ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 39 Nr kol. 686

Jolanta LIPIŃSKA

PRZYKŁADY UOGÓLNIONYCH PÓŁGRUP INWERSYJNYCH

Streszczenie. W początkowej części pracy wykazujemy, że każda niepusta pseudogrupa Schoutena i Haantjesa jest uogólnioną półgrupą inwersyjną. Prowadzi to do wniosku, że każda pseudogrupa transformacji przestrzeni topologicznej S, dla której $\underline{S} \neq \emptyset$, stanowi uogólnioną półgrupę inwersyjną z jedynką. W ten sposób otrzymujemy niektóre przykłady uogólnionych półgrup inwersyjnych. W końcowej części pracy podajemy interpretację niektórych pojęć i wniosków dotyczących uogólnionych półgrup inwersyjnych w pseudogrupie Schoutena i Haantjesa.

W [3] zostało wprowadzone pojęcie uogólnionej półgrupy inwersyjnej. Celem tego artykułu jest podanie i omówienie przykładów uogólnionych półgrup inwersyjnych.

W artykule tym formułujemy i dowodzimy twierdzenie I, które mówi, że każda niepusta pseudogrupa Schoutena-Haantjesa jest uogólnioną półgrupą inwersyjną. Jako wniosek z tego twierdzenia otrzymujemy fakt, że każda pseudogrupa przekształceń przestrzeni topologicznej, której zbiór punktów jest niepusty, jest uogólnioną półgrupą inwersyjną z jedynką. Korzystając z tego wniosku, otrzymujemy przykłady uogólnionych półgrup inwersyjnych. Najważniejszą z nich jest zbiór wszystkich homeomorfizmów określonych na niepustych zbiorach otwartych przestrzeni R liczb rzeczywistych.

Korzystając z tego przykładu, otrzymujemy kilka wniosków dotyczących uogólnionej półgrupy inwersyjnej.

Podajemy także interpretację niektórych pojęć dotyczących uogólnionej półgrupy inwersyjnej, w pseudogrupie Schoutena-Haantjesa.

Przyjmijmy definicje i oznaczenia jak w [3]. Oprócz tego podamy teraz dodatkowe definicje i oznaczenia pomocnicze, których nie było w [3].

$\underline{S}$ oznacza zbiór wszystkich punktów przestrzeni topologicznej S, $\omega(S)$ - rodzinę wszystkich zbiorów otwartych przestrzeni topologicznej S. Odwzorowaniem $f : X \to Y$ będziemy nazywać trójkę (X, F, Y), gdzie X, Y są zbiorami, a f funkcją, dla której $D_f = X$. Dla uproszczenia odwzorowanie $f : X \to Y$ będziemy nieraz krótko zapisywać literą f. Symbol f może więc mieć podwójne znaczenie - funkcji lub całego odwzorowania jako trójki. Jeżeli $f : A \to B$ i $f(A) = B$, to mówimy, że f odwzorowuje zbiór A na zbiór B. Mówimy, że odwzorowanie jest różnowartościowe, jeżeli dla różnych argumentów przyjmuje różne wartości. Jeśli f jest odwzorowaniem różnowartościowym zbioru A na zbiór B, to mówimy, że f jest przekształceniem wzajemnie jednoznacznym lub krótko przekształceniem. Jeżeli $f: A \to B$, $g: C \to D$, $f(A) \cap C \neq \emptyset$, to istnieje dokładnie jedno odwzorowanie $g \circ f : f^{-1}(C) \to g(f(A))$ (zwane złożeniem lub superpozycją odwzorowań f i g) zdefiniowane dla $a \in f^{-1}(C)$ następująco: $g \circ f(a) = g(f(a))$. Odwzorowanie tożsamościowe (identycznościowe) zbioru A, tj. takie odwzorowanie $f: A \to A$, że dla każdego $a \in A$ $f(a) = a$, oznaczamy przez id_A. Jeśli $f: \emptyset \neq A \to B$ jest przekształceniem wzajemnie jednoznacznym, to istnieje dokładnie jedno takie odwzorowanie (ono będzie także przekształceniem) $g: B \to A$, że $f \circ g = id_B$, $g \circ f : id_A$; przekształcenie to nazywamy przekształceniem odwrotnym do przekształcenia f i oznaczamy przez f^{-1}. Jeśli $A \cap D_f \neq \emptyset$, to restrykcję (zacieśnieniem) odwzorowania f do zbioru A nazywamy odwzorowanie $f|_A = f \circ id_A$. Mówimy, że odwzorowanie g jest rozszerzeniem odwzorowania f, jeśli $D_f \cap D_g \neq \emptyset$ oraz $g|_{D_f} = f$. Pseudogrupą Schoutena-Haantjesa (zob. [2]) nazywamy zbiór Γ odwzorowań spełniający dwa warunki:

(1) jeżeli $f \in \Gamma$, $g \in \Gamma$ i złożenie $g \circ f$ określone, to $g \circ f \in \Gamma$,

(2) jeżeli $f \in \Gamma$, to f^{-1} określone i $f^{-1} \in \Gamma$.

Z warunku (2) wnioskujemy, że elementami Γ będą tylko wzajemnie jednoznaczne przekształcenia określone na niepustych zbiorach.

Dla dowolnego zbioru Γ odwzorowań $\circ_\Gamma$ oznacza operację częściową na zbiorze Γ o dziedzinie $D_{\circ_\Gamma} = \{(g,f) \in \Gamma \times \Gamma : f(D_f) \cap D_g \neq \emptyset\}$, określoną dla $(g,f) \in D_{\circ_\Gamma}$ następująco: $\circ_\Gamma((g,f)) = g \circ f$.

<u>Twierdzenie I</u>

Niech $\Gamma \neq \emptyset$ będzie pseudogrupą Schoutena-Haantjesa. Uporządkowana para $(\Gamma, \circ_\Gamma)$ będzie uogólnioną półgrupą inwersyjną.

DOWÓD: Ponieważ $\Gamma \neq \emptyset$, więc na podstawie aksjomatu (2) mamy $D_{\circ_\Gamma} \neq \emptyset$, z określenia $D_{\circ_\Gamma}$ wynika, że $D_{\circ_\Gamma} \subset \Gamma \times \Gamma$, a z aksjomatu (1), że $\circ_\Gamma(D_{\circ_\Gamma}) \subset \Gamma$, czyli $(\Gamma, \circ_\Gamma)$ jest grupoidem częściowym. Ponadto dla częściowej operacji $\circ_\Gamma$ jest spełniony aksjomat 1 definicji I z [3]. Stwierdzamy dalej, że dla każdego $f \in \Gamma$ uogólnionym elementem odwrotnym będzie odwzorowanie odwrotne $g = f^{-1}$, które na podstawie warunku (2) należy do Γ. $g = f^{-1}$ spełnia równania $f \circ (g \circ f) = f$ i $g \circ (f \circ g) = g$, gdyż $f \circ (f^{-1} \circ f) = f \circ id_{D_f} = f$, $f^{-1} \circ (f \circ f^{-1}) = f^{-1} \circ id_{f(D_f)} = f^{-1}$. Czy f^{-1} będzie jedynym przekształceniem spełniającym obydwa równania? Przypuśćmy, że $g_1 \in \Gamma$ także je spełnia. Otrzymujemy:

$$id_{D_f} \circ (g_1 \circ id_{f(D_f)}) = f^{-1}$$

oraz

$$g_1^{-1} = g_1^{-1} \circ (g_1 \circ g_1^{-1}) = id_{D_{g_1}} \circ (f \circ id_{g(D_g)}).$$

Widać stąd, że pierwsze równanie spełniają tylko rozszerzenia odwzorowania f^{-1}, a drugie tylko restrykcje, czyli $g_1 = f^{-1}$. Zauważmy jeszcze, że w pseudogrupie Schoutena-Haantjesa

$$e_l(f) = id_{f(D_f)},\ e_r(f) = id_{D_f}.$$

Pseudogrupę Γ przekształceń przestrzeni topologicznej S nazwiemy pseudogrupę przekształceń przestrzeni topologicznej S, zdefiniowaną przez Kobayashi i Nomizu (zob. [1]) po odrzuceniu z niej odwzorowania pustego. Pseudogrupa ta będzie spełniać warunki pseudogrupy Schoutena-Haantjesa.

<u>Wniosek 1</u>

Niech Γ będzie pseudogrupą przekształceń przestrzeni topologicznej S, $\underline{S} \neq \emptyset$. Uporządkowana para (Γ, o_Γ) będzie wtedy uogólnioną półgrupą inwersyjną z jedynką.

DOWÓD: Ponieważ do pseudogrupy przekształceń zdefiniowanej przez Kobayashi i Nomizu należą identyczności na wszystkich zbiorach otwartych, a $\underline{S} \neq \emptyset$, więc $id_{\underline{S}} \in \Gamma$, czyli $\Gamma \neq \emptyset$. Γ jest także pseudogrupą Schoutena-Haantjesa, są więc spełnione założenia twierdzenia I. Wobec tego Γ jest uogólnioną półgrupą inwersyjną. Elementem ε_o spełniającym postulat 3 z [3] będzie odwzorowanie $id_{\underline{S}}$. Zbiór Γ_o będzie to zbiór odwzorowań $\varepsilon \in \Gamma$ spełniających $\varepsilon \circ \varepsilon = \varepsilon$. Ponieważ do Γ należą tylko odwzorowania wzajemnie jednoznaczne o dziedzinach niepustych, otwartych, więc do zbioru Γ_o będą należeć tylko odwzorowania identycznościowe na zbiorach otwartych, niepustych. Z drugiej strony odwzorowania identycznościowe na wszystkich zbiorach niepustych, otwartych przestrzeni topologicznej S będą idempotentami w Γ, czyli będą należeć do Γ_o. Można więc napisać $\Gamma_o = \{id_U \quad \emptyset \neq U \in \omega(S)\}$.
Będzie zachodzić $\bigwedge_{\varepsilon \in \Gamma_o} \varepsilon_o \circ \varepsilon = \varepsilon$, co dowodzi warunku 3 z [3]. Tym samym wykazaliśmy, że (Γ, o_Γ) jest uogólnioną półgrupą inwersyjną z jedynką.

P r z y k ł a d 1

Niech Γ_R będzie zbiorem wszystkich homeomorfizmów określonych na niepustych zbiorach otwartych przestrzeni R liczb rzeczywistych. Γ_R jest pseudogrupą przekształceń przestrzeni topologicznej R, a więc na podstawie wniosku 1 (Γ_R, o_{Γ_R}) jest uogólnioną półgrupą inwersyjną z jedynką.

$$\bigwedge_{f \in \Gamma_R} f : D_f \rightarrow f(D_f).$$

Niech $f(x) = x + 1$, $D_f = (0,1)$, $g(x) = x - 1$, $D_g = R$

$e(x) = x$, $D_e = R$

$$g'(x) = \begin{cases} x & \text{dla } 1 < x < 2 \\ x^3 - 6 & \text{dla } 2 \leqslant x < 3 \end{cases}$$

$g_a = g|_{(a,3-a)}$, gdy $a \leqslant 1$ będzie spełniać równość $f \circ (g_a \circ f) = f$,

gdy $a \geqslant 1$ równość $g_a \circ (f \circ g_a) = g_a$.

Jedynym odwzorowaniem spełniającym obydwie równości będzie

$$g_1 = g|_{(1,2)} = f^{-1}.$$

Przykład ten wskazuje, że w aksjomacie 2 definicji uogólnionej półgrupy inwersyjnej żadnej z dwóch równości opuścić nie można. Zauważmy dalej, że $e|_{(b,3-b)}$, gdy $b \leqslant 1$ będzie lewą identycznością elementu f (gdy b= = 1, $e|_{(b,3-b)} = e_l(f)$).

Natomiast $e|_{(c,1-c)}$, gdy $c \leqslant 0$ będzie prawą identycznością elementu f (gdy $c = 0$, $e|_{(c,1-c)} = e_r(f)$). Widać stąd, że dany element może mieć wiele lewych i prawych identyczności. Zauważmy jeszcze, że lewymi lub prawymi identycznościami mogą być także odwzorowania nieidentycznościowe, czyli nie należące do Γ_{Ro}. Zachodzi $g' \circ f = f$, a jak łatwo sprawdzić $g' \in \Gamma_R$. Podobnie można podać prawą identyczność nie będącą odwzorowaniem identycznościowym na całej dziedzinie. Rozpatrując teraz odwzorowania e, $h_1 = e|_{(0,1)}$, $h_2 = e|_{(1,2)}$, dla których zachodzi $e \circ h_2 = id_{(1,2)}$, $h_1 \circ e = id_{(0,1)}$,

$$(h_1, e \circ h_2) \notin D_{o_{\Gamma_R}}, \quad \text{gdyż} \quad (0,1) \cap (1,2) = \emptyset$$

widzimy, że w naszym przykładzie nie zachodzi

$$(*) (h_1, e), (e, h_2) \in D_{o_{\Gamma_R}} \Rightarrow (h_1, e \circ h_2) \in D_{o_{\Gamma_R}}$$

czyli w równości definiującej prawo łączności mogą być określone obydwa wyrażenia w nawiasach, a nie będzie określona żadna ze stron.

Zauważmy dalej, że $h_1 \circ h_1 = h_1$, ale $h_1 = e \circ h_1 = h_1 \circ e \neq e$, tak więc h_1 jest swoją lewą i prawą identycznością, ale nie jest już identycznością (ani lewą ani prawą) dla e, mimo że $(e, h_1) \in D_{o_{\Gamma_R}}$ i $(h, e_1) \in D_{o_{\Gamma_R}}$.

Rozważmy teraz dowolną trójkę $(e_1, e_2, f_1) \in \Gamma_R$ i równości

I. $e_1 \circ f = f$ II. $e_2 \circ f_1 = f_1$ III. $f_1 \circ f = e_2$

IV. $f \circ f_1 = e_1$ V. $f \circ e_2 = f$ VI. $f_1 \circ e_1 = f_1$

Przy okazji wniosku 1 z [3] stwierdziliśmy, że jeżeli trójka (e_1, e_2, f_1) spełnia równości I, II, III, IV lub III, IV, V, VI lub I,III,IV,VI lub II, III, IV, V, to spełnia już wszystkie równości i zachodzi $e_1 = e_l(f)$, $e_2 = e_r(f)$, $f_1 = f^{-1}$.

Pokażemy teraz, że przy innym wyborze czterech równości lub przy ich mniejszej ilości pozostałe równości nie muszą być spełnione.

Trójka (e_1, e_2, f_1), gdzie $e_1 = e_l(f)$, $e_2 = e$, $f_1 = f^{-1}$, nie spełnia III, chociaż spełnia I, II, IV, V, VI. Trójka (e_1, e_2, f_1), gdzie $e_1 = e$, $e_2 = e_r(f)$, $f_1 = f^{-1}$ nie spełnia IV, chociaż spełnia I, II, III, V, VI. Trójka (e_1, e_2, f_1), gdzie $e_1 = e_l(f)$, $e_2 = e_r(f)$, $f_1 = g$, nie spełnia II ani VI, chociaż spełnia I, III, IV, V. W końcu trójka (e_1, e_2, f_1), gdzie $e_1 = e\big|_{(1,\frac{3}{2})}$, $e_2 = e\big|_{(0,\frac{1}{2})}$, $f_1 = g\big|_{(1,\frac{3}{2})}$ nie spełnia I ani V, chociaż spełnia II, III, IV i VI.

Z powyższych faktów wynika, że równości III i IV opuścić nie można, a także, że trzeba wybrać jedną z równości I, V oraz jedną z równości II, VI.

Zauważmy jeszcze, że odwzorowanie e występujące w naszym przykładzie jest jedynką uogólnionej półgrupy inwersyjnej (Γ_R, o_{Γ_R}).

Dla uogólnionej półgrupy inwersyjnej (Γ, o_Γ), gdzie Γ jest pseudogrupą Schoutena-Haantjesa, podamy jeszcze interpretację niektórych pojęć i wniosków z [3]. Na przykład wniosek 4 można odczytać następująco: dla $f, g \in \Gamma$ złożenie $g \circ f$ określone, gdy część wspólna przeciwdziedziny odwzorowania f i dziedziny odwzorowania g jest zbiorem niepustym. Lemat II twierdzenia I mówi, że złożenie odwzorowań identycznościowych należących do Γ jest odwzorowaniem identycznościowym należącym do Γ, a twierdzenie I, że składanie odwzorowań identycznościowych należących do Γ jest przemienne. Relacja $f \leqslant g$ we wniosku 6 oznacza, że f jest zacieśnieniem odwzorowania g. Relację tę dla odwzorowań identycznościowych, należących do Γ, czyli dla elementów zbioru Γ_0, można traktować jako relację zawierania się odpowiednich zbiorów. Wniosek 7 można więc odczytać następująco: Jeżeli $f \in \Gamma$ jest zacieśnieniem odwzorowania $g \in \Gamma$, to $D_f \subset D_g$.

Przykład 2

W $\{a,b\}$ wprowadzam topologię dyskretną. Zbiór przekształceń $\Gamma = \{id_{\{a\}}, id_{\{b\}}, id_{\{a\}\cup\{b\}}\}$ tworzy pseudogrupę przekształceń przestrzeni topologicznej dyskretnej, tym samym $(\Gamma, \circ)$ jest uogólnioną półgrupą inwersyjną z jedynką. Jeżeli oznaczymy sobie $\varepsilon_1 = id_{\{a\}}$, $\varepsilon_2 = id_{\{b\}}$, $\varepsilon_o = id_{\{a\}\cup\{b\}}$, to uogólnionej półgrupie inwersyjnej z jedynką (Γ, o_Γ) będzie odpowiadać poniższa tabelka. Wobec tego $(B, \cdot)$, gdzie $B = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_o\}$ (tym razem ε_1, ε_2, ε_o są dowolne), a działanie określa tabelka obok, jest uogólnioną półgrupą inwersyjną z jedynką.

	ε_1	ε_2	ε_o
ε_1	ε_1		ε_1
ε_2		ε_2	ε_2
ε_o	ε_1	ε_2	ε_o

Przykład 3

$(B, \cdot)$, gdzie $B = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, a działanie określa poniższa tabelka, jest uogólnioną półgrupą inwersyjną, lecz bez jedynki. Przykład ten wskazuje, że istnieją uogólnione półgrupy inwersyjne bez jedynki

	ε_1	ε_2
ε_1	ε_1	
ε_2		ε_2

Wnioski wypływające z powyższych przykładów zostaną wykorzystane w artykule [4].

LITERATURA

[1] KOBAYASHI S., NOMIZU K.: Foundations of differential geometry I. New York, London 1963.

[2] KUCHARZEWSKI M.: Elementy teorii obiektów geometrycznych. U.Śl. Katowice 1969.

[3] LIPIŃSKA J.: Uogólniona półgrupa inwersyjna i jej własności. ZN Pol. Śl., s. Mat.-Fiz., z. 39.

[4] LIPIŃSKA J.: Stosunek uogólnionej półgrupy inwersyjnej do innych systemów algebraicznych z jedną dwuargumentową częściową operacją. ZN Pol. Śl., s. Mat.-Fiz., z. 39.

ПРИМЕРЫ ОБОБЩЁННЫХ ИНВЕРСНЫХ ПОЛУГРУПП

Резюме

В начале этой работы доказывается что любая нупустая псевдогруппа Схоутена и Хантьеса является обобщённой инверсиой полугруппой. Мы делаем вывод что любая псевдогруппа преобразований топологического пространства S, для которого $\underline{S} \neq \emptyset$, является обобщённой инверсной полугруппой с единицей. Таким образом мы получаем несколько примеров обобщённых инверсных полугрупп. В конце мы даём интерпретацию некоторых понятий и следствий, связанных с обобщённой инверсной полугруппой, в псевдогруппе Схоутена и Хантьеса.

EXAMPLES FOR GENERALISED INVERSE SEMIGROUPS

Summary

In the begining of this paper we prove that every non - empty pseudogroup of Schouten and Haantjes is a generalised inverse semigroup. We come to a conclusion that every pseudogroup of transformations on a topological space S, for which $\underline{S} \neq \emptyset$, is a generalised inverse semigroup with an identity. In this way we get some examples for generalised inverse semigroups. In the end we give an interpretation of some notions and conclusions relating to a generalised inverse semigroup in a pseudogroup of Schouten and Haantjes.

Wpłynęło do Redakcji 18.VI.1980 r.

Recenzent

Prof. Włodzimierz Waliszewski