ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 39 Nr kol. 686

Jolanta LIPIŃSKA

UOGÓLNIONA PÓŁGRUPA INWERSYJNA I JEJ WŁASNOŚCI

Streszczenie. W punkcie 1 pracy wprowadzono pojęcie uogólnionej półgrupy inwersynej i podano dwie równoważne definicje. W p.2 przedstawiono własności uogólnionej półgrupy inwersyjnej i wprowadzono relację częściowego uporządkowania. W końcowej części pracy rozpatrywane są uogólnione półgrupy inwersyjne z jedynką.

Celem tej pracy jest wprowadzenie pojęcia uogólnionej półgrupy inwersyjnej oraz podanie jej własności.

W punkcie pierwszym podajemy dwie definicje uogólnionej półgrupy inwersyjnej oraz dowód ich równoważności, w punkcie drugim pewne własności uogólnionej półgrupy inwersyjnej. O najważniejszej z nich, tzn. o przemienności działania w zbiorze idempotentów mówi twierdzenie I. Korzystając z tego twierdzenia, wprowadzamy w uogólnionej półgrupie inwersyjnej relację częściowego porządku. W paragrafie trzecim podajemy warunek na to, aby uogólniona półgrupa inwersyjne posiadała jedynkę.

Podajmy teraz pewne oznaczenia i definicje pomocnicze. Dla danej funkcji f, przez D_f będziemy oznaczać jej dziedzinę. Obraz zbioru M poprzez funkcję f będziemy oznaczać przez $f(M)$, a przeciwobraz M przez $f^{-1}(M)$. Dwuargumentową częściową operacją na zbiorze B nazwiemy funkcję f spełniającą warunki $\emptyset \neq D_f \subset B \times B$ i $f(D_f) \subset B$. Jeżeli funkcję tę będziemy oznaczać kropką $\cdot$, to obraz w B elementu $(a,b) \in D_\cdot$ będziemy oznaczać przez $a \cdot b$ lub krócej ab i nazywać iloczynem elementów a i b. Gdy a, $b \in B$, $(a,b) \in D$, będziemy mówić, że iloczyn ab jest nieokreślony.

Częściowym grupoidem będziemy nazywać system $(B,\cdot)$, składający się z niepustego zbioru B i dwuargumentowej częściowej operacji na nim. Gdy to nie będzie prowadzić do nieporozumień, będziemy pisać B zamiast $(B,\cdot)$ oraz D zamiast $D_\cdot$

Niech B będzie częściowym grupoidem. Element $e \in B$ nazwiemy lewą identycznością elementu $a \in B$, jeżeli $(e,a) \in D$ i $ea = a$. Analogicznie element $e \in B$ nazwiemy prawą identycznością elementu $a \in B$, jeżeli $(a,e) \in D$ i $ae = a$.

Element $e \in B$ nazwiemy natomiast jedynkę grupoidu częściowego B i będziemy oznaczać 1_B, jeżeli jest on lewą i prawą identycznością dla każdego $a \in B$. Oczywiście dla danego grupoidu B jedynka tak zdefiniowana może być tylko jedna. Element $\varepsilon \in B$ będziemy nazywać idempotentem, jeżeli $(\varepsilon,\varepsilon)\in D$ i $\varepsilon\varepsilon = \varepsilon$. Zbiór wszystkich idempotentów grupoidu częściowego B będziemy oznaczać przez B_0.

Niech $c\in B$, a i b będą iloczynami (niekoniecznie określonymi), utworzonymi w podanej przez nawiasy kolejności, m i n elementów z B ($m,n\in N$, gdzie N zbiór liczb naturalnych). Jeżeli będziemy teraz pisać, że $ab = c$, będzie to oznaczało, że iloczyn ab jest określony oraz zachodzi równość $ab = c$.

1. Definicja uogólnionej półgrupy inwersyjnej

Definicja I

Mówimy, że częściowy grupoid $(B,\cdot)$ jest uogólnioną półgrupą inwersyjną, jeżeli spełnia następujące postulaty:

1. Związek

$$(ab)c = a(bc)$$

zachodzi wtedy, gdy jedna ze stron równości jest określona.

2. Dla każdego $a\in B$ istnieje dokładnie jedno $b\in B$, że

$$a(ba) = a \quad \text{i} \quad b(ab) = b$$

Ten jednoznacznie wyznaczony (dla każdego $a\in B$) element $b\in B$ będziemy oznaczać a^{-1} i nazywać uogólnionym elementem odwrotnym. Jest to pojęcie analogiczne do pojęcia uogólnionego elementu odwrotnego wprowadzonego przez W. Wagnera w 1952 r. w teorii półgrup inwersyjnych (zob. [1]).

Zauważmy, że przyjęcie przez nas nazwy "uogólniona półgrupa inwersyjna" jest w pełni uzasadnione, gdyż pojęcie to jest uogólnieniem półgrupy inwersyjnej na uogólnioną półgrupę zdefiniowaną przez W. Waliszewskiego w [4].

Dla dalszych rozważań załóżmy, że B jest uogólnioną półgrupą inwersyjną.

Wniosek 1

Postulat 2 można zastąpić postulatem 2^*. Każdemu elementowi $a\in B$ odpowiada taka jednoznacznie określona trójka $(e_l(a), e_r(a), a')\in B\times B\times B$, że

(i) $e_l(a)a = a,\quad e_r(a)a' = a',\quad a'a = e_r(a),\quad a\,a' = e_l(a).$

Można już wtedy wykazać, że $ae_r(a) = a,\quad a'e_l(a) = a'$.

Jednoznaczności, podobnie jak w aksjomacie 2, nie można pominąć. Wskazuje na to przykład półgrupy prawych (także lewych) zer (zob. [1]) złożonej z co najmniej dwóch elementów.

DOWÓD: Wykażemy najpierw, że z aksjomatów 1 i 2 wynika 2^*. Z aksjomatu 2 wynika, że $(a,a^{-1}) \in D$ i $(a^{-1},a) \in D$, przyjmujemy więc $a' = a^{-1}$, $e_l(a) = aa^{-1}$, $e_r(a) = a^{-1}a$. Korzystając z aksjomatu 2 otrzymujemy równości (i). Należałoby jeszcze stwierdzić, że to jedyna trójka spełniająca podane warunki. Przypuśćmy, że istnieje inna trójka $(e_l''(a),\ e_r''(a),\ a'') \in B \times B \times B$ taka, że $e_l''(a)a = a$, $e_r''(a)a'' = a''$, $a''a = e_r''(a)$, $aa'' = e_l''(a)$. Mamy wtedy $a = (aa'')a = a(a''a)$, $a'' = (a''a)a'' = a''(aa'')$. Wobec jednoznaczności w aksjomacie 2 otrzymujemy $a' = a''$, czyli także $e_r(a) = a'a = a''a = e_r''(a)$, $e_l(a) = aa' = aa'' = e_l''(a)$, stąd $(e_l''(a),\ e_r''(a),\ a'') = (e_l(a), e_r(a), a')$.

Wykażemy teraz, że zachodzi implikacja w drugą stronę. Przyjmując 1 i 2^*, otrzymujemy $a = (aa')a = a(a'a)$, $a' = (a'a)a' = a'(aa')$. Czy a' będzie jedyne? Przypuśćmy, że istnieje $a'' \neq a'$ spełniające $a(a''a) = a$, $a''(aa'') = a''$. Istniałaby wtedy trójka $(e_l''(a),\ e_r''(a), a'')$, gdzie $e_l''(a) = aa''$, $e_r''(a) = a''a$, spełniająca (i). Ponieważ $a' \neq a''$, więc $(e_l(a), e_r(a), a') \neq (e_l''(a),\ e_r''(a),\ a'')$, a to sprzeczne z jednoznacznością w 2^*. Czyli jest spełniony aksjomat 2, przy czym $a^{-1} = a'$.

Na końcu wykażemy jeszcze, że $ae_r(a) = a$ i $a'e_l(a) = a'$. Wynika to z aksjomatu 2 po uwzględnieniu faktu, że $a'a = e_r(a)$ i $aa' = e_l(a)$. Otrzymujemy $a = a(a'a) = ae_r(a)$, $a' = a'(aa') = a'e_l(a)$. To kończy dowód.

Zauważmy jeszcze, że w postulacie 2^* równości $e_l(a)a = a$, $e_r(a)a' = a'$ można zastąpić równościami $ae_r(a) = a$, $a'e_l(a) = a'$ lub $e_l(a)a = a$, $a'e_l(a) = a'$ lub $ae_r(a) = a$, $e_r(a)a' = a'$. Równości brakujęce będą wtedy konsekwencją pozostałych i aksomatu 1. Dowody są natychmiastowe. Innych możliwości wyboru czterech z sześciu równości w aksjomacie 2^* już nie ma. Podobnie jak nie można opuścić żadnej z tych równości. W aksjomacie 2 również żadnej z dwóch równości opuścić nie można. Na fakty te wskaże przykład pseudogrupy przekształceń Γ_R, który omówimy w pracy [5].

Każdy z elementów trójki będziemy odpowiednio nazywać $e_l(a)$ lewą jedynką elementu a, $e_r(a)$ prawą jedynką elementu a, natomiast $a^{-1} = a'$ już wcześniej nazwaliśmy uogólnionym elementem odwrotnym do a. Łatwo zauważyć, że $e_r(a)$ będzie także lewą jedynką elementu a', $e_l(a)$ prawą jedynką a', natomiast a uogólnionym elementem odwrotnym do a'. Od tego miejsca począwszy, pisząc $e_l(a)$, $e_r(a)$ będziemy mieć zawsze na myśli odpowiednio lewą lub prawą jedynkę elementu a.

Pojęcia lewej i prawej jedynki elementu a są odpowiednikiem analogicznych pojęć w teorii półgrup inwersyjnych, chociaż tam definiuje się je inaczej (zob. [1],[3]).

2. Własności uogólnionej półgrupy inwersyjnej

Wniosek 2

$$\bigwedge_{a \in B} (e_l(a) \in B_o \wedge e_r(a) \in B_o)$$

DOWÓD: Ponieważ $(a, a^{-1}) \in D$, więc możemy pomnożyć równość $a = e_l(a)a$ prawostronnie przez a^{-1}. Otrzymujemy $e_l(a) = aa^{-1} = (e_l(a)a)a^{-1} = e_l(a)(aa^{-1}) = e_l(a)e_l(a)$, co oznacza, że $e_l(a) \in B_o$. Analogicznie, mnożąc równość $ae_r(a) = a$ lewostronnie przez a^{-1}, po przekształceniach otrzymamy $e_r(a)e_r(a) = e_r(a)$, czyli również $e_r(a) \in B_o$.

Wniosek 3

$$\bigwedge_{\varepsilon \in B_o} (\varepsilon^{-1} = \varepsilon \wedge e_l(\varepsilon) = \varepsilon \wedge e_r(\varepsilon) = \varepsilon)$$

DOWÓD: Z definicji zbioru B_o mamy $(\varepsilon, \varepsilon) \in D$ i $\varepsilon\varepsilon = \varepsilon$. Otrzymujemy $\varepsilon = \varepsilon\varepsilon = \varepsilon(\varepsilon\varepsilon)$, czyli $\varepsilon = \varepsilon^{-1}$ na podstawie jednoznaczności w aksjomacie 2. A ponieważ $e_l(\varepsilon) = \varepsilon\varepsilon^{-1} = \varepsilon\varepsilon = \varepsilon$, więc również $e_l(\varepsilon) = \varepsilon$. Analogicznie $e_r(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}\varepsilon = \varepsilon\varepsilon = \varepsilon$.

Wnioski 2 i 3 są uogólnieniem znanych własności elementów półgrupy inwersyjnej (zob. [1]).

Z wniosków tych wynika równość $B_o = \{\varepsilon \in B \bigvee_{a \in B} (\varepsilon = e_l(a) \vee \varepsilon = e_r(a)\}$.

Wniosek 4

$$\bigwedge_{a,b \in B} ((a,b) \in D \Leftrightarrow (e_r(a), e_l(b)) \in D)\}$$

DOWÓD:

$$(a,b) \in D \Rightarrow ab = (ae_r(a))(e_l(b)b) = ((ae_r(a))e_l(b))b =$$
$$= (a(e_r(a)e_l(b)))b \Rightarrow (e_r(a), e_l(b)) \in D$$

$$(e_r(a), e_l(b)) \in D \Rightarrow e_r(a)e_l(b) = (a^{-1}a)(bb^{-1}) =$$
$$= ((a^{-1}a)b)b^{-1} = (a^{-1}(ab))b^{-1} \Rightarrow (a,b) \in D.$$

Lemat I

$$\bigwedge_{\varepsilon\in B_o}\ \bigwedge_{b\in B} (\varepsilon b = \varepsilon \Longleftrightarrow b\varepsilon = \varepsilon)$$

DOWÓD: Załóżmy, że $\varepsilon\in B_o$, $(\varepsilon,b)\in D$, $\varepsilon b = \varepsilon$. Otrzymujemy $\varepsilon = \varepsilon\varepsilon = \varepsilon(\varepsilon\varepsilon) = (\varepsilon b)(\varepsilon\varepsilon) = \varepsilon(b(\varepsilon\varepsilon)) = \varepsilon((b\varepsilon)\varepsilon)$, czyli $(b,\varepsilon)\in D$. Dalej mamy $b\varepsilon = b(\varepsilon\varepsilon) = (b\varepsilon)\varepsilon = (b\varepsilon)(\varepsilon\varepsilon) = (b\varepsilon)((\varepsilon b)\varepsilon) = b\varepsilon(\varepsilon(b\varepsilon))$. Z równości $\varepsilon = \varepsilon((b\varepsilon)\varepsilon)$ i $b\varepsilon = (b\varepsilon)(\varepsilon(b\varepsilon))$ wynika, że $\varepsilon^{-1} = b\varepsilon$, ale na podstawie wniosku 3 $\varepsilon^{-1} = \varepsilon$, czyli $b\varepsilon = \varepsilon$.

Dowód implikacji w drugą stronę przebiega analogicznie.

Lemat II

$$\bigwedge_{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2\in B_o} ((\varepsilon_1,\varepsilon_2)\in D \Longrightarrow \varepsilon_1\varepsilon_2\in B_o)$$

DOWÓD: Niech $\varepsilon_1, \varepsilon_2\in B_o$ i $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\in D$. Oznaczmy $\varepsilon_1\varepsilon_2 = a$. W trakcie dowodu będziemy korzystać z równości: $aa^{-1} = e_1(a)$, $e_1(a)a = a$, $a^{-1}e_1(a) = a^{-1}$, zachodzących na podstawie wniosku 1. Otrzymujemy $a = \varepsilon_1\varepsilon_2 = (\varepsilon_1\varepsilon_1)\varepsilon_2 = \varepsilon_1(\varepsilon_1\varepsilon_2) = \varepsilon_1 a$.

Wobec tego

$$e_1(a) = aa^{-1} = (\varepsilon_1 a)a^{-1} = \varepsilon_1(aa^{-1}) = \varepsilon_1 e_1(a)$$

Skoro $\varepsilon_1 e_1(a) = e_1(a)$, a na podstawie wniosku 2 $e_1(a)\in B_o$, wobec tego na podstawie lematu I również $e_1(a)\varepsilon_1 = e_1(a)$. Korzystając z ostatniej równości mamy

$$a = e_1(a)a = e_1(a)(\varepsilon_1\varepsilon_2) = (e_1(a)\varepsilon_1)\varepsilon_2 = e_1(a)\varepsilon_2.$$

Mamy więc $e_1(a)\varepsilon_2 = a$. Wykażemy teraz, że $e_1(a)\varepsilon_2 = e_1(a)$. Wykorzystując ostatnią z udowodnionych równości $e_1(a)\varepsilon_2 = a$, mamy $e_1(a) = aa^{-1} = (e_1(a)\varepsilon_2)a^{-1} = e_1(a)(\varepsilon_2 a^{-1})$.

Ponieważ $e_1(a)\in B_o$, więc korzystając znowu z lematu I, mamy

$$e_1(a) = (\varepsilon_2 a^{-1})e_1(a) = \varepsilon_2(a^{-1}e_1(a)) = \varepsilon_2 a^{-1}.$$

Skorzystamy teraz dwukrotnie z ostatniej równości

$$e_1(a) = \varepsilon_2 a^{-1} = (\varepsilon_2\varepsilon_2)a^{-1} = \varepsilon_2(\varepsilon_2 a^{-1}) = \varepsilon_2 e_1(a).$$

Aby otrzymać żądaną równość $e_1(a)\varepsilon_2 = e_1(a)$, musimy jeszcze raz skorzystać z lematu I.

Mamy więc z jednej strony $e_1(a)\varepsilon_2 = e_1(a)$, a z drugiej $e_1(a)\varepsilon_2 = a$, czyli $a = e_1(a)$, a wobec tego $a = \varepsilon_1\varepsilon_2 \in B_o$ na podstawie wniosku 2. To kończy dowód.

Twierdzenie I

W zbiorze B_o działanie jest przemienne, tzn. zachodzi:

$$\bigwedge_{\varepsilon_1,\varepsilon_2 \in B_o} ((\varepsilon_1,\varepsilon_2) \in D \Longrightarrow \varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_2\varepsilon_1)$$

DOWÓD:

Założenie $\varepsilon_1,\varepsilon_2 \in B_o$, $(\varepsilon_1,\varepsilon_2) \in D$ pociąga

$$\varepsilon_1\varepsilon_2 = (\varepsilon_1\varepsilon_1)\varepsilon_2 = \varepsilon_1(\varepsilon_1\varepsilon_2).$$

Ponieważ na podstawie lematu II $\varepsilon_1\varepsilon_2 \in B_o$, więc na podstawie lematu I mamy

$$\varepsilon_1\varepsilon_2 = (\varepsilon_1\varepsilon_2)\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon_2\varepsilon_1), \quad \text{czyli} \quad (\varepsilon_2\varepsilon_1) \in D,$$

a na podstawie lematu II mamy, że $\varepsilon_2\varepsilon_1 \in B_o$.

Korzystając ponownie z lematu I otrzymujemy:

$$\varepsilon_2\varepsilon_1 = \varepsilon_2(\varepsilon_1\varepsilon_1) = (\varepsilon_2\varepsilon_1)\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon_2\varepsilon_1),$$

czyli

$$\varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_1(\varepsilon_2\varepsilon_1) = \varepsilon_2\varepsilon_1.$$

W ten sposób twierdzenie zostało udowodnione.

Twierdzenie I jest uogólnieniem analogicznego twierdzenia udowodnionego w 1954 r. przez A. Libera w teorii półgrup inwersyjnych (zob. [1], [3]).

Wniosek 5

$$\bigwedge_{a,b \in B} ((a,b) \in D \Longrightarrow (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}).$$

Dowód możemy pominąć, gdyż dowód analogicznej własności elementów półgrupy inwersyjnej, podany w [1] na stronie 52, bez trudu da się przenieść na nasz przypadek.

Podobnie jak w każdej półgrupie inwersyjnej, tak i w każdej uogólnionej półgrupie inwersyjnej można zdefiniować częściowy porządek (zob. [2] i [3]).

Mówi o tym następujący wniosek.

Wniosek 6

Relacja $\leqslant$ zdefiniowana poniżej jest częściowym porządkiem w zbiorze B.

Dla $a,b \in B$ $\quad a \leqslant b \overset{df}{\Longleftrightarrow} be_r(a) = a$

DOWÓD: Wykażemy, że relacja $\leqslant$ jest relacją częściowego porządku,tzn. jest zwrotna, przechodnia i asymetryczna.

Zwrotność zachodzi, gdyż $a \leqslant a$ w myśl definicji oznacza, że $ae_r(a) = a$, co zachodzi na podstawie wniosku 1.

Dla wykazania przechodniości załóżmy, że $a \leqslant b$ i $b \leqslant c$. To oznacza, że $be_r(a) = a \wedge ce_r(b) = b$. Mamy wobec tego $a = (ce_r(b))e_r(a) = c(e_r(b)e_r(a))$. Wykażemy teraz, że $e_r(b)e_r(a) = e_r(a)$.

$$e_r(b)e_r(a) = (b^{-1}b)e_r(a) = b^{-1}(be_r(a)) = b^{-1}a =$$

$$= b^{-1}(ae_r(a)) = (b^{-1}a)e_r(a) = e_r(a)(b^{-1}a).$$

Ostatnią równość otrzymaliśmy na podstawie twierdzenia I. Założenia są spełnione, gdyż $e_r(a) \in B_o$ na podstawie wniosku 2, natomiast $b^{-1}a \in B_o$ na podstawie lematu II twierdzenia I jako iloczyn $e_r(b)$ i $e_r(a)$,czyli elementów należących do B_o.

Dalej mamy:

$e_r(a)(b^{-1}a) = (e_r(a)b^{-1})a = a^{-1}a = e_r(a)$, gdyż $a^{-1} = (be_r(a))^{-1} =$

$= (e_r(a))^{-1}b^{-1} = e_r(a)b^{-1}$ na podstawie wniosku 5.

Wykazaliśmy więc, że $e_r(b)e_r(a) = e_r(a)$, czyli $a = c(e_r(b)e_r(a)) = ce_r(a)$, a to oznacza, że $a \leqslant c$, czyli relacja jest przechodnia.

Pozostaje do wykazania asymetryczność relacji $\leqslant$. Załóżmy, że $a \leqslant b$ i $b \leqslant a$. To oznacza, że $be_r(a) = a$ i $ae_r(b) = b$.Mamy więc $b = (be_r(a))e_r(b) =$ $= b(e_r(a)e_r(b)) = b(e_r(b)e_r(a))$, gdyż w zbiorze B_o działanie jest przemienne. Dalej mamy $b(e_r(b)e_r(a)) = be_r(a) = a$, gdyż poprzednio wykazaliśmy, że $a \leqslant b$ pociąga $e_r(b)e_r(a) = e_r(a)$, a więc $a = b$ i tym samym relacja $\leqslant$ jest asymetryczna. W ten sposób zakończyliśmy dowód.

Wniosek 7

Dla $a,b \in B$ $\quad a \leqslant b \Longrightarrow e_r(a) \leqslant e_r(b)$.

DOWÓD: W trakcie dowodu poprzedniego wniosku uzasadniliśmy, że $a \leqslant b$ pociąga $e_r(b)e_r(a) = e_r(a)$, a to na podstawie definicji relacji $\leqslant$ oznacza, że $e_r(a) \leqslant e_r(b)$.

3. Uogólniona półgrupa inwersyjna z jedynką

Wniosek 8

Jeżeli uogólniona półgrupa inwersyjna $(B,\cdot)$ spełnia postulat

3. $$\bigvee_{\varepsilon_0 \in B} \bigwedge_{\varepsilon \in B_0} \varepsilon_0 \varepsilon = \varepsilon,$$

to jest to uogólniona półgrupa inwersyjna z jedynką, przy czym

$$1_B = \varepsilon_0$$

DOWOD: Niech $a \in B$. Chcemy wykazać, że $\varepsilon_0 a = a\,\varepsilon_0 = a$, tzn., że element ε_0 jest lewą i prawą identycznością elementu a.

Na podstawie postulatu 3 zachodzi

$$\varepsilon_0 e_1(a) = e_1(a) \quad i \quad \varepsilon_0 e_r(a) = e_r(a)$$

Wobec tego

$$a = e_1(a)a = (\varepsilon_0 e_1(a))a = \varepsilon_0(e_1(a)a) = \varepsilon_0 a$$

$$a = ae_r(a) = a(\varepsilon_0 e_r(a)) = a(e_r(a)\varepsilon_0) = (ae_r(a))\varepsilon_0 = a\varepsilon_0$$

Równość $\varepsilon_0 e_r(a) = e_r(a)\varepsilon_0$ otrzymaliśmy na podstawie lematu I twierdzenia I. Wykazaliśmy więc, że dla każdego elementu $a \in B$ ε_0 jest jego lewą i prawą identycznością, a to na podstawie definicji oznacza, że jest jedynką grupoidu częściowego, jakim jest uogólniona półgrupa inwersyjna B.

Wniosek 9

$$1_B \in B_0$$

DOWOD: Jedynka uogólniomej półgrupy inwersyjnej B jest lewą i prawą identycznością dla każdego elementu $a \in B$, a więc także dla siebie, czyli

$$1_B 1_B = 1_B.$$

W artykule [5] omówione będą przykłady uogólnionych półgrup inwersyjnych, w [6] stosunek uogólnionej półgrupy inwersyjnej do innych systemów algebraicznych z jedną dwuargumentową częściową operacją, natomiast w [7] zastosowanie uogólnionej półgrupy inwersyjnej do algebraizacji pseudogrupy Schoutena-Haantjesa.

LITERATURA

[1] КЛИФФОРД (CLIFFORD A.H.), ПРЕСТОН (PRESTON G.B.): Алгебраическая теория полугрупп I. Москва 1972.

[2] Алгебраическая теория полугрупп II. Москва 1972.

[3] ЛЯПИН Е.С.: Полугруппы. Москва 1960.

[4] WALISZEWSKI W.: On an axiomatic characterization of certain quasi-algebras with one partial operation, Prace Matematyczne 11 (1967), ss. 15-18.

[5] LIPIŃSKA J.: Przykłady uogólnionych półgrup inwersyjnych. ZN Pol.Śl., s. Mat.-Fiz., z. 39.

[6] LIPIŃSKA J.: Stosunek uogólnionej półgrupy inwersyjnej do innych systemów algebraicznych z jedną dwuargumentową częściową operacją. ZN Pol. Śl., s. Mat.-Fiz., z. 39.

[7] LIPIŃSKA J.: Algebraizacja pseudogrupy Schoutena-Haantjesa.ZN Pol.Śl., s. Mat.-Fiz., z. 39.

ОБОБЩЁННАЯ ИНВЕРСНАЯ ПОЛУГРУППА И ЕЁ СВОЙСТВА

Р е з ю м е

В первом параграфе этой работы вводится понятие обобщённой инверсной полугруппы и даются два зевивалентные определения. В § 2 мы представляем свойства обобщённой инверсной полугруппы и вводим реляцию частичного порядка в обобщённой инверсной полугруппе. В конце рассматривается обобщённые инверсные полугруппы с единицей.

A GENERALISED INVERSE SEMIGROUP AND ITS PROPERTIES

S u m m a r y

We introduce a notion of a generalised inverse semigroup in §1 of the present paper. We give two equivalent definitions. Properties of a generalised inverse semigroup are given in §2. Next we introduce a relation of a partial order in a generalised inverse semigroup. At last we consider a generalised inverse semigroup with an identity.

Wpłynęło do Redakcji 18.VI.1980 r.

Recenzent

Prof. Włodzimierz Waliszewski