodka nieliniowego fizycznie, ZN Pol. Śl., Mat.-Fiz. z.25, 1974, ss. 201-206.
- [8] WÓJCIK R.: Wariacyjno-różnicowa metoda rozwiązywania zadań brzegowych nieliniowej teorii skręcania prętów, ZN Pol. Śl., Mat.-Fiz., z. 28, 1976/77, ss. 233-240.

- [9] WÓJCIK R.: Metoda rozwiązań sprężystych w problemach brzegowych teorii skręcania prętów fizykalnie nieliniowych. ZN Pol. Sl. Mat.-Fiz. z. 31, 1979/80, ss. 169-174.
- [10] ZLAMAL H.: On the finite element method, Numer. Math. 12, 1968, 394-409.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ  
НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ СКРУЧИВАНИЯ СТЕРЖНЕЙ

Резюме

В работе представлено результаты численного решения краевых задач нелинейной теории скручивания стержней. Рассуждения проиллюстрировано примером скручивания стержня с прямоугольным поперечным сечением.

NUMERICAL SOLUTION OF BOUNDARY PROBLEMS OF NONLINEAR THEORY OF  
BAR TORSION

Summary

The paper presents the results of numerical solution of boundary problem of nonlinear theory of bar torsion. The considerations are illustrated with an example concerning bar with rectangular cross section.

Wpłynęło do Redakcji 30.IV.1980 r.

Recenzent

Prof. dr hab. inż. Szczepan Borkowski