ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 39 Nr kol. 686

Aleksander LEWICKI

NIELINIOWE FIZYKALNIE PROBLEMY TERMOSPRĘŻYSTOŚCI OŚRODKÓW OBROTOWYCH
I. RÓWNANIA PRZEMIESZCZENIOWE

Streszczenie. Przyjmując, że sprężysty ośrodek obrotowy jest jednorodny i izotropowy, lecz fizykalnie nieliniowy - typu Kauderera - uzyskano równania przemieszczeniowe problemu. Uwzględniono nieliniowy wpływ pola temperatury.

1. Wstęp

Otrzymane tutaj równania przemieszczeniowe dla problemu nieliniowego fizykalnie w szczególnym przypadku fizykalnej liniowości upraszczają się do znanych równań, por. [3], obowiązujących dla ośrodków liniowo-sprężystych.

Rozpatrujemy obrotowy ośrodek sprężysty zajmujący obszar $\mathcal{V}$, którego brzeg oznaczymy przez $\partial\mathcal{V}$. Zakładamy również, że na części brzegu - oznaczonego przez $\partial\hat{\mathcal{V}}$ - działają obciążenia powierzchniowe $\hat{\mathfrak{X}}_i(\hat{\mathfrak{X}}_r, \hat{\mathfrak{X}}_\varphi, \hat{\mathfrak{X}}_z)$ zaś na części brzegu $\partial\tilde{\mathcal{V}}$ zadane są przemieszczenia $\tilde{u}_i(\tilde{u}_r, \tilde{u}_\varphi, \tilde{u}_z)$. Podzbiory brzegowe $\partial\hat{\mathcal{V}}$; $\partial\tilde{\mathcal{V}}$ spełniają relacje

$$\partial\hat{\mathcal{V}} \cup \partial\tilde{\mathcal{V}} = \partial\mathcal{V} \qquad \partial\hat{\mathcal{V}} \cap \partial\tilde{\mathcal{V}} = \phi \tag{1.1}$$

Ponadto ośrodek poddany jest działaniu pola sił masowych $X_i(X_r, X_\varphi, X_z)$ oraz stacjonarnego pola temperatur Θ. Otrzymane równania przemieszczeniowe opisują problem w przypadku niestacjonarnego pola temperatury, przy założeniu, że nie ma sprzężenia pola temperatur i przemieszczeń (zadanie quasi-statyczne, czas uważamy wtedy za parametr). Z uwagi na symetrię ośrodka obieramy krzywoliniowy układ współrzędnych walcowych (r, φ, z); oś z układu pokrywa się z osią symetrii ośrodka.

W układzie współrzędnych walcowych niezmienniki stanu odkształcenia ε, e określone są przez współrzędne odkształcenia por. [4], w następujący sposób:

$$\varepsilon = \varepsilon_{(m)} = \frac{1}{3}(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}), \tag{1.2}$$

$$e = \varepsilon_{rr}^2 + \varepsilon_{\varphi\varphi}^2 + \varepsilon_{zz}^2 + 3\varepsilon_{r\varphi}^2 + 3\varepsilon_{rz}^2 + 3\varepsilon_{\varphi z}^2 - \varepsilon_{rr}\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr}\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{\varphi\varphi}\varepsilon_{zz} \tag{1.3}$$

Będziemy przyjmować dalej, że energia swobodna (funkcja stanu, por. [1], ma następującą postać:

$$F(\varepsilon, e, T) = G(1 - \hat{\chi})\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2}(1 - \hat{\psi})(\varepsilon_{kk})(\varepsilon_{ll}) - 3K(1 - \bar{\varphi})\Theta\alpha_T\varepsilon_{kk} \tag{1.4}$$

$$(i, j, k, l = r, \varphi, z),$$

gdzie:

$$\hat{\chi} = \hat{\chi}(e) = -\frac{3}{2G}\sum_{j=2}^{Q} b_\gamma \cdot e^{\gamma-1}, \quad \varphi = \hat{\varphi}(\varepsilon) = \frac{2}{9K}\sum_{\beta=3}^{P} a_\beta \varepsilon^{\beta-2},$$

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(\Theta\alpha_T) = \frac{1}{9K}\sum_{\beta=3}^{P}\beta a_\beta(\Theta\alpha_T)^{\beta-2}, \quad \hat{\psi} = -\frac{2G}{3\lambda}\hat{\chi} + \frac{K}{\lambda}\hat{\varphi}; \tag{1.5}$$

w (1.5) przez α_T oznaczono uśredniony współczynnik rozszerzalności cieplnej. Ponieważ

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{1.6}$$

więc różniczkując (1.4) otrzymujemy:

$$\sigma_{ij} = 2G\left[1 - \left(\hat{\chi} + \frac{\varepsilon_{ij}}{2}\frac{\partial\hat{\chi}}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)\right]\varepsilon_{ij} + \frac{2G}{3}\left(\hat{\chi}\delta_{ij} + \frac{\varepsilon_u}{2}\frac{\partial\hat{\chi}}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)\varepsilon_{kk} -$$

$$- K\left(\hat{\varphi}\delta_{ij} + \frac{\varepsilon_u}{2}\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)\varepsilon_{kk} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - 3K(1 - \bar{\varphi})\Theta\alpha_T\delta_{ij} \tag{1.7}$$

po dalszych przekształcenia uzyskamy:

$$\sigma_{ij} = 2G\left[1 - \left(\hat{\chi} + e\frac{d\hat{\chi}}{de}\right)\right]\varepsilon_{ij} + \frac{2G}{3}\left(\hat{\chi} + e\frac{d\hat{\chi}}{de}\right)\delta_{ij}\varepsilon_{kk}$$

$$- K\left(\hat{\varphi} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{d\hat{\varphi}}{d\varepsilon}\right)\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - 3K(1 - \bar{\varphi})\Theta\alpha_T\delta_{ij}. \tag{1.8}$$

Oznaczając przez

$$\chi = \hat{\chi} + e\frac{d\hat{\chi}}{de}, \quad \varphi = \hat{\varphi} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{d\hat{\varphi}}{d\varepsilon}, \quad \psi = -\frac{2G}{3\lambda}\chi + \frac{k}{\lambda}\varphi \tag{1.9}$$

równania (1.8) zapiszemy ostatecznie w postaci:

$$\sigma_{ij} = 2G(1 - \chi)\varepsilon_{ij} + [\lambda(1 - \psi)\varepsilon_{kk} - 2K(1 - \bar{\varphi})\Theta\alpha_T]\delta_{ij} \tag{1.10}$$

$$(i,j = r,\varphi, z)$$

Nieliniowe równania konstytutywne (1.10) należą do grupy tzw.: równań Kauderera. Wykorzystując relacje (1.5) w równaniach (1.9) możemy funkcje χ i φ przedstawić w postaci szeregów potęgowych

$$\chi = \lambda(e) = -\frac{3}{2G}\sum_{\gamma=2}^{Q} \gamma b_\gamma e^{\gamma-2}$$

$$\varphi = \varphi(\varepsilon) = \frac{1}{9K}\sum_{\beta=3}^{P} \beta a_\beta \varepsilon^{\beta-2} \tag{1.11}$$

2. Współrzędne walcowe

W układzie współrzędnych walcowych równania konstytutywne (1.10) mają postać:

$$\sigma_{rr} = 2G(1 - \chi)\varepsilon_{rr} + \lambda(1 - \psi)(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}) - 3K(1 - \bar{\varphi})\Theta\alpha_T,$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = 2G(1 - \chi)\varepsilon_{\varphi\varphi} + \lambda(1 - \psi)(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}) - 3K(1 - \bar{\varphi})\Theta\alpha_T,$$

$$\sigma_{zz} = 2G(1 - \chi)\varepsilon_{zz} + \lambda(1 - \psi)(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}) - 3K(1 - \bar{\varphi})\Theta\alpha_T,$$

$$\sigma_{r\varphi} = 2G(1 - \chi)\varepsilon_{r\varphi}, \quad \sigma_{rz} = 2G(1 - \chi)\varepsilon_{rz}, \quad \sigma_{\varphi z} = 2G(1 - \chi)\varepsilon_{\varphi z} \tag{2.1}$$

Związki między odkształceniami a przemieszczeniami, por. np. [3], określone są przez

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}\right), \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right),$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{\varphi z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi}\right), \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{2.2}$$

$$x = (r,\varphi,z) \in T;$$

natomiast równania równowagi we współrzędnych walcowych, por. [3], mają postać:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + X_r = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r}\sigma_{\varphi r} + X_\varphi = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r}\sigma_{rz} + X_z = 0, \qquad x = (r,\varphi,z) \in \mathcal{T}$$

Ogólną postać naprężeniowych warunków brzegowych w układzie współrzędnych walcowych (r,φ,z) przedstawiają równania:

$$\mathcal{X}_r(x) = \sigma_{rr}n_r + \sigma_{r\varphi}n_\varphi + \sigma_{rz}n_z = \hat{\mathcal{X}}_r,$$

$$\mathcal{X}_\varphi(x) = \sigma_{\varphi r}n_r + \sigma_{\varphi\varphi}n_\varphi + \sigma_{\varphi z}n_z = \hat{\mathcal{X}}_\varphi, \tag{2.4}$$

$$\mathcal{X}_z(x) = \sigma_{rz}n_r = \sigma_{\varphi z}n_\varphi + \sigma_{zz}n_z = \hat{\mathcal{X}}_z, \qquad x = (r,\varphi,z) \in \partial\hat{\mathcal{T}}$$

Na pozostałej części brzegu $\partial\tilde{\mathcal{T}} = \partial\mathcal{T} \setminus \partial\hat{\mathcal{T}}$ zadane są przemieszczeniowe warunki brzegowe

$$u_r(x) = \tilde{u}_r, \qquad u_\varphi(x) = \tilde{u}_\varphi, \qquad u_z(x) = \tilde{u}_z, \tag{2.5}$$
$$x \in \partial\tilde{T}$$

Ponieważ zadanie brzegowe problemu będzie formułowane w przemieszczeniach, przeto należy zarówno operatory równań równowagi, jak i warunków brzegowych (naprężeniowych) określić na polu przemieszczeń. Podstawiając związki strony geometrycznej (2.2) do równań konstytutywnych (2.1), te ostatnie natomiast do równań Cauchy'ego, otrzymamy układ 3 równań różniczkowych, cząstkowych z trzema niewiadomymi funkcjami u_r, u_φ, u_z; w sposób analogiczny, tj. poprzez funkcje przemieszczeń wyrażamy i naprężeniowe warunki brzegowe. Wprowadzając nieliniowe operatory równań przemieszczeniowych i naprężeniowych warunków brzegowych, oznaczone kolejno N i M, jako macierze

$$\mathrm{N} = [N_{ij}]_{3\times3}, \qquad \mathrm{M} = [M_{ij}]_{3\times3} \tag{2.6}$$

zapiszemy wymienione równania w sposób następujący:

$$N_{rr}u_r + N_{r\varphi}u_\varphi + N_{rz}u_z + X_r - \overset{*}{X}_r = 0,$$

$$N_{\varphi r}u_r + N_{\varphi\varphi}u_\varphi + N_{\varphi z}u_z + X_\varphi - \overset{*}{X}_\varphi = 0, \tag{2.7}$$

$$N_{zr}u_r + N_{z\varphi}u_\varphi + N_{zz}u_z + X_z - \overset{*}{X}_u = 0, \qquad (r,\varphi,z) \in T;$$

$$M_{rr}u_r + M_{r\varphi}u_\varphi + M_{rz}u_z = \hat{\mathfrak{X}}_r + \overset{*}{\mathfrak{X}}_r,$$
$$M_{\varphi r}u_r + M_{\varphi\varphi}u_\varphi + M_{\varphi z}u_z = \hat{\mathfrak{X}}_\varphi + \overset{*}{\mathfrak{X}}_\varphi \tag{2.8}$$
$$M_{zr}u_r + M_{z\varphi}u_\varphi + M_{zz}u_z = \hat{\mathfrak{X}}_z + \overset{*}{\mathfrak{X}}_z, \qquad x = (r,\varphi,z) \in \partial\hat{\mathcal{V}}$$

gdzie $\overset{*}{X}(\overset{*}{X}_r, \overset{*}{X}_\varphi, \overset{*}{X}_z)$, $\overset{*}{\mathfrak{X}}(\overset{*}{\mathfrak{X}}_r, \overset{*}{\mathfrak{X}}_\varphi, \overset{*}{\mathfrak{X}}_z)$ - kolejno pole sił "masowych" i "powierzchniowych", tj. analogiczne do sił masowych, lecz wywołane wpływem pola temperatury.

Współrzędne tych sił określone są równaniami:

$$\overset{*}{X}_r = (\gamma^* \Theta|_r; \quad \overset{*}{X}_\varphi = \frac{1}{r}(\gamma^*\Theta|_{,\varphi} \quad ; \overset{*}{X}_z = (\gamma^*\Theta|_z \tag{2.9}$$
$$\overset{*}{\mathfrak{X}}_r = \gamma^*\Theta n_r; \quad \overset{*}{\mathfrak{X}}_\varphi = \gamma^*\Theta n_\varphi; \quad \overset{*}{\mathfrak{X}}_z = \gamma^*\Theta n_z,$$

gdzie

$$\gamma^* = 2K(1-\bar{\varphi})\alpha_T.$$

Nieliniowe operatory N i M możemy przedstawić w postaci sumy części liniowej i nieliniowej

$$N = N^L + N^N \tag{2.10}$$
$$M = M^L + M^N.$$

Dla współrzędnych walcowych szczegółową postać operatorów (2.10) podają poniższe zależności:

a) operatory równań przemieszczeniowych

$$N^L_{rr}u_r = 2G\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{G}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial\varphi^2} + G\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{2G}{r}\frac{\partial u_r}{\partial t} - \frac{2G}{r^2}u_r + \lambda\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \lambda\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_r}{r}\right),$$

$$N^N_{rr}u_r = -2G\lambda\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} - 2G\frac{\partial\chi}{\partial r}\cdot\frac{\partial u_r}{\partial r} - \lambda\psi\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} - \lambda\psi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_r}{r}\right) -$$
$$-\lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r}\right)\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{G\chi}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial\varphi^2} - \frac{G}{r^2}\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} - G\chi\frac{\partial^2 z_r}{\partial z^2} -$$
$$-G\frac{\partial\chi}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{2G\chi}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - 2G\chi\frac{u_r}{r^2};$$

$$N^L_{r\varphi}u_\varphi = \lambda\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right) + \frac{G}{r}\,\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r\partial\varphi} - \frac{3G}{r^2}\,\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi},$$

$$N^N_{r\varphi}u_\varphi = -\lambda\psi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right) - \frac{\lambda}{r}\,\frac{\partial\psi}{\partial r}\cdot\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} - \frac{G\chi}{r}\,\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r\partial\varphi} - \frac{G}{r}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} +$$

$$+ \frac{G}{r^2}\,\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}\cdot u_\varphi + \frac{3G\chi}{r^2}\cdot\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi};$$

$$N^L_{rz}u_z = (\lambda + G)\,\frac{\partial^2 u_z}{\partial r\partial z},$$

$$N^N_{rz}u_z = -\lambda\psi\,\frac{\partial^2 u_z}{\partial r\partial z} - \lambda\,\frac{\partial\psi}{\partial r}\cdot\frac{\partial u_z}{\partial z} - G\chi\,\frac{\partial^2 u_z}{\partial z\partial r} - G\,\frac{\partial\chi}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_z}{\partial r};$$

$$N^L_{\varphi r}u_r = G\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}\right) + \frac{2G}{r}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{u_r}{r}\right) + \frac{\lambda}{r}\,\frac{\partial^2 u_r}{\partial\varphi\partial r} + \frac{\lambda}{r}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{u_r}{r}\right) + \frac{2G}{r^2}\,\frac{\partial u_r}{\partial\varphi},$$

$$N^N_{\varphi r}u_r = -G\chi\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}\right) - \frac{2G\chi}{r}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{u_r}{r}\right) - \frac{\lambda\psi}{r^2}\,\frac{\partial^2 u_r}{\partial\varphi\partial r} - \frac{\lambda\psi}{r}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{u_r}{r}\right) -$$

$$- \frac{2G\lambda}{r^2}\,\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} - \frac{G}{r}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial r}\cdot\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} - \frac{2G}{r^2}\,\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}\,u_r - \frac{\lambda}{r}\,\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{\lambda}{r^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi}\,u_r;$$

$$N^L_{\varphi\varphi}u_\varphi = G\,\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - G\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\varphi}{r^2}\right) + \frac{2G}{r^2}\,\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial\varphi^2} + \frac{\lambda}{r^2}\,\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial\varphi^2} + G\,\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} + \frac{2G}{r}\,\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} -$$

$$- \frac{2G}{r^2}\,u_\varphi,$$

$$N^N_{\varphi\varphi}u_\varphi = -G\chi\,\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + G\chi\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right) - \frac{2G\chi}{r^2}\,\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial\varphi^2} - \frac{\lambda\psi}{r^2}\,\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial\varphi^2} - G\chi\,\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} -$$

$$- \frac{2G\chi}{r}\,\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{2G\chi}{r^2}\,u_\varphi - G\,\frac{\partial\chi}{\partial r}\cdot\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{G}{r}\,\frac{\partial\chi}{\partial r}\,u_\varphi - \frac{2G}{r^2}\,\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}\quad\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} -$$

$$- \frac{\lambda}{r^2}\,\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} - G\,\frac{\partial\chi}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}; \tag{2.11}$$

$$N^L_{\varphi z}u_z = \frac{\lambda}{r}\,\frac{\partial^2 u_z}{\partial\varphi\partial z} + G\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_z}{\partial\varphi}\right) = (\lambda + G)\cdot\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 u_z}{\partial\varphi\partial z}$$

$$N^N_{\varphi z}u_z = -\frac{\lambda\psi}{r}\frac{\partial^2 u_z}{\partial\varphi\partial z} - \frac{G\chi}{r}\frac{\partial^2 u_z}{\partial\varphi\partial z} - \frac{\lambda}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{G}{r}\frac{\partial\chi}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_z}{\partial\varphi}$$

$$N^L_{zr}u_r = (G+\lambda)\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial z} + \lambda\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u_r}{r}\right) + \frac{G}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z},$$

$$N^N_{zr}u_r = -G\chi\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial z} - G\frac{\partial\chi}{\partial r}\cdot\frac{\partial u_r}{\partial z} - \lambda\psi\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial z} - \lambda\psi\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u_r}{r}\right) -$$

$$-\lambda\frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{\lambda}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}u_r - \frac{G\chi}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z};$$

$$N^L_{z\varphi}u_\varphi = \frac{1}{r}(G+\lambda)\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial\varphi\partial z},$$

$$N^N_{z\varphi}u_\varphi = -\frac{G\lambda}{r}\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial\varphi\partial z} - \frac{G}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} - \frac{\lambda\psi}{r}\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z\partial\varphi} - \frac{\lambda}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi};$$

$$N^L_{zz}u_z = G\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{G}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u_z}{\partial\varphi^2} + 2G\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \lambda\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{G}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r},$$

$$N^N_{zz}u_z = -G\chi\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} - G\frac{\partial\chi}{\partial r}\cdot\frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{G\chi}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial\varphi^2} - \frac{G}{r^2}\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial u_z}{\partial\varphi} - 2G\chi\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} -$$

$$-2G\frac{\partial\chi}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_z}{\partial z} - \lambda\psi\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \lambda\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{G\chi}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r};$$

b) operatory naprężeniowych warunków brzegowych (2.10)

$$M^L_{rr}u_r = \left[\left(2G\frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda\frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda\frac{u_r}{r}\right)n_r + \frac{G}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}n_\varphi + G\frac{\partial u_r}{\partial z}n_z\right],$$

$$M^N_{rr}u_r = -\left[\left(2G\chi\frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda\psi\frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda\psi\frac{u_r}{r}\right)n_r + \frac{G\chi}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\psi}n_\varphi + G\chi\frac{\partial u_r}{\partial z}n_z\right];$$

$$M^L_{r\varphi}u_\varphi = \left[\frac{\lambda}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}n_r + G\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}\right)n_\varphi + 0\cdot n_z\right],$$

$$M^N_{r\varphi}u_\varphi = -\left[\frac{\lambda\psi}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}n_r + G\chi\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}\right)n_\varphi + 0\cdot n_z\right];$$

$$M^L_{rz}u_z = \left[\lambda \frac{\partial u_z}{\partial z} n_r + 0 \cdot n_\varphi + G \frac{\partial u_z}{\partial r} n_z\right],$$

$$M^N_{rz}u_z = -\left[\lambda\psi \frac{\partial u_z}{\partial z} n_r + 0 \cdot n_\varphi + G\lambda \frac{\partial u_z}{\partial r} n_z\right];$$

$$M^L_{\varphi r}u_r = \left[\frac{G}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} n_r + (\frac{2G}{r} u_r + \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \frac{u_r}{r}) n_\varphi + 0 \cdot n_z\right],$$

$$M^N_{\varphi r}u_r = -\left[\frac{G\chi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} n_r + (\frac{2G\chi}{r} u_r + \lambda\psi \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda\psi \frac{u_r}{r}) n_\varphi + 0 \cdot n_z\right];$$

$$M^L_{\varphi\varphi}u_\varphi = \left[(G \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{G}{r} u_\varphi) \cdot n_r + (\frac{2G}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}) n_\varphi + G \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} n_z\right],$$

$$M^N_{\varphi\varphi}u_\varphi = -\left[G\chi (\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}) n_r + \frac{1}{r}(2G\chi + \lambda\psi) \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} n_\varphi + G\chi \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} n_z\right];$$

$$M^L_{\varphi z}u_z = \left[0 \cdot n_r + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z} n_\varphi + \frac{G}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} n_z\right],$$

$$M^N_{\varphi z}u_z = -\left[0 \cdot n_r + \lambda\psi \frac{\partial u_z}{\partial z} n_\varphi + \frac{G\chi}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} n_z\right];$$

$$M^L_{zr}u_r = \left[G \frac{\partial u_r}{\partial z} n_r + 0 \cdot n_\varphi + \lambda (\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r}) n_z\right],$$

$$M^N_{zr}u_r = -\left[G\chi \frac{\partial u_r}{\partial z} n_r + 0 \cdot n_\varphi + \lambda\psi (\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r}) n_z\right];$$

$$M^L_{z\varphi}u_\varphi = \left[0 \cdot n_r + G \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} n_\varphi + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} n_z\right],$$

$$M^N_{z\varphi}u_\varphi = -\left[0 \cdot n_r + G\chi \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} n_\varphi + \frac{\lambda\psi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} n_z\right];$$

$$M^{L}_{zz}u_z = \left[G\frac{\partial u_z}{\partial r}n_r + \frac{G}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi}n_\varphi + (2G\frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda\frac{\partial u_z}{\partial z})n_z\right],$$

$$M^{N}_{zz}u_z = -\left[G\chi\frac{\partial u_z}{\partial r}n_r + \frac{G\chi}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi}n_\varphi + (2G\chi\frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda\psi\frac{\partial u_z}{\partial z})n_z\right].$$

3. Stan osiowo-symetryczny

Szczególnym przypadkiem ogólnego stanu naprężenia i odkształcenia jest stan osiowo-symetryczny. Stan ten charakteryzuje się osiową symetrią, z której wynika symetria:

a) obszaru zajmowanego przez ośrodek;
b) podobszarów $\partial\hat{\mathcal{V}}$ i $\partial\tilde{\mathcal{V}}$;
c) pól obciążeń (masowych i powierzchniowych);
d) pola temperatury.

W stanie osiowo-symetrycznym wektory przemieszczenia - sił masowych i powierzchniowych oraz pole temperatury określone są funkcjami dwu zmiennych r i z, tak że

$$\begin{aligned} u_r &= u_r(r,z), & u_\varphi &= 0, & u_z &= u_z(r,z);\\ X_r &= X_r(r,z), & X_\varphi &= 0, & X_z &= X_z(r,z);\\ \mathcal{X}_r &= \mathcal{X}_r(r,z), & \mathcal{X}_\varphi &= 0, & \mathcal{X}_z &= \mathcal{X}_z(r,z);\end{aligned} \tag{3.1}$$
$$\Theta = \Theta(r,z) \qquad (r,z) \in \mathcal{V} = \Omega \in R^2$$

Zauważmy, że w stanie osiowo-symetrycznym pochodne względem zmiennej φ - wszystkich występujących tam funkcji - są równe zeru. Stan ten oznaczymy cyfrą "1". W szczególności, jeśli odkształcenia są niezależne od zmiennej z - stan osiowo-symetryczny "2" - wtedy wszystkie występujące funkcje są zależne jedynie od zmiennej r, czyli

$$\begin{aligned} u_r &= u_r(r), & u_\varphi &= 0, & u_z &= 0;\\ X_r &= X_r(r), & X_\varphi &= 0, & X_z &= 0;\\ \mathcal{X}_r &= \mathcal{X}_r(r), & \mathcal{X}_\varphi &= 0, & \mathcal{X}_z &= 0;\end{aligned} \tag{3.2}$$
$$\Theta = \Theta(r) \qquad r \in \mathcal{V} = (a,b) \subset R^1$$

W stanie osiowo-symetrycznym "1" operatory N i M

$$N = [N_{ij}]_{2\times2}, \qquad M = [M_{ij}]_{2\times2} \qquad (i,j = r,z) \tag{3.3}$$

otrzymujemy z równań $(2.11)_{1-18}$, $(2.12)_{1-18}$, wykorzystując założenia (3.1) tego stanu. Równania równowagi i warunki brzegowe mają teraz postać:

$$\begin{aligned} &N_{rr}u_r + N_{rz}u_z + X_r - (\gamma^*\Theta)_r = 0, \\ &N_{zr}u_r + N_{zz}u_z + X_z - (\gamma^*\Theta)_z = 0, \qquad x \in \Omega \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} &M_{rr}u_r + M_{rz}u_z = \hat{\mathfrak{X}}_r + \gamma\,\Theta_r \\ &M_{zr}u_r + M_{zz}u_z = \hat{\mathfrak{X}}_z + \gamma^*\Theta_z \qquad x \in \partial\hat{\Omega} \\ &u_r = \tilde{u}_r \qquad u_z = \tilde{u}_z \qquad x \in \partial\hat{\Omega} \end{aligned} \tag{3.5}$$

W stanie osiowo-symetrycznym "2" zachodzą równości

$$N = N_{rr} \qquad M = M_{rr}; \tag{3.6}$$

równania problemu brzegowego mają w tym przypadku postać:

$$\begin{aligned} &N_{rr}u_r + X_r - (\gamma^*\Theta)_r = 0, \qquad x \in (a,b); \\ &M_{rr}u_r = \hat{\mathfrak{X}}_r + \gamma^*\Theta_{nr} \qquad x \in \{a\}; \\ &u_r = \tilde{u}_r \qquad x \in \{b\}; \end{aligned}$$

operatory N_{rr} i M_{rr} wyznaczamy z równań $(2.11)_{1-2}$ $(2.12)_{1-2}$, przyjmując założenia: pochodne względem zmiennych φ i z są równe zeru; słuszne są równości

$$n_\varphi = n_z = 0.$$

LITERATURA

[1] BORKOWSKI Sz.: Dynamical equation of physically nonlinear thermoelasticity, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Techn. 9, 24, (1976), [655]-[661].

[2] BORKOWSKI Sz.: Variational principles in physically nonlinear termoelasticity, ibid., 9, 25 (1977), [769]-[774].

[3] КОЛТУНОВ М., ВАСИЛЬЕВ Ю., ЧЕРНЫХ В.: Упругость и прочность цилиндрических тел. Высшая Школа, Москва 1975.

[4] LEWICKI A.: Fizykalnie nieliniowe problemy termosprężystości ośrodków obrotowych (praca magisterska), Gliwice 1980, maszynopis 99 str.

ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ВРАЩЕННЫХ СРЕД.
I. УРАВНЕНИЯ В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Р е з ю м е

В работе выведены уравнения в перемещениях для вращательной среды, которая является однородной, изотропной, физически нелинейной упругой средой типа Каудерера, предполагая нелинейное действие нестационарного поля температур.

PHYSICALLY NONLINEAR PROBLEMS OF THERMOELASTICITY OF ROTATIONAL MEDIA
I. DISPLACEMENT EQUATIONS

S u m m a r y

The displacement equations are derived for homogeneous isotropic physically nonlinear rotational medium of the Kauderer type. The nonlinear effect of nonstationary temperatury field is considered.

Wpłynęło do Redakcji 18.VII.1980 r.

Recenzent

Prof. dr hab. inż. Szczepan Borkowski