ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 39 Nr kol. 686

Jolanta LIPIŃSKA

STOSUNEK UOGÓLNIONEJ PÓŁGRUPY INWERSYJNEJ DO INNYCH SYSTEMÓW ALGEBRAICZNYCH Z JEDNĄ DWUARGUMENTOWĄ CZĘŚCIOWĄ OPERACJĄ

Streszczenie. W pracy rozważamy związek uogólnionej półgrupy inwersyjnej z innymi systemami algebraicznymi z jedną dwuargumentową częściową operacją. Wniosek 1 mówi, w jaki sposób można otrzymać półgrupę inwersyjną z uogólnionej półgrupy inwersyjnej. Wniosek 2 dotyczy analogicznego faktu dla uogólnionej półgrupy inwersyjnej z jedynką. Wnioski 3 i 4 wyjaśniają związek uogólnionej półgrupy inwersyjnej z grupoidem Ehresmana. Wszystkie sformułowane w pracy wnioski są interpretowane graficznie.

W [17] zostało wprowadzone pojęcie uogólnionej półgrupy inwersyjnej, a w [18] podane zostały przykłady uogólnionych półgrup inwersyjnych. Celem tej pracy jest wyjaśnienie stosunku uogólnionej półgrupy inwersyjnej, a także uogólnionej półgrupy inwersyjnej z jedynką do innych systemów algebraicznych z jedną dwuargumentową częściową operacją, w szczególności grupoidu Ehresmanna, uogólnionej półgrupy, półgrupy inwersyjnej.

Korzystając z przykładów omówionych w [18] formułujemy i dowodzimy kilka wniosków dotyczących stosunku uogólnionej półgrupy inwersyjnej do innych systemów algebraicznych z jedną dwuargumentową częściową operacją. Wniosek 1 mówi nam, że z uogólnionej półgrupy inwersyjnej przez dołączenie jednego elementu można otrzymać półgrupę inwersyjną, wniosek 2 mówi o analogicznym fakcie dla uogólnionej półgrupy inwersyjnej z jedynką. Wnioski 3 i 4 wyjaśniają stosunek uogólnionej półgrupy inwersyjnej do grupoidu Ehresmanna. Powyższe wnioski zostają także zinterpretowane graficznie.

Przyjmijmy definicje i oznaczenia jak w [17] i [18]. Stwierdziliśmy już w [17], że uogólniona półgrupa inwersyjna jest uogólnioną półgrupą spełniającą warunek inwersyjności półgrupy. Można więc powiedzieć, że każda półgrupa inwersyjna jest uogólnioną półgrupą inwersyjną, ale nie na odwrót. Przykład 1 z [18] wskazuje, że istnieje uogólniona półgrupa inwersyjna, która nie jest półgrupą, gdyż operacja składania odwzorowań nie jest określona dla wszystkich par. Można jednak podać następujący wniosek.

Wniosek 1

Jeżeli do uogólnionej półgrupy inwersyjnej $(B,\cdot)$ dołączyć element $0 \notin B$, to $\bar{B} = B \cup \{0\}$ z działaniem $\odot$ określonym następująco:

$$(**)\begin{cases} \text{gdy } a,b\in B, \text{ to } a\odot b = \begin{cases} a\cdot b & \text{jeśli } (a,b)\in D \\ 0 & \text{jeśli } (a,b)\notin D, \end{cases} \\ \text{natomiast } a\odot 0 = 0\odot a = 0\odot 0 = 0; \end{cases}$$

będzie półgrupą inwersyjną.

DOWÓD: Na podstawie lematu Conrada (zob. [4] s. 138) otrzymujemy, że $(\tilde{B},\odot)$ jest półgrupą. Należy pokazać jeszcze, że każdy element $a\in\tilde{B}$ posiada jednoznacznie wyznaczony uogólniony element odwrotny b.

Rozróżnimy dwa przypadki: 1^o $a\in B$, 2^o $a = 0$.

Niech $a\in B$. Wykażemy, że a^{-1} w uogólnionej półgrupie inwersyjnej $(B,\cdot)$ będzie szukanym elementem b. Oczywiście zachodzi $a\odot(a^{-1}\odot a) = a$ i $a^{-1}\odot(a\odot a^{-1}) = a^{-1}$. Pytanie jest, czy a^{-1} będzie jedynym takim elementem w $\tilde{B}$. Przypuśćmy, że istnieje $\tilde{b}\in\tilde{B}$, że zachodzi $a\odot(\tilde{b}\odot a) = a$ i $\tilde{b}\odot(a\odot\tilde{b}) = \tilde{b}$.

Ponieważ a^{-1} jest jedynym elementem spełniającym powyższe równości w $(B,\cdot)$, więc $\tilde{b} = 0$ lub $\tilde{b}\in B$ i przynajmniej jeden z iloczynów $a\cdot(\tilde{b}\cdot a)$, $\tilde{b}\cdot(a\cdot\tilde{b})$ jest nieokreślony, czyli $a = a\odot(\tilde{b}\odot a) = 0$ lub $\tilde{b} = \tilde{b}\odot(a\odot\tilde{b}) = 0$. Gdy $\tilde{b} = 0$, to $a = a\odot(\tilde{b}\odot a) = 0$. Natomiast $a = 0$ jest sprzeczne z założeniem $a\in B$. We wszystkich przypadkach doszliśmy do sprzeczności, a więc takie $\tilde{b}\in\tilde{B}$ różne od a^{-1} nie istnieje.

Niech teraz $a = 0$. Oczywiście zachodzi $0\odot(0\odot 0) = 0$. Wykażemy, że 0 jest jedynym elementem inwersyjnym, tzn. uogólnionym elementem odwrotnym do 0. Przypuśćmy, że istnieje $\tilde{b}\in\tilde{B}$, że $0\odot(\tilde{b}\odot 0) = 0$ i $\tilde{b}\odot(0\odot\tilde{b}) = \tilde{b}$. Pierwsza równość jest spełniona dla każdego $\tilde{b}\in\tilde{B}$, ale drugą równość spełnia tylko $\tilde{b} = 0$, gdyż $\tilde{b} = \tilde{b}\odot(0\odot\tilde{b}) = \tilde{b}\odot 0 = 0$. Tym samym wykazaliśmy, że każdy element $a\in\tilde{B}$ posiada jednoznacznie wyznaczony uogólniony element odwrotny, a więc $(\tilde{B},\odot)$ jest półgrupą inwersyjną.

Dla pseudogrupy Schoutena-Haantjesa Γ, gdzie $\Gamma\neq\phi$, interpretacja powyższego wniosku jest następująca:

Do zbioru przekształceń Γ dołączam odwzorowanie puste $0:\emptyset\to\emptyset$, która nie należy do Γ i złożenie $\odot$ określam następująco:

$$\text{gdy } g,f\in\Gamma \qquad g\odot f = \begin{cases} g\circ f, & \text{gdy złożenie wykonalne} \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases}$$

natomiast $g\odot 0 = 0\odot g = 0\odot 0 = 0$.

Wtedy $(\Gamma\cup\{0\},\odot)$ jest półgrupą inwersyjną. Będzie to inwersyjna podpółgrupa inwersyjnej półgrupy częściowych przekształceń (zob. [9]). Analogiczny wniosek można podać dla uogólnionej półgrupy inwersyjnej z jedynką.

Wniosek 2

Jeżeli do uogólnionej półgrupy inwersyjnej $(B,\cdot)$ z jedynką dołączyć element $0 \notin B$, to $\tilde{B} = B \cup \{0\}$ z działaniem $\odot$ określonym wzorami (* *) będzie półgrupą inwersyjną z jedynką.

DOWÓD: Korzystając z wniosku 1 otrzymujemy, że $\tilde{B}$ jest półgrupą inwersyjną. Pokażemy teraz, że 1_B jest jedynką półgrupy $\tilde{B}$. Dla $a \in B$ zachodzi $a \odot 1_B = 1_B \odot a = a$, ale zachodzi także $0 \odot 1_B = 1_B \odot 0 = 0$, a więc 1_B jest także jedynką półgrupy $(\tilde{B},\odot)$.

Wniosek 3

Każdy grupoid Ehresmanna jest uogólnioną półgrupą inwersyjną, ale nie każda uogólniona półgrupa inwersyjna jest grupoidem Ehresmanna, a nawet kategorią.

DOWÓD: Wykażemy, że uogólniona półgrupa inwersyjna jest pojęciem ogólniejszym od pojęcia grupoidu Ehresmanna (zob. [12]). Gdy w definicji grupoidu Ehresmanna $(B,\cdot)$ odrzucimy warunek (*) z [18], który zachodzi także w kategorii (zob. [12]), a także prawa skracania (lewostronnego i prawostronnego) i zamiast warunku

(* * *) $$\bigwedge_{a \in B} \bigvee_{b \in B} (ab \in B_0)$$

(spełnionego w uogólnionej półgrupie inwersyjnej, elementem b będzie a^{-1}) podamy aksjomat 2 z [17] (jest spełniony w grupoidzie Ehresmanna), otrzymamy uogólnioną półgrupę inwersyjną. Ponieważ grupoid Ehresmanna jest pojęciem ogólniejszym niż grupoid Brandta (zob. [12]), więc także grupoid Brandta będzie spełniać warunki definicji uogólnionej półgrupy inwersyjnej (kategoria już nie będzie ich spełniać).

Przykład 1 z [18] wskazuje, że istnieje uogólniona półgrupa inwersyjna nawet z jedynką, która nie jest grupoidem Ehresmanna. Ona nie jest nawet kategorią.

W uogólnionej półgrupie inwersyjnej z przykładu 1 z [18] nie zachodzi ani warunek (*) z [18] ani prawa skracania. Nie jest też prawdą, że każdy grupoid Brandta (tym bardziej Ehresmanna) jest uogólnioną półgrupą inwersyjną z jedynką. Dla grupy już to zachodzi. Przykładem grupoidu Brandta nie spełniającego aksjomatu 3 z [17] jest grupoid podstawowy (zob. [7]).

Zauważmy jeszcze, że w uogólnionej półgrupie inwersyjnej $(B,\cdot)$ z jedynką jest spełniony warunek

$$\bigwedge_{a,b \in B} \bigvee_{c \in B} ((a,c) \in D \wedge (c,b) \in D),$$

który z grupoidu Ehresmanna czyni grupoid Brandta.

Jest spełniony jeszcze silniejszy aksjomat

$$\bigvee_{c\in B}\ \bigwedge_{a,b\in B}\ ((a,c)\in D \wedge (c,b)\in D)$$

Oczywiście elementem c będzie 1_B.
Możemy wypowiedzieć jeszcze jeden wniosek.

Wniosek 4

W K W, aby uogólniona półgrupa inwersyjna była grupoidem Ehresmanna jest, żeby był spełniony warunek (*) z [18], a także prawa skracania (lewostronnego i prawostronnego). Jeżeli uogólniona półgrupa inwersyjna z jedynką będzie spełniać te warunki, to będzie już grupą.

DOWÓD: Pierwszą część wniosku wykazaliśmy już wcześniej. Dla dowodu drugiej części wykażemy, że jeżeli grupoid Ehresmanna $(B,\cdot)$ posiada jedynkę, to działanie jest określone dla wszystkich par jego elementów.

Niech $a,b\in B$

$(a,1_B)\in D \wedge (1_B,b)\in D$, więc na podstawie (*) z [18]

$(a1_B,b)\in D$, ale $a1_B = a$, czyli $(a,b)\in D$.

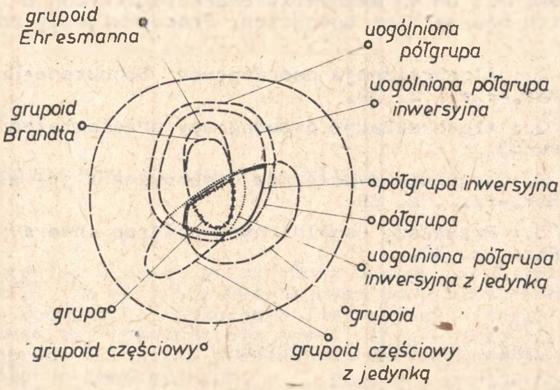
Wykażemy teraz, że jeżeli w grupoidzie Ehresmanna działanie jest określone dla wszystkich par jego elementów, to jest on już grupą. W tym celu udowodnimy, że $B_o = \{1_B\}$.

Niech $\varepsilon_1,\varepsilon_2\in B_o$. Zachodzi $\varepsilon_1(\varepsilon_1\varepsilon_2) = (\varepsilon_1\varepsilon_1)\varepsilon_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2$. Skracając lewostronnie przez ε_1, mamy $\varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_2$. Analogicznie $\varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_1(\varepsilon_2\varepsilon_2) = (\varepsilon_1\varepsilon_2)\varepsilon_2$. Skracając teraz prawostronnie przez ε_2, mamy $\varepsilon_1 = \varepsilon_1\varepsilon_2$, czyli $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, a więc $B_o = \{1_B\}$. Mamy więc półgrupę z jedynką.

Dla każdego $a\in B$ istnieje także element odwrotny $b\in B$ na podstawie aksjomatu (***). Zachodzi wtedy $ab\in B_o$, ale $B_o = \{1_B\}$, więc $ab = 1_B$. Ponieważ także $ba\in B_o$ (na podstawie własności (1.12) z [12]), więc rzeczywiście b jest elementem odwrotnym do a, czyli $(B,\cdot)$ jest grupą.

Miejsce uogólnionej półgrupy inwersyjnej i uogólnionej półgrupy inwersyjnej z jedynką wśród innych systemów algebraicznych z dwuargumentową częściową operacją można zilustrować graficznie. Nazwy grupoid używamy tu w sensie definicji podanej w [4]. Zawieraniu się zbiorów na rys. 1 odpowiada relacja częściowego porządku pomiędzy odpowiednimi systemami algebraicznymi. Na przykład zbiór oznaczający grupoid Brandta zawiera zbiór oznaczający grupę, czyli grupoid Brandta jest uogólnieniem grupy.

Nie powiedzieliśmy jeszcze nic o pseudogrupie L. Dubikajtisa (zob. [2], [3]) ani o równoważnej jej pseudogrupie F. Maniakowskiego (zob. [10]), lecz nie było to konieczne, gdyż T. Saito w [11] wykazał, że obydwa te pojęcia



Rys. 1.

są równoważne półgrupie inwersyjnej. Zastosowanie uogólnionej półgrupy inwersyjnej do algebraizacji pseudogrupy Schoutena-Haantjesa będzie pokazane w [15], a pseudogrupy Kobayashi-Nomizu w [16].

LITERATURA

[1] BORŮVKA O.: Foundations of the Theory of Groupoids and Groups, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1974.

[2] DUBIKAJTIS L.: Cerataines extensions de la notion de groupoide inductif et de celle de pseudogroupe. Colloquium Mathematicum 12 (1964), ss. 163-185.

[3] DUBIKAJTIS L., JAREK P.: Pseudogroupe èlèmentaire commutatif et semi - groupe règulier commutatif, ibidem 12 (1964), ss. 187-193.

[4] КЛИФФОРД (CLIFFORD A.H.), ПРЕСТОН (PRESTON G.B.): Алгебраическая теория полугрупп I, Москва 1972.

[5] КЛИФФОРД (CLIFFORD A.H.), ПРЕСТОН (PRESTON G.B.): Алгебраическая теория полугрупп II, Москва 1972.

[6] KOBAYASHI S., NOMIZU K.: Foundations of differential geometry I. New York, London 1963.

[7] KUCHARZEWSKI M.: Elementy teorii obiektów geometrycznych; U.Śl.,Katowice 1969.

[8] KUCHARZEWSKI M., KUCZMA M.: Basic concepts of the theory of geometric objects. Rozprawy Mat. 43, Warszawa 1964.

[9] ЛЯПИН Е.С.: Полугруппы, Москва 1960.

[10] MANIAKOWSKI F.: Sur les axiomes du pseudogroupe. Bulletin de l'Acadèmie Polonaise des Sciences, Serie des sciences mathématiques, astronomiques et physiques, 12 (1964) ss. 197-201.

[11] SAITO T.: A remark on elementary pseudogroups. Colloquium Mathematicum 15 (1966), ss. 189-190.

[12] WALISZEWSKI W.: Categories, groupoids, pseudogroups and analytical structures. Rozprawy Mat. 45, Warszawa 1965.

[13] WALISZEWSKI W.: On a generalisation of the notion of a semi-group. Colloqium Mathematicum 15 (1966), ss. 191-194.

[14] WALISZEWSKI W.: On an axiomatic characterization of certain quasi-algebras with one partial operation. Prace Matematyczne 11 (1967), ss. 15-18.

[15] LIPIŃSKA J.: Algebraizacja pseudogrupy Schoutena-Haantjesa. ZN Pol. Śl., s. Mat.-Fiz., z. 39.

[16] LIPIŃSKA J.: Algebraizacja pseudogrupy przekształceń (w przygotowaniu do druku).

[17] LIPIŃSKA J.: Uogólniona półgrupa inwersyjna i jej własności. ZN Pol. Śl., s. Mat.-Fiz., z. 39.

[18] LIPIŃSKA J.: Przykłady uogólnionych półgrup inwersyjnych. ZN Pol. Śl., s. Mat.-Fiz., z. 39.

ОТНОШЕНИЕ ОБОБЩЁННОЙ ИНВЕРСНОЙ ПОЛУГРУППЫ К ДРУГИМ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ С ОДНОЙ БИНАРНОЙ ОПЕРАЦИЕЙ

Р е з ю м е

В этой работе изучается отношение обобщённой инверсной полугруппы к другим алгебраическим системом с одной бинарной операцией. Следствие 1 говорит как можно получить инверсную полугруппу из обобщённой инверсной полугруппы. Следствие 2 говорит о аналогичном факте для обобщённой инверсной полугруппы с единицей. Следствия 3 и 4 выясняют отношение обобщённой инверсной полугруппы к групоиду Ересмана. Все следствия мы графически интерпретируем.

CONNECTION OF A GENERALISED INVERSE SEMIGROUP WITH OTHER ALGEBRAIC SYSTEMS WITH ONE BINARY PARTIAL OPERATION

S u m m a r y

In the present paper we consider connection of a generalised inverse semigroup with other algebraic systems with one binary partial operation. Conclusion 1 says how we may get an inverse semigroup from a generalised inverse semigroup. Conclusion 2 says about analogical fact for a generalised inverse semigroup with an identity. Conclusion 3 and 4 explain connection of a generalised inverse semigroup with Ehresman's groupoid. All these conclusions are graphically interpreted.

Wpłynęło do Redakcji 18.VI.1980 r.

Recenzent

Prof. Włodzimierz Waliszewski